ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

36 часов лекций
36 часов практических занятий
4 контрольных работы
Экзамен

Литература

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей (задачи и упражнения)

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Предмет курса

Две группы —***события детерминированные и события случайные***

События, которые изучает теория вероятностей, обладают следующими свойствами:

1. События могут быть осуществлены неограниченное число раз в неизменных условиях (бросание монеты, игральной кости, определение числа автобусов в заданном интервале на данной остановке).

2. События обладают статистической устойчивостью.

Историческая справка

Возникновение теории вероятностей относят к 17 веку, и связывают с комбинаторными задачами теории игр

Следующий период истории **теории вероятностей** (18 - 19 в. в.) связан с именами А. Муавра, П. Лапласа, К. Гаусса и С. Пуассона.

Третий период истории **теории вероятностей** (2-я половина 19 в.) связан в основном с именами русских математиков П. Л. Чебышева, А. М. Ляпунова и А. А. Маркова.

На базе аппарата **теории вероятностей** появились такие дисциплины, как **математическая статистика**, **теория** **случайных процессов**, теория **массового обслуживания**, теория **телетрафика** и другие.

Классификация событий

Определение. Если множество, соответствующее событию А, принадлежит множеству, соответствующему событию В, то говорят, что событие А влечет за собой событие В, или А является частным случаем В.
Обозначение $A \subseteq B$

Определение. Событие, состоящее из всех элементов пространства элементарны событий Ω, называется достоверным. Оно в результате опыта происходит обязательно.

Определение. Случайное событие, содержащее только один элемент множества Ω, называется простым или элементарным. Если событие содержит более одного элемента множества Ω, то оно называется составным.

Определение. Два события называются несовместными, если они не содержат общих элементов множества Ω, и совместными, если у них есть общие элементы.

Определение. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу, если в результате опыта произойдет хотя бы одно из них.

Понятие события

Определение. Множество Ω всех возможных несовместимых исходов называется пространством элементарных событий. Выбор Ω связан с решением конкретной задачи.

Пример 1. Подбрасывание монеты один раз.

Пример 2. Подбрасывание монеты три раза.

Пример 3. Стрельба по мишени. Исходы число выбитых очков

Пример 4. Работа телефонной станции.

Определение. Событие $\overline{A}$, состоящее из всех элементов Ω, которые не входят в A называется противоположным A или его отрицанием. Если A произойдет, то очевидно $\overline{A}$ не произойдет и наоборот.

Объединение, пересечение и разность событий

Определение. Событие C , наступающее тогда и только тогда, когда наступает Хотя бы одно из событий A или B называется суммой событий A и B или их объединением.

Обозначение $C = A \cup B$ или $C = A + B$.
Событие $C = A + B$ состоит объединения множеств, соответствующим событиям A и B .

Определение. Пересечением или произведением событий A и B называется событие C , заключающееся в одновременном появлении событий A и B .

Обозначение $C = A \cap B$ или $C = A \cdot B$.
Событие $C = A \cdot B$ состоит из пересечения множеств, соответствующим событиям A и B .

Определение. Разностью событий A и B называется событие C , состоящее из всех элементов множества Ω , которые входя в A, но не входят в B.

Обозначение $C = A \backslash B$.
Если события A и B несовместны, то $A \backslash B = A$.
Очевидно, что $\overline{A} = \Omega \backslash \mathrm{A}$!!!.

Свойства операций над событиями

$A + B = B + A$ $\qquad$ $A \cdot A = A$

$A \cdot B = B \cdot A$ $\qquad$ $A \cdot \Omega = A$!!!

$A + A = A$ $\qquad$ $A + \Omega = \Omega$

Понятие вероятности события

Классическое определение вероятности

Пусть пространство элементарных событий Ω дискретно и состоит из конечного числа n равновозможных несовместных исходов ω_i, называемых случаями. Пусть событие A состоит из m равновозможных событий $\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{im}$.

Вероятностью события A называется $P(A) = \frac{m}{n}$.
Здесь $n = |\Omega|$, $m = |A|$

$\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{im}$ благоприятствующие событию A исходы

Пример 1. Подброшены две игральные кости. Найти вероятность события A такого, что сумма выпавших очков не превышает трех.

Пример 2. Из колоды карт (36 шт) наудачу извлекают три карты. Найти вероятность Того, что среди них окажется ровно один туз.

Слово «наудачу» означает, что всевозможные комбинации по три карты равновероятны. Поэтому при решении задачи принимаем модель неупорядоченного выбора без возвращения.

Свойства вероятности

1. $0 \leq P(A) \leq 1$, при этом $P(\emptyset)=0$, $P(\Omega)=1$!!!

2. Если события A и B несовместны, то $P(A+B) = P(A) + P(B))$

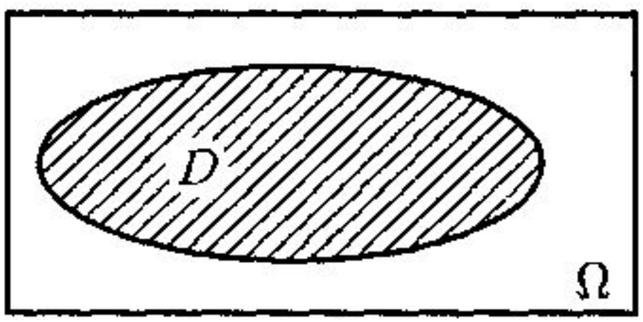
Статистический подход к определению вероятности

Пусть проведена серия из n опытов и в μ из них наступило событие A.

Отношение $\frac{\mu}{n}$ называется относительной частотой события A

Предел $P^* = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mu}{n}$ называется статистическим определением вероятности

Геометрическое определение вероятности



Полагают, что $P(A) = \frac{S_D}{S_\Omega}$

Пример . Имеются два концентрических круга с радиусами R и $R/2$. Точка M находится в большом круге. Причем ее положение в любом месте круга равновероятно. Определить вероятность того, что точка M находится и в малом круге.

Условные вероятности. Зависимые и независимые события.

Пример . В урне находится 5 черных и 3 белых шара. Из урны наугад первым достали белый шар – событие B. Найти вероятность того, что второй шар будет белым событие A.

По геометрическому определению вероятности, условная вероятность

$$P(A|B) = \frac{S_{12}}{S_2} = \frac{S_{12}/S}{S_2/S} = \frac{P(AB)}{P(B)}. \qquad (1)!!!$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \qquad (2)$$

Формулы умножения вероятностей.

$$P(A \cdot B) = P(A)\, P(B|A)$$

$$P(A \cdot B) = P(B)\, P(A|B)$$

Если события A и B независимы, то $P(A \cdot B) = P(A)\, P(\text{B})$

Пример . Найти вероятность достать из колоды подряд два туза.

Правило сложения вероятностей.

$$S_{A+B} = S_1 + S_2 - S_{12}$$

$$P(A+B) = \frac{S_{A+B}}{S} = \frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} - \frac{S_{12}}{S} = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \ !!!$$

Если все события $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n$ попарно несовместны, то

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Пример . Производится бомбометание по трем складам боеприпасов, причем сбрасывается одна бомба. Вероятность попадания в первый склад p1=0.01, во второй p1=0.008, в третий p1=0.025. При попадании в один из складов взрываются все три. Найти вероятность, что склады будут взорваны.

Формула полной вероятности

Требуется определить вероятность события А, которое может произойти вместе с одним из событий

$$H_1, H_2, \ldots, H_n,$$

образующих полную группу несовместных случайных событий.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)) \quad \text{формула полной вероятности}$$

Пример . Имеются три одинаковые на вид урны. В первой 2 белых и 1 черный шар. Во второй 3 белых и 1 черный шар. В третей 2 белых и 2 черных шара. Выбираю наудачу урну и достают из нее шар. Найти вероятность, что достанем белый шар.

Формула Байеса

Имеется полная группа несовместных событий

$$H_1, H_2, \ldots, H_n,$$

и связанное с ними событие A

Известны вероятности $P(H_i)$ и $P(A|H_i)$, которые называются априорными или доопытными.

Опыт произведен и его результатом является событие A.

Найдем вероятность, что при этом имела место гипотеза H_i, т.е. $P(H_i \mid A)$

$P(H_i \mid A)$ априорная или после опытная вероятность

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i))}$$

Пример . Имеются три одинаковые на вид урны. В первой 2 белых и 1 черный шар. Во второй 3 белых и 1 черный шар. В третей 2 белых и 2 черных шара. Опыт прошел и в результате мы достали белый шар. Найти вероятности того, что шар достали:

из первой урны;

из второй урны;

из третей урны.

Схема Бернулли

Серии из n опытов

В пределах одной серии результаты предшествующих испытаниях не сказываются на последующих

Вероятность появления события A в каждом из опытов Неизменна и равна $P(A)=p$. Вероятность остается неизменной на протяжении испытаний и не зависит от результатов предыдущих опытов.

Простейшей задачей относящейся к схеме Бернулли являетяс определение вероятности $P_n(m)$ того, что в n опытах событие A произойдёт m раз.

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$$

Формула Бернулли или формула биномиального распределения

Пример . После года хранения на складе в среднем 10% аккумуляторов выходит из строя. Найти вероятность того, что после года хранения из 12 аккумуляторов окажутся годными:

а) 10 аккумуляторов;

б) больше половины аккумуляторов.

$$P_{12}(10) \approx \ 0{,}2301$$

$$P_{12}(m > 6) \approx \ 0{,}9954$$

Число m_0 называется наивероятнейшим числом событий, если $P_n(m_0) \geq P_n(m)$ при любых m

Предельные распределения в схеме Бернулли

Понятие случайной величины

Пример 1. Число сбоев компьютера *M* за 24 часа работы

Пример 2. Число появлений герба при N бросаниях монеты $0 \le N \le m$

Пример 3. Координаты попадания в мишень *(X, Y)*

Пример 4. Диаметр изготовленной на станке детали $D = d_0 + X$, X – ошибка, d_0 – заданный диаметр.

Определение. Случайной величиной X называется числовая функция, определенная на пространстве элементарных событий Ω, которая каждому элементарному событию ω ставит в соответствие число $X(\omega)$, т.е. $X = X(\omega), \omega \in \Omega$.

Пример. Опыт состоит в бросании монеты 2 раза. В этом случае $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, где ω_1 =ГГ, ω_2 =ГР, ω_3 =РГ, ω_4 =РР. Рассмотрим случайную величину Х — число появлений герба.

Одномерные дискретные случайные величины величины

Определение. Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями.

Законом распределения случайной величины можно задавать:

1. Таблично

2. Графически

3. Аналитически с помощью формулы, определяющей зависимость $P(X = x_i)$

Распределение Пуассона

Определение. Потоком событий называется последовательность событий, которые наступают в моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_n$

Определение. Потоком называется пуассоновским, если он обладает следующими свойствами:

1. Стационарность – вероятность появления m событий на интервале $(t,\ t+\tau)$ не зависит от t, а зависит только от τ;

2. Отсутствие последействия – вероятность появления m за промежуток времени τ не зависит от числа событий в предшествующие промежутки времени;

3. Ординарность – вероятность появления на интервале $(t,\ t+\tau)$ при $\tau \to 0$ двух или более событий принебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления только одного события.

Если поток обладает перечисленными свойствами, то вероятность того, что на интервале времени Δt произойдет m событий определяется формулой Пуассона

$$P(m, \Delta t) = \frac{(\lambda \Delta t)^m}{m!} e^{-\lambda \Delta t}$$

Пример. Системный блок вычислительного комплекса отказывает в среднем один раз за 1000 часов. Какова вероятность:

а) ровно двух отказов за 200 часов;

б) хотя бы одного за 100 часов.

Функция распределения

Определение. Функция

$$P(X < x) = F(x)$$

называется функцией распределения и показывает как зависит от величины выбранного уровня x вероятность того, что значения случайной величины не превосходят этот уровень.

Свойства функции распределения:

1. $0 \le F(x) \le 1$

2. $F(-\infty) = P(X < -\infty) = 0$ вероятность невозможного события

3. $F(\infty) = P(X < \infty) = 1$ вероятность достоверного события

4. $F(x_2) \geq F(x_1)$ при $x_2 > x_3$ т.е. $F(x)$ функция неубывающая

Плотность распределения вероятностей

Определение. Если существует неотрицательная функция $f(x)$ такая, что функция распределения $F(x)$ при любых х можно представить в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

то $f(x)$ называют **плотностью распределения вероятностей**

Свойства $\boldsymbol{f(x)}$

1. Из определения следует, что $f(x) \geq 0$

2. Если $f(x)$ непрерывна, то $F(x)$ дифференцируема и

$$\frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x)$$

3. $P(a \leq X < b) = \int_a^b f(t)dt$ для любых a и b

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = F(+\infty) = 1$

Кривая плотности вероятностей $f(x)$ может иметь один или несколько максимумов.

Определение. Значение $X = x_{max}$, при котором плотность вероятностей достигает максимального значения, называется модой и обозначается $\mathrm{Mo}X$

Определение. Точка на оси абсцисс, в которой площадь, ограниченная кривой плотности вероятностей, делится пополам называется медианой

$$P(X < \mathrm{Me}X) = P(X > \mathrm{Me}X))$$

Пример 1. Равномерная плотность вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} c, x \in (a,b) \\ 0, x \notin (a,b) \end{cases}$$

$$\mathrm{Me}X = \frac{a+b}{2}$$

Пример 2. Нормальный (гауссовский) закон распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Краткая запись $X \sim N(a, \sigma)$

Пример 3. Плотность вероятностей задана формулой

$$f(x) = \begin{cases} A\cos(x) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0, x \notin (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Найти константу *A*, функцию распределения *F(x)*.

Замечание. $P(x \leq X < x + \Delta x) = \int_{x}^{x+\Delta x} f(x)dx \approx f(x)\Delta x$

Числовые характеристики случайных величин

Определение. Для непрерывной случайной величины моментом распределения k-го порядка называется

$$m_k[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$$

в предположении что несобственный интеграл сходится абсолютно, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x^k| f(x)dx < +\infty$$

Определение. Для дискретной случайной величины моментом распределения k-го порядка называется

$$m_k[X] = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^k p_i$$

Среднее значение

Определение. Момент первого порядка называется математическим ожиданием или средним значением случайной величины

$$m_1[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Для дискретной случайной величины

$$m_1[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p_i$$

Пример 1. Бросается игральная кость, найти среднее числа выпавших очков.

Пример 2. Пуассоновское распределение

$$P(m, \Delta t) = \frac{(\lambda \Delta t)^m}{m!} e^{-\lambda \Delta t}$$

Найти $m_1[M]$.

Пример 3. Нормальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Найти $m_1[X]$.

Пример 4. Равномерная плотность вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, x \in (a,b) \\ 0, x \notin (a,b) \end{cases}$$

Найти $m_1[X]$.

$$m_1[X] = \frac{a+b}{2}$$

Пример 5. Распределение Коши

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$$

Найти $m_1[X]$.

Пример 6. Плотность вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos(x)\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\\ 0, x\notin(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\end{cases}$$

Найти $m_1[X]$.

Замечание. Размерность $f(x)$ равна размерности X^{-1}, **т.е.** $[f(x)]=[X^{-1}]$

Размерность математического ожидания $[m_1[X]]=[X]$

Центральные моменты случайной величины

Определение. Разность между случайной величиной и ее средним значением называется отклонением

$$\Delta_x = X - m_1[X]$$

Определение. Центральным моментом *k*-го порядка непрерывной случайной величины моментом называется

$$\mu_k[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1[X])^k f(x)dx$$

Для дискретной случайной

$$\mu_k[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_1[X])^k p_i$$

Определение. Дисперсией случайной величины называется центральный момент второго порядка $\mu_2[X]$. Обозначение $D(X)$.

Замечание. Размерность дисперсии $[D(X)\ ] = [X^2]$

Вводят величину $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$ – среднеквадратическое отклонение или стандартное отклонение

Пример 1. Бросается игральная кость, найти среднеквадратическое отклонение числа выпавших очков.

$$\sigma_x \approx 1{,}707$$

Пример 2. Пуассоновская случайная величина. Найти$D(X)$.

$$D(M) = \lambda\Delta t.$$

Пример 3. Нормальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Найти $D[X]$.

$$D(X) = \sigma^2.$$

Пример 4. Равномерная плотность вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in (a, b) \\ 0, x \notin (a, b) \end{cases}$$

Найти $D[X]$.

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Пример 6. Плотность вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos(x)\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\\ 0, x\notin(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\end{cases}$$

Найти $D[X]$.

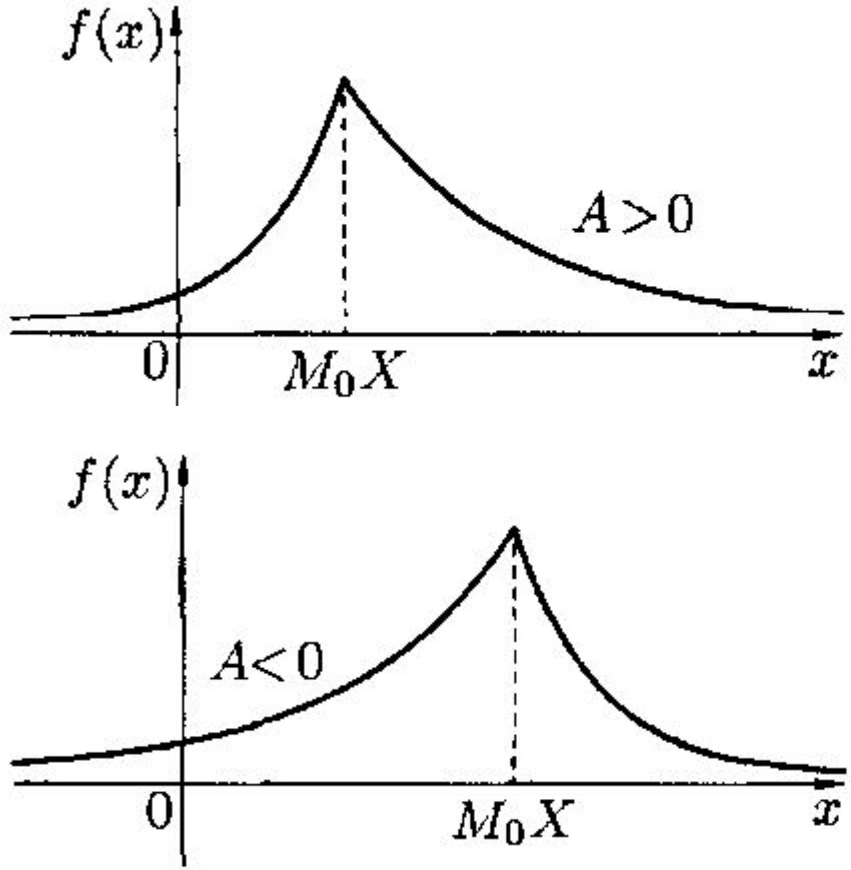
$$D(X)=\frac{\pi^2}{4}-2.$$

Асимметрия и эксцесс случайной величины

$$\mu_3[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1[X])^3 f(x) dx$$ непрерывная СВ

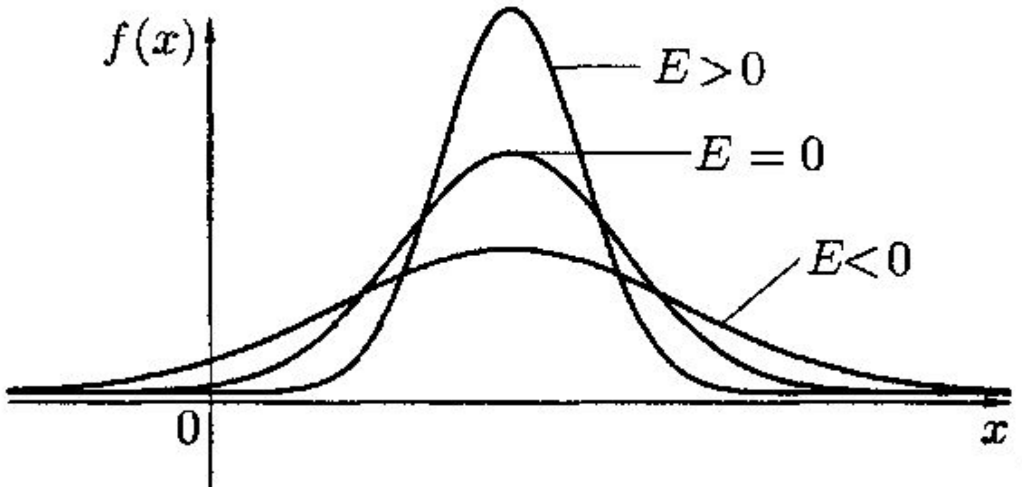
$$\mu_3[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_1[X])^3 \, p_i$$ дискретная СВ

Коэффициент асимметрии $A = \frac{\mu_3}{{\sigma_x}^3}$



f(x)
A>0
0
M0X
x
f(x)
A<0
0
M0X
x

Эксцесс $E = \frac{\mu_4}{\sigma_x{}^4} - 3$



Функции от случайной величины

$$Y = \varphi(X)$$

1. $\frac{d\varphi(X)}{dx} > 0$ $\qquad f_2(y) = f_1[\psi(y)]\psi'(y)$!!!

2. $\frac{d\varphi(X)}{dx} < 0$ $\qquad f_2(y) = -f_1[\psi(y)]\psi'(y)$!!!

$$f_2(y) = f_1[\psi(y)]|\psi'(y)| \text{ !!!}$$

Пример. Случайная величина X имеет нормальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Найти плотность вероятностей случайной величины $Y = kX + b$.

Если функция $Y = \varphi(X)$ не монотонна, то обратная функция $\mathrm{X} = \psi(Y)$ неоднозначна и одному значению Y соответствует несколько ветвей обратной функции $\psi_k(Y)$

$$f_2(x) = \sum_k f_1[\psi_k(y)]|\psi_k{}'(y)|$$

Математическое ожидание и дисперсия функции от случайной величины

$$Y = \varphi(X)$$

$$m_1[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_1(x) dx$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x) - m_1[Y])^2 f_1(x) dx$$

Пример. $Y = kX + b$ Найти $m_1[Y]$ и $D(Y)$