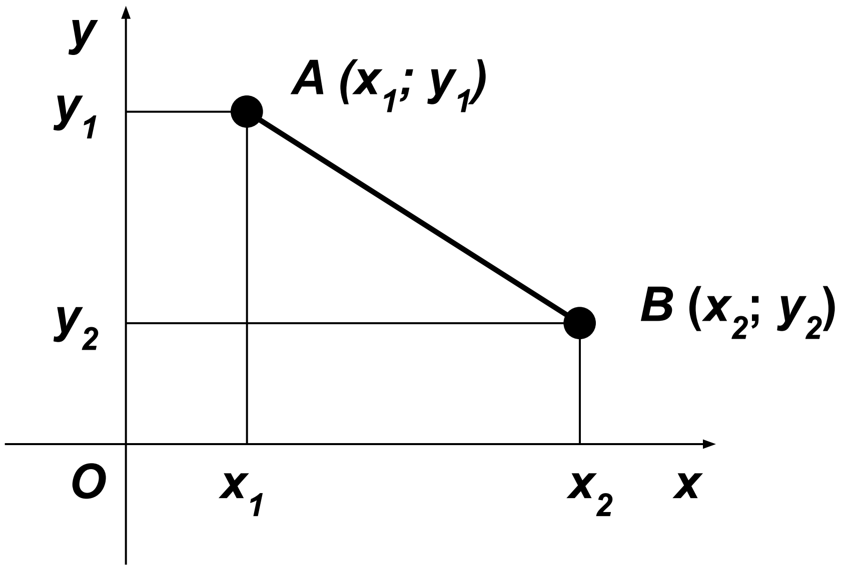
Координатный метод

Геометрия
9класс

Расстояние между точками

Рассмотрим вопрос о нахождении расстояния между точками, если известны их координаты. Пусть на плоскости выбрана прямоугольная система координат и известны координаты точек ***A*** и ***B*** в этой системе координат: ***A*** **(*x_1*; *y_1*)** и ***B*** **(*x_2*; *y_2*)**. Тогда расстояние ***d*** **(*A*, *B*) = *AB*** между точками ***A*** и ***B*** можно найти по формуле

$$\boxed{d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

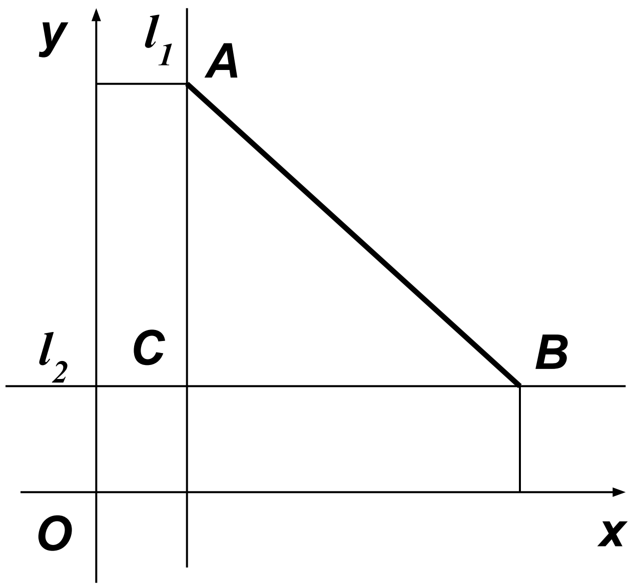


Докажем формулу $d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ для случая, когда $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$, т. е. когда отрезок ***AB*** не параллелен ни одной из координатных осей. Пусть ***C*** – точка пересечения прямых l_1 и l_2, которые проходят через точки ***A***, ***B*** соответственно и параллельны осям ***Oy***, ***Ox***. Рассмотрим прямоугольный треугольник ***ABC***. Длины сторон ***AC*** и ***BC*** равны: ***AC =*** $|x_2-x_1|$, ***BC =*** $|y_2-y_1|$. Тогда по теореме Пифагора

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$$

или

$$d(A,B)=\sqrt{|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$



Заметим, что формула $d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ верна и для случаев:

а) $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$ (отрезок параллелен оси ***Oy***, рисунок 1);
б) $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$ (отрезок параллелен оси ***Ox***, рисунок 2);
в) $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ (точки ***A*** и ***B*** совпадают).

В случае а) $d(A, B) = AB = \sqrt{(y_2-y_1)^2} = |y_2-y_1|$.

В случае б) $d(A, B) = AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2} = |x_2-x_1|$.

Если точки ***A*** и ***B*** совпадают, то $d(A, B) = 0$.

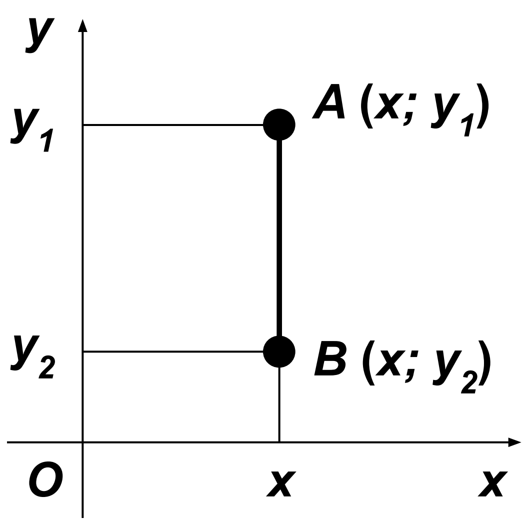


Рис. 1

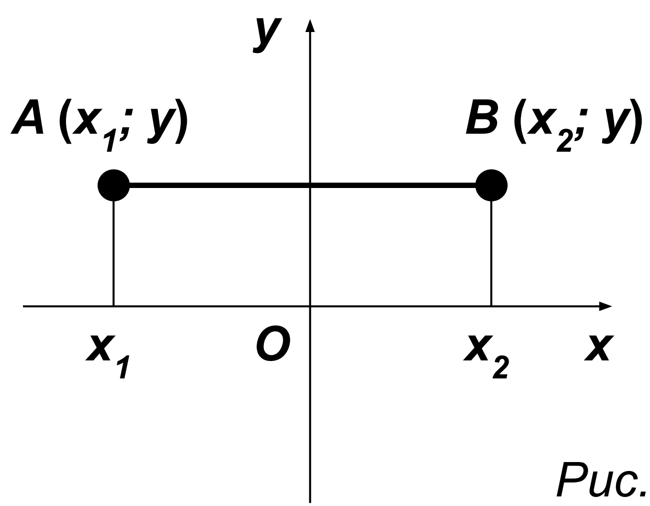


Рис. 2

Рассмотрим пример.

Пусть необходимо вычислить площадь квадрата ***ABCD***, две вершины которого имеют координаты ***A* (8; 8)** и ***B* (5; 5)**. Площадь квадрата равна квадрату длины стороны.

Следовательно, $\boldsymbol{S_{ABCD} = AB^2}$. Для вычисления длины стороны ***AB*** воспользуемся формулой расстояния между двумя точками

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

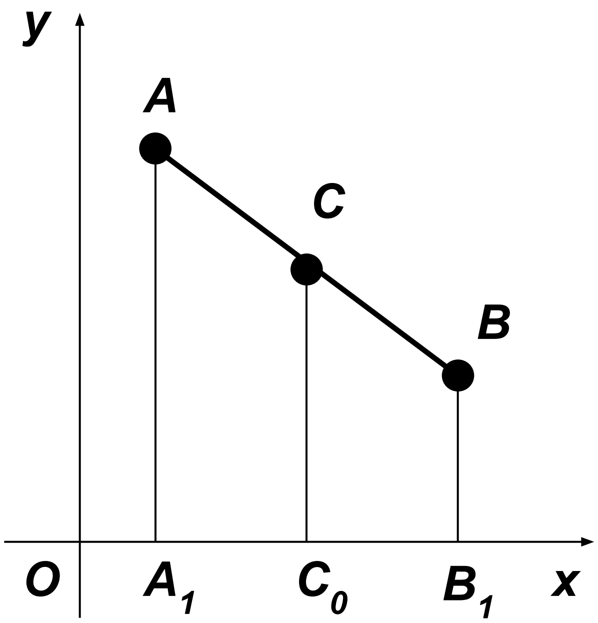
$$AB = \sqrt{(8-5)^2 + (8-5)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}.$$

Таким образом, площадь квадрата $\boldsymbol{S_{ABCD}}$ ***= AB = 18 кв. ед***.

Ответ: 18 кв. ед.

Координаты середины отрезка

Рассмотрим вопрос о вычислении координат середины отрезка, если известны координаты концов этого отрезка.



Пусть ***A*** (x_1; y_1) и ***B*** (x_2; y_2) – произвольные точки плоскости, а точка ***C*** (x_0; y_0) – середина отрезка ***AB***. Найдем координаты x_0 и y_0.

Найдем координату x_0.

1) Пусть отрезок ***AB*** не параллелен оси ***Oy***, т. е. $x_1 \neq x_2$. Проведем через точки ***A***, ***B*** и ***C*** прямые, параллельные оси ***Oy***, которые пересекают ось ***Ox*** в точках A_1 (x_1; 0), B_1 (x_2; 0) и C_0 (x_0; 0) соответственно. Тогда по теореме Фалеса точка C_0 (x_0; 0) – середина отрезка A_1B_1, т. е. $A_1C_0 = C_0B_1$ или $|x_0 - x_1| = |x_0 - x_2|$. Отсюда следует, что либо $x_0 - x_1 = x_0 - x_2$, либо $x_0 - x_1 = -(x_0 - x_2)$. Так как $x_1 \neq x_2$, то первое равенство невозможно, а значит, верно второе равенство, из которого получаем, что

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

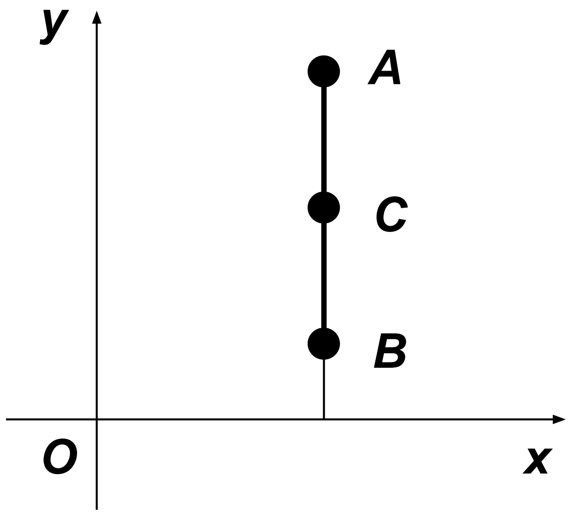


Рис. 1

2) Пусть отрезок ***AB*** параллелен оси ***Oy***, т. е. $x_1 = x_2$. В этом случае все точки A_1, B_1, C_0 имеют одну и ту же абсциссу, а следовательно, формула

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

верна и в этом случае (рис. 1).

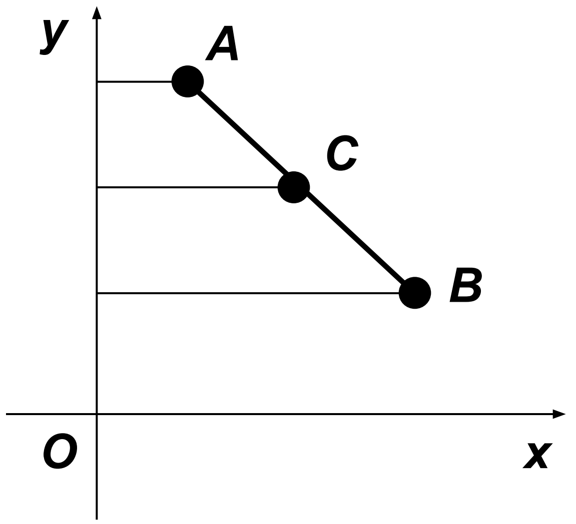
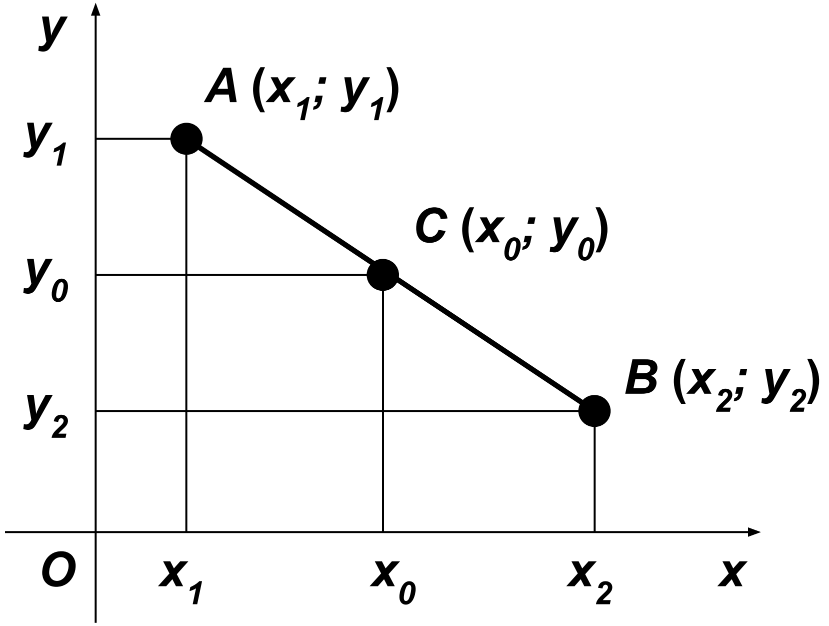


Рис. 2

Координата y_0 точки C_0 находится аналогично. В этом случае рассматриваются прямые, параллельные оси ***Ox*** (рис. 2), а соответствующая формула имеет вид

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$



Середина ***C*** отрезка ***AB***, где ***A*** **(x_1; y_1)**, ***B*** **(x_2; y_2)**:

$$C(x_0; y_0)$$

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Задача. Концами отрезка служат точки ***A*** **(*–8; –5*)**, ***B*** **(*10; 4*)**. Найдите координаты точек ***C*** и ***D***, которые делят отрезок ***AB*** на три равные части.

Решение.

Пусть точки ***C*** и ***D*** имеют координаты $(x_C; y_C)$ и $(x_D; y_D)$.

1) *Найдем абсциссы точек* ***C*** *и* ***D***.

Так как точка ***C*** – середина отрезка ***AD***, то выполняется равенство

$$x_C = \frac{x_D - 8}{2},$$

так как точка ***D*** – середина отрезка ***CB***, то

$$x_D = \frac{10 + x_C}{2}.$$

Решив систему $\begin{cases} 2x_C = x_D - 8, \\ 2x_D = 10 + x_C, \end{cases}$

находим $x_C = -2$, $x_D = 4$.

2) *Найдем ординаты точек* ***C*** *и* ***D***.

Для нахождения ординат точек ***C*** и ***D*** воспользуемся равенствами

$$y_C = \frac{y_D - 5}{2}; \qquad y_D = \frac{y_C + 4}{2}.$$

Решив систему

$$\begin{cases} 2y_C = y_D - 5, \\ 2y_D = y_C + 4, \end{cases}$$

находим $y_C = -2$, $y_D = 1$.

Ответ: *C* (–2; –2), *D* (4; 1).

Заключение

Суть координатного метода заключается в том, что введение системы координат позволяет записать условие задачи в координатах и решать ее, используя знания по алгебре.