Тема: «Игры с природой»

Игры с природой

Игра с природой - это парная матричная игра, в которой сознательный игрок ***А*** (статистик) выступает против участника, совершенно безразличного к результату игры, называемого ***природой.***

Эти игры обладают некоторыми особенностями по сравнению с рассмотренными парными матричными играми. Например, при их решении достаточно найти оптимальное решение только для статистика ***А,*** так как природа в рекомендациях не нуждается, развиваясь в соответствии с определенными законами независимо от того, удобно это статистику или нет.

Игры с природой

Пусть статистик использует стратегии A_1, A_2, ..., $\boldsymbol{A_m}$, а природа обладает стратегиями $\boldsymbol{П_1}$, $\boldsymbol{П_2}$, ..., $\boldsymbol{П_n}$. Если статистик имеет возможность оценить последствия применения каждой своей чистой стратегии $\boldsymbol{A_i}$ в зависимости от любой стратегии природы $\boldsymbol{П_k}$, т.е. если ему известен численный результат $\boldsymbol{a_{ik}}$ для каждой допустимой комбинации **($A_iП_k$),**то игру можно задать платежной матрицей (табл. 1).

Игры с природой

В последнем столбце табл. 1 приведены минимально возможные выигрыши статистика α_i при стратегии ***A**$_i$*, а в последней строке - максимально возможный выигрыш статистика β_k при состоянии ***П**$_к$*.

	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	α_2
…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	α_m
β_k	β_1	β_2	…	β_n	

Таблица 1

Игры с природой

Помимо матрицы платежей **(a_{ik})**, приведённой в табл.1, для анализа игры с природой используется также матрица рисков статистика.

Риском статистика **r_{ik}** называют разность между максимальным выигрышем $\max\limits_{i} a_{ik}$, который он мог бы получить, достоверно зная, что природа реализует состояние **$П_к$**, и тем выигрышем **a_{ik}**, который он получит, используя стратегию **A_i**, не зная, какое состояние **$П_к$** природа реализует:

$$r_{ik} = \max_{i} a_{ik} - a_{ik} = \beta_k - a_{ik} \geq 0 \qquad (1)$$

Игры с природой

Для анализа игры с природой часто используются средние значения рисков $\overline{r_i}$ и средние значения выигрыша $\overline{a_i}$, которые вычисляются по формулам:

$$\overline{r_i} = \sum_{k=1}^{n} r_{ik} q_k \quad , \text{где } i=1,2,\ldots,m \qquad (2)$$

$$\overline{a_i} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} q_k \quad , \text{где } i=1,2,\ldots,m \qquad (3)$$

Игры с природой

В этих формулах введена вероятность q_k наступления события $П_к$. Таким образом, матрица рисков статистика имеет

	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$	$\overline{r}_i$
A_1	r_{11}	r_{12}	…	r_{1n}	$\overline{r}_1$
A_2	r_{21}	r_{22}	…	r_{2n}	$\overline{r}_2$
…	…	…	…	…	…
A_m	r_{m1}	r_{m2}	…	r_{mn}	$\overline{r}_m$
q_k	q_1	q_2	…	q_n	

Таблица 2

Игры с природой

С учетом формулы (3) табл. 1 можно записывать также в виде табл. 3.

	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$	$\overline{a}_i$
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	$\overline{a}_1$
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	$\overline{a}_2$
…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	$\overline{a}_m$
q_k	q_1	q_2	…	q_n	

Таблица 3

Игры с природой

Перед тем как переходить к выбору оптимальной стратегии, нужно сравнить нижнюю и верхнюю чистые цены. В случае неравенства этих цен при возможности упрощают платежную матрицу, учитывая доминирование стратегий статистика. Отбрасывать те или иные состояния природы нельзя, так как она может реализовать свои состояния независимо от того, выгодны они статистику или нет. К матрице рисков обычно переходят после упрощения платежной матрицы.

Критерии Байеса, Лапласа, Сэвиджа, Вальда, Гурвица.

При поиске оптимальных решений обычно используют различные критерии, дающие некоторую схему принятия решений. Рассмотрим некоторые из них.

Критерий Байеса.

При использовании критерия Байеса статистику известны вероятности q_k наступления события $\Pi_к$. Обычно вероятности q_k определяются путем проведения экспериментов. Такие вероятности называются *апостериорными.* В качестве оптимальной по критерию Байеса принимается чистая стратегия A_i, при которой средний выигрыш статистика $\bar{a}_i$, становится максимальным.

Критерий Лапласа.

Критерий Лапласа отличается от критерия Байеса тем, что апостериорные вероятности неизвестны. Тогда их принимают равными и рассчитывают по формуле

$$q_k = \frac{1}{n}$$

Критерий Сэвиджа.

Этот критерий является критерием крайнего пессимизма, т. е. статистик исходит из предположения, что природа действует против него наихудшим образом. Критерий Сэвиджа рекомендует выбирать в качестве оптимальной ту чистую стратегию A_i, при которой максимальный риск является минимальным. Такой риск называется ***минимаксом*** и рассчитывается по формуле:

$$r = \min_i \max_k r_{ik}$$

Критерий Вальда.

Как и критерий Сэвиджа, критерий Вальда является критерием крайнего пессимизма. Поэтому статистик выбирает такую чистую стратегию $\boldsymbol{A_i}$, при которой наименьший выигрыш будет максимальным. Этот выигрыш называется ***максимином*** и вычисляется по формуле:

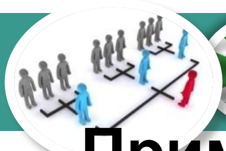
$$\alpha = \max_i \min_k a_{ik}$$

Критерий Гурвица.

Этот критерий является критерием пессимизма-оптимизма и рекомендует применять нечто среднее. В этом случае статистик выбирает такую чистую стратегию A_i, для которой справедливо условие:

$$\max_i \left(\gamma \min_k a_{ik} + (1-\gamma) \max_k a_{ik}\right)$$

где **γ=0÷1** выбирается из субъективных соображений. При **γ = 1** Критерий Гурвица преобразуется в критерий Вальда.



Критерии Байеса, Лапласа, Сэвиджа, Вальда, Гурвица.

Пример 1. Создается таможенно-логистический терминал (ТЛТ) для размещения товаров и транспортных средств (ТиТС), находящимися под таможенным контролем. Для простоты принимаем, что поток заявок ТиТС, размещаемых на хранение выражается числами 2, 4, 6 и 8 тыс. заявок в год. Из опыта известно, что прибыль от размещения ТиТС на хранение одной единицы груза составляет 9 ден. ед. в год. Потери, вызванные отказом в размещении в силу недостатка пропускной способности ТЛТ, - 5 ден. ед. Убытки от простоя ТЛТ при отсутствии заявок на размещение ТиТС - 6 ден. ед. за каждую заявку.

Дать информацию о пропускной способности создаваемого ТЛТ, используя приведенные критерии.

Решение.

В качестве игрока ***А*** здесь выступает орган, принимающий решение о пропускной способности создаваемого ТЛТ. Его чистыми стратегиями являются:

A_1— открытие ТЛТ с пропускной способностью 2 тыс. заявок на размещение ТиТС в год;

A_2— открытие ТЛТ с пропускной способностью 4 тыс. заявок на размещение ТиТС в год;

A_3— открытие ТЛТ с пропускной способностью 6 тыс. заявок на размещение ТиТС в год;

A_4— открытие ТЛТ с пропускной способностью 8 тыс. заявок на размещение ТиТС в год.

Вторым игроком выступает совокупность всех обстоятельств, в которых формируется поток грузов, перемещаемых через таможенную границу и соответственно заявок на размещение ТиТС на ТЛТ, т.е. природа ***П***. Природа может реализовать любое из четырех состояний:

$\boldsymbol{П_1}$ — поток составит 2 тыс. заявок в год;
$\boldsymbol{П_2}$ — поток составит 4 тыс. заявок в год;
$\boldsymbol{П_3}$ — поток составит 6 тыс. заявок в год;
$\boldsymbol{П_4}$ — поток составит 8 тыс. заявок в год.

Критерии Байеса, Лапласа, Сэвиджа, Вальда, Гурвица.

Вычислим выигрыши a_{ik} игрока A при любых сочетаниях обстоятельств (A_i, $П_k$). Наиболее благоприятными будут ситуации, когда количество поступивших заявок совпадает с возможностями ТЛТ.

Для комбинации (A_1, $П_1$) прибыль составит a_{11}=2*9 = 18 тыс. ден. ед., для комбинации (A_2, $П_2$) имеем a_{22}=4*9 = 36 тыс. ден. ед. и т.д.

Для случая (A_1, $П_2$) в ТЛТ можно разместить 2 тыс. товаров, а заявок поступило 4 тыс. Потери при этом составят 2*5=10 тыс. ден. ед., а общая прибыль a_{12}=2*9-2*5=8 тыс. ден. ед.

Для случая (A_2, $П_1$) в ТЛТ можно разместить 4 тыс. товаров и транспортных средств, а заявок поступило 2 тыс. Потери при этом составят 2*6 = 12 тыс. ден. ед., а общая прибыль a_{21}=18-12 = 6 тыс. ден. ед. Аналогично находятся другие элементы платежной матрицы. Результаты расчетов представлены в табл. 4.

Из табл. 4 следует, что нижняя чистая цена игры

$$\alpha = \max_i \min_k a_{ik} = 6$$

а верхняя чистая цена игры

$$\beta = \min_i \max_k a_{ik} = 18$$

Так как α ≠ β, то игра не содержит седловой точки. Доминирующих стратегий у статистика нет.

Критерий Байеса.

Пусть известны вероятности $\boldsymbol{q_k}$ состояния природы $\boldsymbol{П_к}$. В табл. 4 эти вероятности обозначены как $q_k^Б$. По формуле (3) находим значения средних выигрышей $\bar{a}_i^Б$. Эти значения приведены в седьмом столбце табл. 4. В качестве оптимальной по критерию Байеса принимается чистая стратегия $\boldsymbol{A_3}$ (открытие ТЛТ с пропускной способностью на 6 тыс. заявок в год), при которой средний выигрыш статистика $\bar{a}_i^Б = 29{,}5$

Критерии Байеса, Лапласа, Сэвиджа, Вальда, Гурвица.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	$П_1(2)$	$П_2(4)$	$П_3(6)$	$П_4(8)$	α_i	$\bar{a}_i^{Б}$	$\bar{a}_i^{Л}$	$0,8\alpha_i$	δ_i	$0,2\delta_i$	h_i
$A_1(2)$	18	8	-2	-12	-12	3,5	3	-9,6	18	3,6	-6
$A_2(4)$	6	36	26	16	6	23,5	21	4,8	36	7,2	12
$A_3(6)$	-6	24	54	44	-6	29,5	29	-4,8	54	10,8	6
$A_4(8)$	-18	12	42	72	-18	25,5	27	-14,4	72	14,4	0
β_i	18	36	54	72							
$q_k^{Б}$	0,2	0,35	0,25	0,2							
$q_k^{Л}$	0,25	0,25	0,25	0,25							

Таблица 4

Здесь использованы следующие обозначения:

$$h_i = \gamma \min_k a_{ik} + (1-\gamma)\max_k a_{ik}$$

Критерий Лапласа.

По этому критерию вероятности принимаются равными и рассчитывают по формуле:

$$q_{\mathrm{k}}^{Л} = \frac{1}{\mathrm{n}} = \frac{1}{4} = 0,25$$

В качестве оптимальной по критерию Лапласа также принимается чистая стратегия ***А₃***, при которой средний выигрыш статистика:

$$\bar{\mathrm{a}}_i^{Л} = 29$$

Критерий Сэвиджа.

Для анализа игры по этому методу построим матрицу рисков. Для расчетов используются формулы (1), (2). Результаты расчетов представлены в табл. 5.

Как следует из табл. 5, минимальный из всех максимальных рисков равен $r = \min\limits_{i} \max\limits_{k} r_{ik} = 28$. Этот риск соответствует чистой стратегии A_3 (открытие ТЛТ с пропускной способностью на 6 тыс. заявок в год).

Критерии Байеса, Лапласа, Сэвиджа, Вальда, Гурвица.

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$\max\limits_{k} r_{ik}$
A_1	0	28	56	84	84
A_2	12	0	28	56	56
A_3	24	12	0	28	28
A_4	36	24	12	0	36

Таблица 5

Критерий Вальда.

Из табл. 4 видно, что нижняя чистая ц $\alpha = \max_{i} \min_{k} a_{ik} = 6$. Эта цена соответствует чистой стратегии ***A*$_2$** (открытие ТЛТ с пропускной способностью на 4 тыс. заявок в год).

Критерий Гурвица.

Положим γ = **0,8.** Рассчитываем по формуле $\delta_i = \max \boldsymbol{a_{ik}}$ (см. столбец 10 табл. 4). Затем, используя данные столбцов 6 и 10 табл. 4, проводим расчет по формуле

$$h_i = 0{,}8 \min_k a_{ik} + 0{,}2 \max_k a_{ik}.$$

Результат представлен в столбце 12 табл. 4.

Значение $\max_i (\gamma \min_k a_{ik} + (1-\gamma) \max_k a_{ik}) = 12$ и соответствует стратегии $\boldsymbol{A_2}$ (открытие ТЛТ с пропускной способностью на 4 тыс. заявок в год).

ТЕМА:
«Принятие решений в условиях неопределенности или частичной неопределенности»

неопределенности или частичной

В любой экономической деятельности мы неизбежно сталкиваемся с неопределенностью, неоднозначностью показателей затрат и отдачей. В связи с этим возникает проблема измерения риска и его влияние на результаты финансовых операций.

Возможность отклонения финансового результата от ожидаемых или средних значений говорит о наличии риска. И чем больше это отклонение, тем выше риск.

Проблема определения степени риска возникает всякий раз, когда необходимо выбрать некоторый вариант решения с заранее неопределенными последствиями.

Принятие решений в условиях неопределенности или частичной неопределенн...

Если необходимая информация о вероятностях будущих исходов финансовых операций отсутствует, решение принимается в ситуации неопределенности. Критерии принятия решений в ситуации неопределенности основываются на теории игр.

В ситуации неопределенности мы можем воспользоваться сразу несколькими критериями и остановиться на той финансовой операции, которую выбрали в качестве оптимальной большинство критериев.

Пример 2.

Пусть следует выбрать одну из четырех стратегий тарифной политики по условной товарной группе. В будущем возможны четыре варианта развития событий, в каждом из которых государство получит в соответствии с выбранной стратегией определенный объем таможенных платежей. Возможные таможенные платежи в зависимости от состояния рынка указаны в тыс. у.е. в табл. 6.

неопределенности или частичной

Стратегии	Создание рынка			
	1	2	3	4
1	3500	2500	8500	1000
2	1500	5000	7000	2000
3	4200	2700	6200	2500
4	3500	1700	6800	1500

Таблица 6

Найдем оптимальную стратегию по критериям Вальда, Сэвиджа, Гурвица (с параметром α=0,4) и Лапласа.

неопределенности или частичной

Решение.

1. Применим критерий Вальда. Построим матрицу выплат.

$$A = \begin{pmatrix} 3500 & 2500 & 8500 & 1000 \\ 1500 & 5000 & 7000 & 2000 \\ 4200 & 2700 & 6200 & 2500 \\ 3500 & 1700 & 6800 & 1500 \end{pmatrix}$$

Найдем наименьшие выплаты по каждой финансовой операции, т.е. α_i (поместим их в дополнительном столбце справа).

$$A = \begin{pmatrix} 3500 & 2500 & 8500 & 1000 \\ 1500 & 5000 & 7000 & 2000 \\ 4200 & 2700 & 6200 & 2500 \\ 3500 & 1700 & 6800 & 1500 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1000 \\ 1500 \\ 2500 \\ 1500 \end{matrix}$$

Найдем среди элементов дополнительного столбца максимум: α=2500. Таким образом оптимальной стратегией по критерию Вальда является выбор третьей стратегии тарифной политики.

Принятие решений в условиях неопределенности или частичной неопределенности

1. Применим критерий Сэвиджа. Для этого построим матрицу рисков, используя формулу(1).

$$R = \begin{pmatrix} 700 & 2500 & 0 & 1500 \\ 2700 & 0 & 1500 & 500 \\ 0 & 2300 & 2300 & 0 \\ 700 & 3300 & 1700 & 1000 \end{pmatrix}$$

Критерий Сэвиджа рекомендует выбирать в качестве оптимальной ту чистую стратегию, при которой максимальный риск является минимальным.

$$R = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 700 & 2500 & 0 & 1500 \\ 2700 & 0 & 1500 & 500 \\ 0 & 2300 & 2300 & 0 \\ 700 & 3300 & 1700 & 1000 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 2500 \\ 2700 \\ 2300 \\ 3300 \end{array}$$

Найдем среди элементов дополнительного столбца минимум: r=2300. Таким образом, оптимальной стратегией по критерию Сэвиджа является выбор третьей стратегии тарифной политики.

неопределенности или частичной

3. Применим критерий Гурвица с параметром α=0,4.

$$A = \begin{pmatrix} 3500 & 2500 & 8500 & 1000 & 1000 & 8500 & 5500 \\ 1500 & 5000 & 7000 & 2000 & 1500 & 7000 & 4800 \\ 4200 & 2700 & 6200 & 2500 & 2500 & 6200 & 4720 \\ 3500 & 1700 & 6800 & 1500 & 1500 & 6800 & 4680 \end{pmatrix}$$

Таким образом, оптимальной стратегией по критерию Гурвица является выбор первой стратегии тарифной политики.

неопределенности или частичной

4. Применим критерий Лапласа. Найдем средние платежи по каждой стратегии.

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3500 & 2500 & 8500 & 1000 \\ 1500 & 5000 & 7000 & 2000 \\ 4200 & 2700 & 6200 & 2500 \\ 3500 & 1700 & 6800 & 1500 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 3875 \\ 3875 \\ 3900 \\ 3375 \end{array}$$

Оптимальной стратегией по критерию Лапласа является выбор третьей стратегии тарифной политики.

Ответ: три критерия из четырех указывают на третью стратегию как на оптимальную, поэтому лицу, принимающему решение следует выбрать эту стратегию.