Государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный
инженерно-экономический университет»

Справочный материал к практике 17 по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии»

Вычисление двойных интегралов с помощью замены переменных

Составитель:
ст. преподаватель кафедры «Физико-математические науки» Черемухин А. Д.

Таблица интегралов и примеры нахождения табличных интегралов от функций одной переменной

1. $\int 0 \cdot dx = C.$
2. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C.$
3. $\int x^{\mu}\, dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \qquad (\mu \neq -1)$
4. $\int \frac{1}{x}\, dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
5. $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$
7. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C. \qquad \int e^x\, dx = e^x + C.$
8. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$
9. $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$
10. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
11. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
12. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C.$
13. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C.$
14. $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\, dx = -\operatorname{cth} x + C.$
15. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\, dx = \operatorname{th} x + C.$

Примеры нахождения интегралов

$$\int (2x^2+1)^3\, dx = \int (8x^6+12x^4+6x^2+1)\, dx = \frac{8}{7}x^7 + \frac{12}{5}x^5 + 2x^3 + x + C.$$

$$\int (1+\sqrt{x})^4\, dx = \int (1+4\sqrt{x}+6x+4x\sqrt{x}+x^2)\, dx = \int dx + 4\int x^{\frac{1}{2}}dx + 6\int x\, dx + 4\int x^{\frac{3}{2}}dx + \int x^2\, dx =$$

$$x + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x^2 + \frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}x^3 + C.$$

$$\int \frac{(e^x-1)(e^{2x}+1)}{e^x}\, dx = \int (e^{2x} - e^x + 1 - e^{-x})\, dx = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + e^{-x} + C.$$

$$\int \frac{12}{x^2+64}\, dx = 12\int \frac{dx}{x^2+8^2} = 12 \cdot arctg\left(\frac{x}{8}\right) + C$$

$$\int \frac{44}{20-x^2}\, dx = 44\int \frac{dx}{\sqrt{20}^2 - x^2} = \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{\sqrt{20}+x}{\sqrt{20}-x}\right| + C$$

$$\int \frac{13}{\sqrt{100-4x^2}}\, dx = \int \frac{13}{2\sqrt{25-x^2}}\, dx = \frac{13}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} = \frac{13}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{5}\right) + C = \frac{13}{10} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{5}\right) + C$$

$$\int \frac{10}{\sqrt{x^2+13}}\, dx = 10 \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+13}} = 10 \cdot \ln\left|x + \sqrt{x^2+13}\right| + C$$

Пример 1. Найдите интеграл $\int_{4}^{7}\int_{10}^{17}\left(-7x^{3}+10x^{2}y\right)\,dx\,dy$:

При нахождение определенных кратных интегралов вычисления проходят в несколько этапов. Определенный интеграл берется последовательно по каждой переменной

$$\int_{4}^{7}\int_{10}^{17}\left(-7x^{3}+10x^{2}y\right)dx\,dy=\int_{4}^{7}\left(\int_{10}^{17}\left(-7x^{3}+10x^{2}y\right)dx\right)dy$$

$$\int_{10}^{17}\left(-7x^{3}+10x^{2}y\right)dx=\int_{10}^{17}-7x^{3}dx+\int_{10}^{17}10x^{2}y\,dx=\left(\frac{-7x^{4}}{4}+y\cdot\frac{10\cdot x^{3}}{3}\right)\Bigg|_{x=10..17}=\left(\frac{-7\cdot17^{4}}{4}+y\cdot\frac{10\cdot17^{3}}{3}\right)-\left(\frac{-7\cdot10^{4}}{4}+y\cdot\frac{10\cdot10^{3}}{3}\right)=-\frac{514647}{4}+\frac{391}{3}$$

$$\int_{4}^{7}\left(-\frac{514647}{4}+\frac{39130}{3}y\right)dy=\left(-\frac{514647y}{4}+\frac{39130\cdot y^{2}}{6}\right)\Bigg|_{y=4..7}=\left(-\frac{514647\cdot7}{4}+\frac{39130\cdot7^{2}}{6}\right)-\left(-\frac{514647\cdot4}{4}+\frac{39130\cdot4^{2}}{6}\right)=-\frac{683081}{4}=-170770.25$$

Пример 2. Найдите интеграл $\int_{8}^{9}\int_{x+2}^{x^2}(5x-y)\,dy\,dx$

В случае, если пределы являются функциями, техника вычисления интегралов не меняется

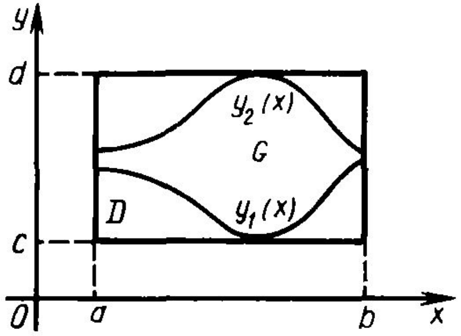
$$1.\ \int_{x+2}^{x^2}(5x-y)\,dy=\int_{x+2}^{x^2}(5x)\,dy-\int_{x+2}^{x^2}(y)\,dy=5xy-\frac{y^2}{2}\Bigg|_{y=x+2\,..\,x^2}=\left(5x\cdot x^2-\frac{(x^2)^2}{2}\right)-\left(5x\cdot(x+2)-\frac{(x+2)^2}{2}\right)=5x^3-\frac{x^4}{2}-5x^2-10x+\frac{x^2}{2}+2x+2$$

$$1.\ \int_{x+2}^{x^2}(5x-y)\,dy=5x^3-\frac{9}{2}x^2-8x-\frac{1}{2}x^4+2$$

$$2.\ \int_{8}^{9}\int_{x+2}^{x^2}(5x-y)\,dy\,dx=\int_{8}^{9}\left(5x^3-\frac{9}{2}x^2-8x-\frac{1}{2}x^4+2\right)dx=\int_{8}^{9}(5x^3dx)-\int_{8}^{9}\left(\frac{9}{2}x^2dx\right)-\int_{8}^{9}(8x dx)-\int_{8}^{9}\left(\frac{1}{2}x^4dx\right)+\int_{8}^{9}(2dx)=\left(\frac{5x^4}{4}-\frac{9x^3}{6}-4x^2-\frac{x^5}{10}+2x\right)$$

$$\Bigg|_{x=8\,..\,9}=\frac{1233}{20}=61.65$$

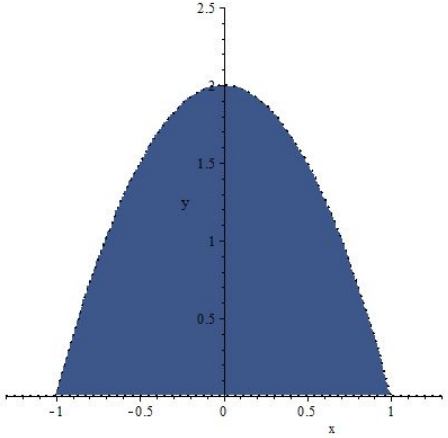
Пример 3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0, y = -2x^2 + 2$

Если необходимо найти площадь сложной фигуры (например, 

то ее площадь ищется по формуле

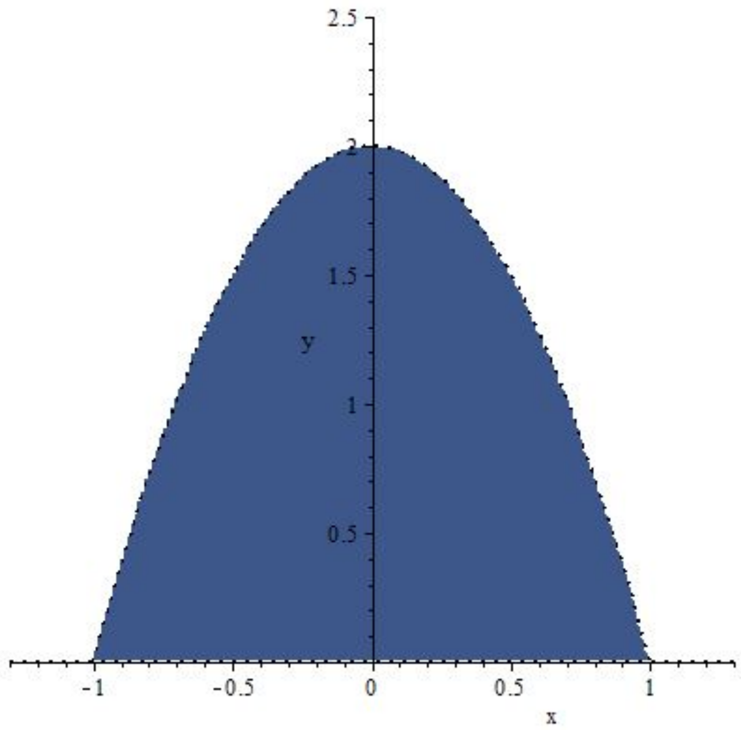
$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy$$

1. Посмотрим на область интегрирования



Пример 3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=0, y=-2x^2+2$

1. Посмотрим на область интегрирования



Область интегрирования ограничена снизу прямой y = 0, сверху – параболой. Чтобы вычислить интеграл, необходимо найти левый и правый предел интегрирования $-2x^2+2=0 \Rightarrow -2x^2=-2 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

Составим интеграл (он будет двойным) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{-2x^2+2} 1\,dy\,dx$

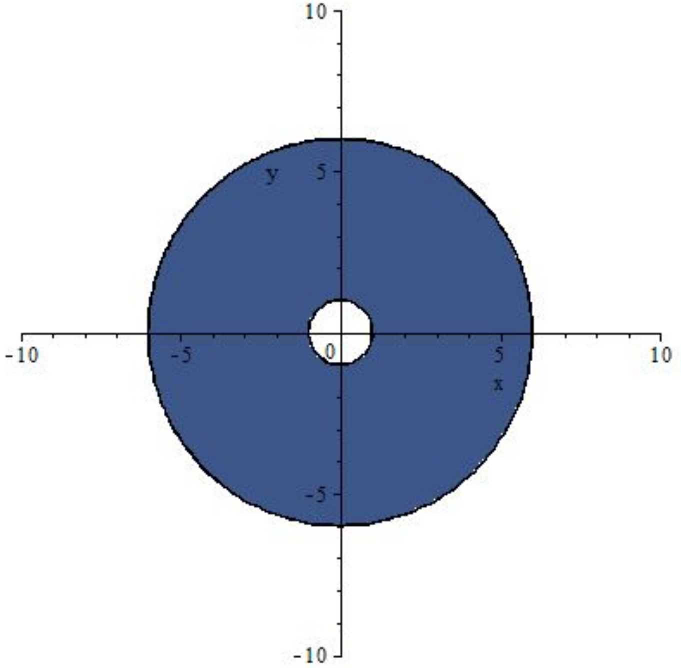
Вычислим

$$\int_0^{-2x^2+2} 1\,dy = y\Big|_{y=0..-2x^2+2} = -2x^2+2-0=-2x^2+2$$

$$\int_{-1}^{1}(-2x^2+2)\,dx = \left(-\frac{2x^3}{3}+2x\right)\Big|_{x=-1..1} = \left(-\frac{2\cdot 1^3}{3}+2\cdot 1\right)-\left(-\frac{2\cdot(-1)^3}{3}+2\cdot(-1)\right) = -\frac{2}{3}+2-\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$$

Пример 4. Найдите интеграл от функции f(x,y) по области G $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2+3}$, $G=\{1\le x^2+y^2 \text{ and } x^2+y^2\le 36\}$

Область интегрирования



В случае сложных криволинейных областей проводят замену переменных по формулам

$u=u(x,y),\ v=v(x,y).$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

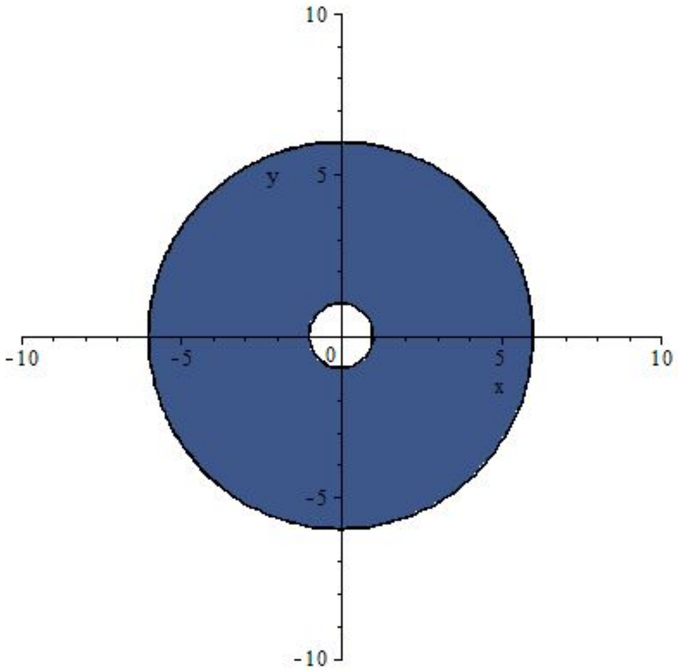
$$\iint\limits_{G} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{G^*} f[x(u,v),y(u,v)]\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|du\,dv$$

В нашем случае целесообразно применить переход к полярным координатам

$x=\rho\cos\varphi$ $y=\rho\sin\varphi.$ $\dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}=\rho$

Пример 4. Найдите интеграл от функции f(x,y) по области G $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2+3},\ G=\{1\le x^2+y^2 \text{ and } x^2+y^2\le 36\}$

Область интегрирования



Тогда получаем:

$$\iint \frac{1}{x^2+y^2+3}\,dy\,dx \to |x=\rho\cdot\cos(\varphi), y=\rho\cdot\sin(\varphi)| \to \int_0^{2\pi}\int_1^6 \frac{\rho}{(\rho\cdot\cos(\varphi))^2+(\rho\cdot\sin(\varphi))^2+3}\,d\rho\,d\varphi$$

Найдем интеграл

$$\int_0^{2\pi}\int_1^6 \frac{\rho}{(\rho\cdot\cos(\varphi))^2+(\rho\cdot\sin(\varphi))^2+3}\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_1^6 \frac{\rho}{\rho^2+3}\,d\rho\,d\varphi$$

$$\int_1^6 \frac{\rho}{\rho^2+3}\,d\rho = \frac{1}{2}\ln(p^2+3)\Big|_{p=1..6} = -\ln(2)+\frac{1}{2}\ln(3)+\frac{1}{2}\ln(13)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_1^6 \frac{\rho}{\rho^2+3}\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(-\ln(2)+\frac{1}{2}\ln(3)+\frac{1}{2}\ln(13)\right)d\varphi = 7.15$$