Исследование функций и построение графиков

Дифференциальное исчисление. Приложение производной.

Схема полного исследования

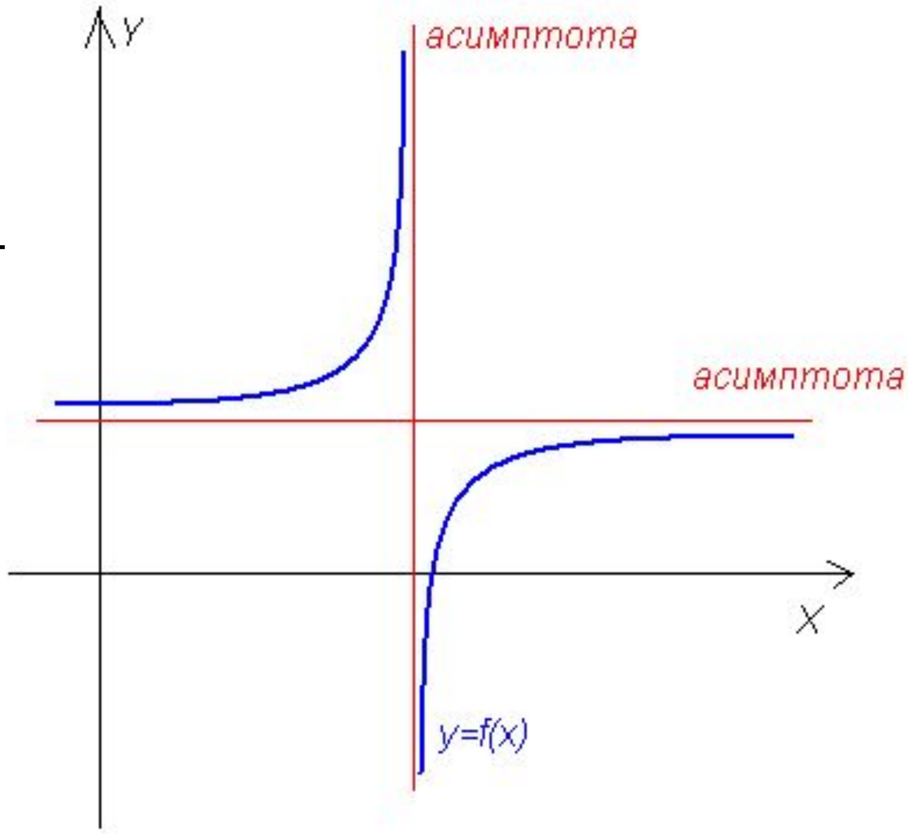
1. Нахождение области определения функции.
2. Нахождение асимптот графика функции.
3. Нахождение точек экстремума и интервалов монотонности.
4. Нахождение точек перегиба и интервалов выпуклости и вогнутости.
5. Анализ свойств функции: четность, периодичность.
6. Нахождение точек пересечения с осями координат.

Область определения функции

- О.О.Ф. – совокупность значений аргумента, при которых функциональное выражение имеет смысл.
- О.З.Ф. – совокупность значений функции $y(x)$

Асимптоты функции

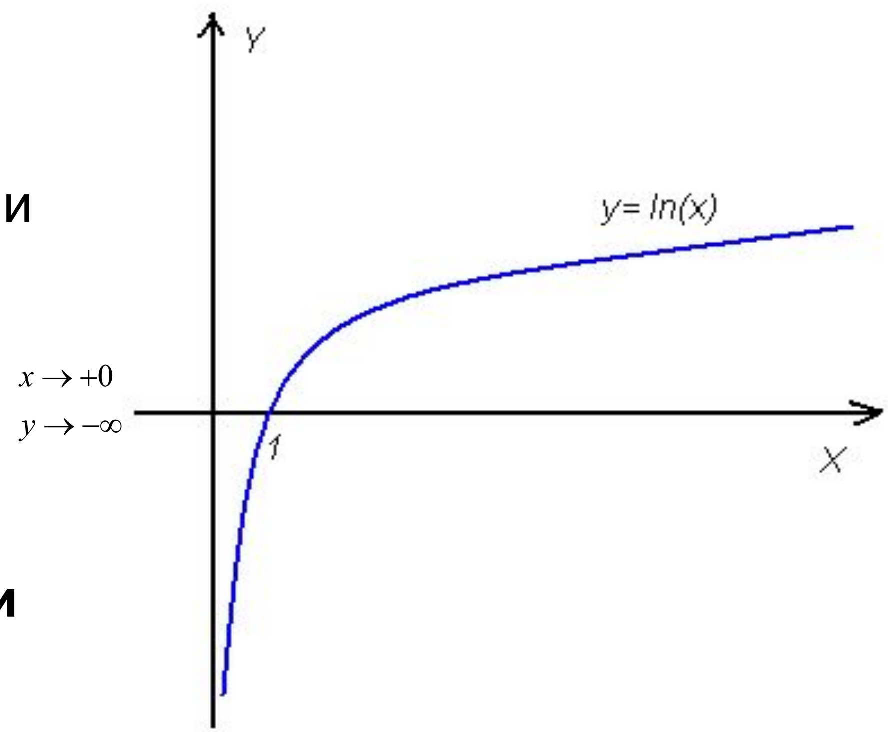
- Прямая называется **асимптотой** графика функции, если расстояние от текущей точки графика кривой до прямой стремится к нулю при удалении точки в бесконечность



Нахождение вертикальной асимптоты

- Вертикальная прямая **X=Xo** является вертикальной асимптотой графика функции **y=f(x)**, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности, т.е.

Xo – точка разрыва функции



$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{x \to x_0 - 0} y(x) = \pm\infty \\ &\lim_{x \to x_0 + 0} y(x) = \pm\infty \end{aligned}}$$

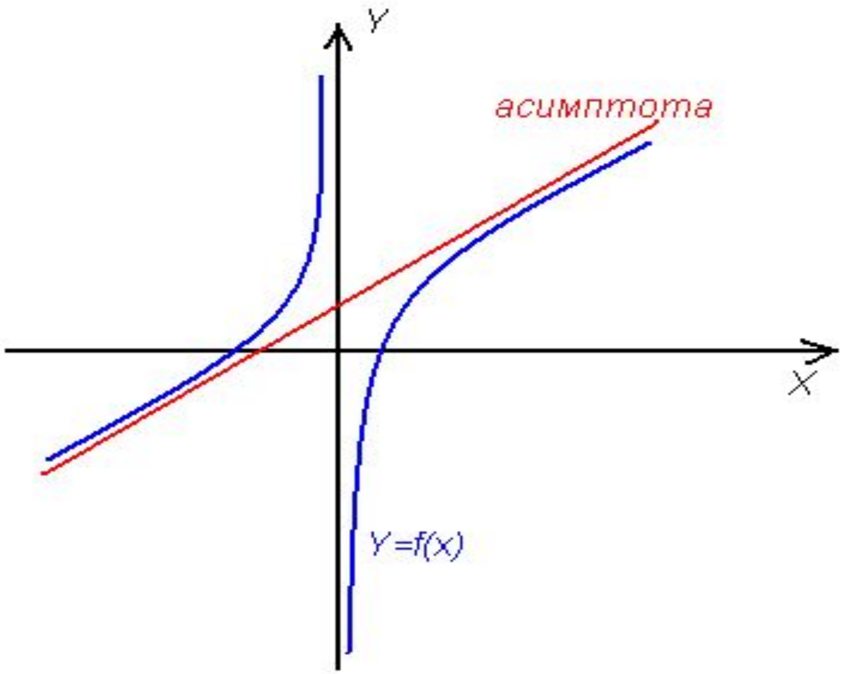
$$x \to +0$$
$$y \to -\infty$$

Нахождение наклонной асимптоты y=kx+b

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b$$

- Если $\mathbf{k=0}$, то $\mathbf{y}=\boldsymbol{b}$ уравнение горизонтальной асимптоты графика функции.



$$y=\frac{x^2+2x-1}{x}$$

Экстремумы функции и монотонность

- **Монотонность** – характеристика поведения функции, т.е. её возрастание или убывание на определенных интервалах.
- **Монотонность** функции определяется знаком первой производной.
- Функция называется **возрастающей** на [a; b], если **большему** значению аргумента **соответствует большее** значение функции. Если $\mathbf{y'(x) > 0}$, то $\mathbf{y(x)}$ **возрастает**.
- Функция называется **убывающей** на [a; b], если **большему** значению аргумента **соответствует меньшее** значение функции. Если $\mathbf{y'(x) < 0}$, то $\mathbf{y(x)}$ **убывает**.

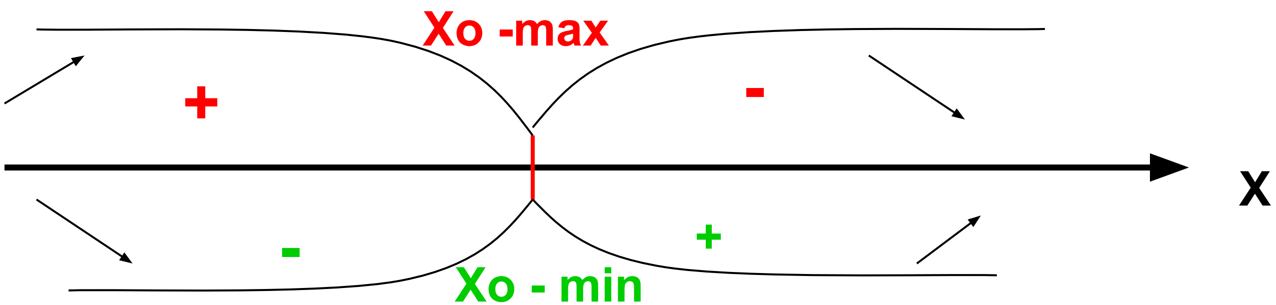
Необходимое и достаточное условия существования экстремума

Для того, чтобы непрерывная в точке Xo функция $y=f(x)$ имела в точке Xo экстремум

- **необходимо**: $\mathbf{y'(x_0)=0}$

  $\mathbf{y'(x_0)}= \infty$ или не существовала

- **достаточно**: производная $y'(x_0)$ меняла знак при переходе через x_0

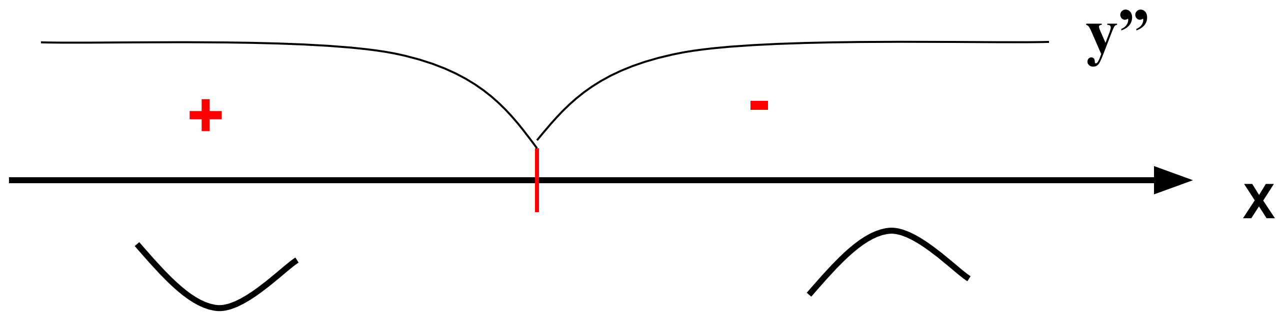


Точки перегиба. Интервалы выпуклости и вогнутости.

Если **$y''(x_0)=0$, то** Хо является точкой перегиба графика функции $y=f(x)$

Если **$y''(x_0)<0$, то** график функции имеет выпуклость вверх.

Если **$y''(x_0)>0$, то** график функции имеет выпуклость вниз.



Анализ свойств функции

- Четность – нечетность.
  - График четной функции симметричен относительно оси ***OY*.**
  - График нечетной функции симметричен относительно начала координат**.**
- Периодичность.

Точки пересечения с осями координат

- x=0 y=0
- Значение функции в точках экстремума.
- Значение функции в точках перегиба.