Лекция 14. Спектральная эффективность MIMO-системы

- MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) – система с АР на обоих концах линии связи.
- MIMO система - эффективное средство для борьбы с замираниями сигналов и увеличения скорости передачи информации.
- Два класса MIMO систем:

  - **MIMO-системы без обратной связи**. На передающей стороне отсутствует информация о матрице коэффициентов передачи **H** (передатчик «не знает» канал). Только прием сигналов является адаптивным (согласованным) со случайным пространственным каналом;

  - **MIMO-системы с обратной связью от приемника к передатчику**. Передатчик обладает информацией о канальной матрице **H** (передатчик «знает» канал). Возможна адаптивная пространственная обработка сигналов не только на прием, но и на передачу.

СЭ (шенноновская пропускная способность) – максимально возможное число бит, которые можно передать без ошибки за одну секунду в единичной полосе частот.

СЭ зависит от статистических свойств пространственного канала, средней мощности и числа передающих и приемных антенн.
СЭ не зависит от способа кодирования и модуляции данных.

1. Спектральная эффективность MIMO-системы без обратной связи

MIMO-система с M передающими и N приемными антеннами.
D$=[d_1, d_2,\ldots,d_M]^T$ - M-мерный вектор передаваемого пространственного символа.
Средняя мощность передаваемых сигналов d_i равна единице $<|d_i|^2>=1$

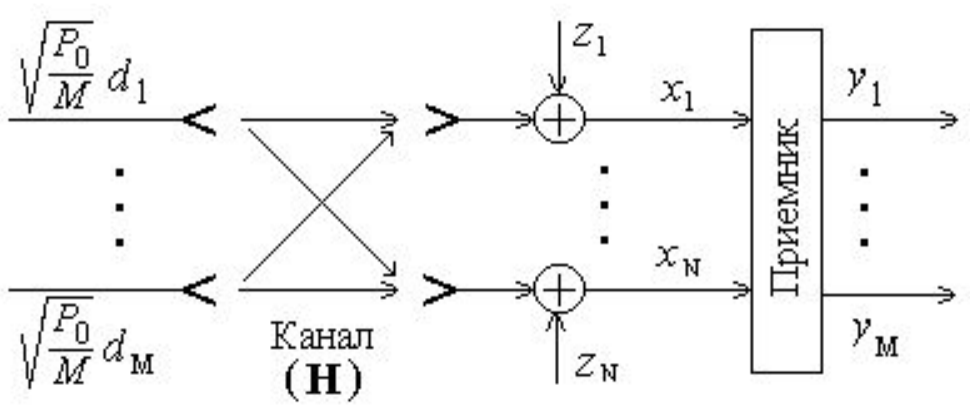
Коэффициенты передачи h_{nm} сигналов из m-ой передающей антенны в n-ую приемную антенну образуют канальную матрицу **H** размерности $N\times M$.

Нормировка: $<|h_{nm}|^2>=1$

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1M} \\ h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2M} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{N1} & h_{N2} & \ldots & h_{NM} \end{pmatrix},$$

Передатчик не «знает» канальную матрицу **H**.
Распределение мощности между M антеннами должно быть равномерным.

Сигнал в p-ой антенне $$x_p=\sqrt{P_0/M}\sum_{q=1}^{M} h_{pq}d_q+z_p$$



MIMO-система с параллельной передачей данных (передатчик «не знает» канал)

X – *M*-мерный вектор сигналов на выходе приемных устройств
H – канальная матрица коэффициентов передачи между антеннами размерности $N \times M$
D – *M*-мерный вектор переданных сигналов
Z – *N*-мерный вектор гауссовых шумов

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1M} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{N1} & h_{N2} & \dots & h_{NM} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_M \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_N \end{pmatrix}$$

Вектор **X** сигналов на выходе приемных устройств $\mathbf{X} = \sqrt{P_0/M}\,\mathbf{HD} + \mathbf{Z}$

Компоненты вектора **X** - случайные комплексные гауссовы величины с совместной плотностью вероятности

$$p(\mathbf{X}) = \frac{1}{\det(\pi \mathbf{R_X})} \exp(-\mathbf{X}^H \mathbf{R_X}^{-1} \mathbf{X})$$

$$\mathbf{R}_X = <\mathbf{XX}^H> = \begin{pmatrix} <x_1 x_1^*> & <x_1 x_2^*> & \dots & <x_1 x_M^*> \\ <x_2 x_1^*> & <x_2 x_2^*> & \dots & <x_2 x_M^*> \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ <x_N x_1^*> & <x_N x_2^*> & \dots & <x_N x_M^*> \end{pmatrix}$$

- корреляционная матрица

Найдем энтропию N-мерного вектора $\mathbf{X}$ $\qquad H(\mathbf{X}) = <-\log_2 p(\mathbf{X})>$

Последовательно имеем, что

$$H(\mathbf{X}) = < \{\log_2[\det(\pi \mathbf{R}_{\mathbf{X}}) \exp(\mathbf{X}^H \mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{-1} \mathbf{X})]\} > = \log_2[\det(\pi \mathbf{R}_{\mathbf{X}})] + (\log_2 e) < (\mathbf{X}^H \mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{-1} \mathbf{X}) > .$$

Квадратичная форма $\qquad \mathbf{X}^H \mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{-1} \mathbf{X} = Sp(\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{-1} \mathbf{X}\mathbf{X}^H)$

$$\mathbf{X}^H \mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{-1} \mathbf{X} = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} x_p^* \left(\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{-1}\right)_{pq} x_q$$

$$Sp\left(\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{-1} \mathbf{X}\mathbf{X}^H\right) = \sum_{p=1}^{N} \left(\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{-1} \mathbf{X}\mathbf{X}^H\right)_{pp} = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} \left(\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{-1}\right)_{pq} \left(\mathbf{X}\mathbf{X}^H\right)_{qp} = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} \left(\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{-1}\right)_{pq} x_q x_p^*$$

Тогда $\quad < (\mathbf{X}^H \mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{-1} \mathbf{X}) > = < Sp(\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{-1} \mathbf{X}\mathbf{X}^H) > = Sp(\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{-1} < \mathbf{X}\mathbf{X}^H >) = Sp(\mathbf{I}_N) = N$

Учтем, что $\quad N \log_2 e = \log_2(e^N) = \log_2 \det(e\mathbf{I}_N)$

Получим $\quad H(\mathbf{X}) = \log_2\left[\det(\pi \mathbf{R}_{\mathbf{X}})\right] + \log_2\left[\det(e\mathbf{I})\right] = \log_2\left[\det(\pi \mathbf{R}_{\mathbf{X}}) \det(e\mathbf{I}_N)\right]$

Учтем, что $\quad \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{AB})$ $\qquad$ Получим $\quad H(\mathbf{X}) = \log_2\left[\det(\pi e \mathbf{R}_{\mathbf{X}})\right]$

СЭ C равна максимальному значению взаимной информации I(D,X) между входными и выходными векторами по всем возможным вероятностям $p(d_j)$ передаваемых символов

$$C = \arg\max_{p(d_j)} I(\mathbf{D}, \mathbf{X})$$

Максимум I(D,X) достигается, если вероятности $p(d_j)$ имеют гауссов вид

Неопределенность в выходном векторе **X** обусловлена собственным шумом.

Взаимная информация $I(\mathbf{D}, \mathbf{X}) = H(\mathbf{X}) - H(\mathbf{X}/\mathbf{D}) = H(\mathbf{X}) - H(\mathbf{Z})$

Средняя взаимная информация о сообщении (вектор **D**), которую можно извлечь из выходного сигнала (вектор **X**), равна разности энтропий **X** и **Z**.

Корреляционная матрица некоррелированных собственных шумов $\mathbf{R_Z} =< \mathbf{ZZ}^H >= \sigma_0^2 \mathbf{I}_N$

Энтропия N-мерного вектора **Z** $H(\mathbf{Z}) = \log_2[\det(\pi e \sigma_0^2 \mathbf{I}_N)] = \log_2(\pi e \sigma_0^2)^N$

Энтропия N-мерного вектора **X** $H(\mathbf{X}) = \log_2\left[\det(\pi e \mathbf{R_X})\right]$

Корреляционная матрица $\mathbf{R_X}$ входного процесса

$$\mathbf{R}_X =< \mathbf{XX}^H >=< (\sqrt{P_0/M}\,\mathbf{HD} + \mathbf{Z})(\sqrt{P_0/M}\,\mathbf{HD} + \mathbf{Z})^H >= P_0/M\ \mathbf{HR_D H}^H + \sigma_0^2 \mathbf{I}_N$$

СЭ MIMO-системы

$$C = \log_2[\det(\pi e \mathbf{R_X})] - \log_2[\det(\pi e \sigma_0^2 \mathbf{I}_N)] = \log_2\left[\det\left(\mathbf{I}_N + \frac{\rho_0}{M}\mathbf{H}\mathbf{R_D}\mathbf{H}^H\right)\right] \qquad \rho_0 = P_0 / \sigma_0^2$$

Передаваемые символы $d_1, d_2, \ldots d_M$ статистически независимы.
Корреляционная матрица $\mathbf{R_D} = \mathbf{I}_M$.

Можно показать, что СЭ MIMO-системы

$$C = \sum_{i=1}^{K} \log_2\left(1 + \frac{\rho_0}{M}\lambda_i\right)$$

K - ранг канальной матрицы **H**.

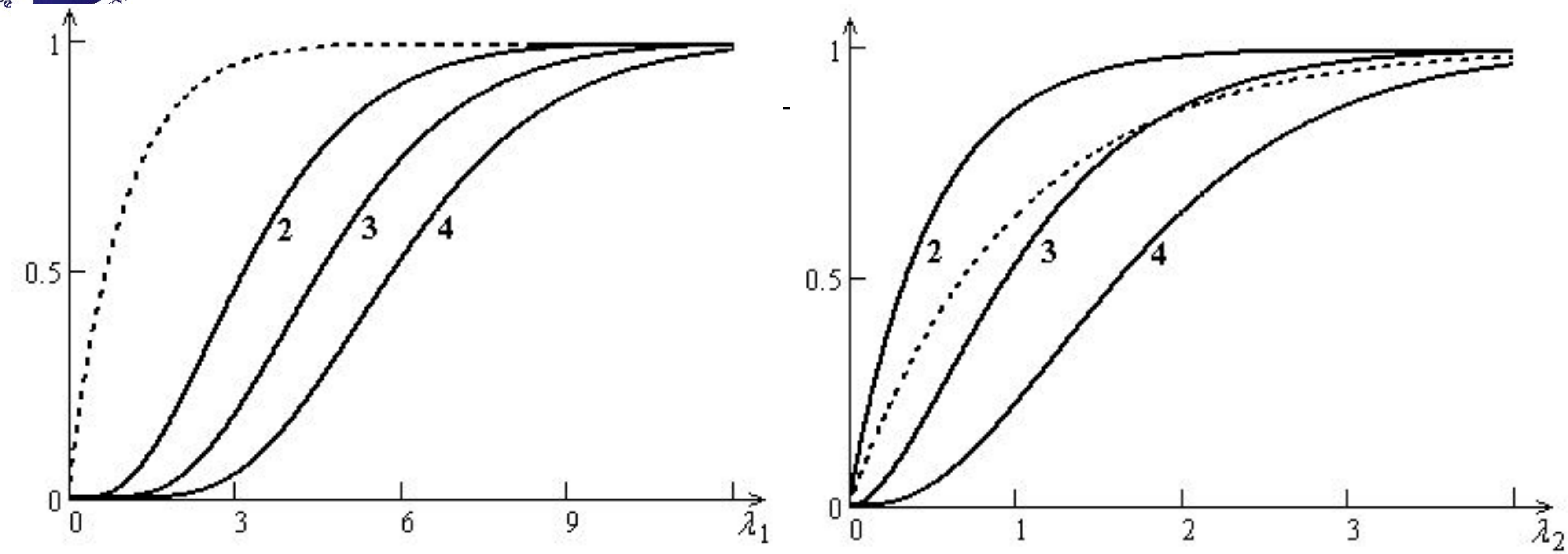
В общем случае, ранг $K \le min\{M,N\}$.
λ_i – собственные числа матрицы $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ ($M<N$) или матрицы $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ ($M>N$)
Собственные числа λ_i являются действительными, неотрицательными
K собственных чисел λ_i не равны нулю.
В условиях некоррелированных релеевских замираний сигналов матрица **H** имеет полный ранг $K = min\{M,N\}$
$min\{M,N\}$ собственных чисел λ_i не равны нулю

Релеевский некоррелированный канал

$$C = \sum_{i=1}^{\min(M,N)} \log_2\left(1 + \frac{\rho_0}{M}\lambda_i\right)$$

Частные случаи конфигурации MIMO-системы (релеевский некоррелированный канал)

M=2,3,4, N=4

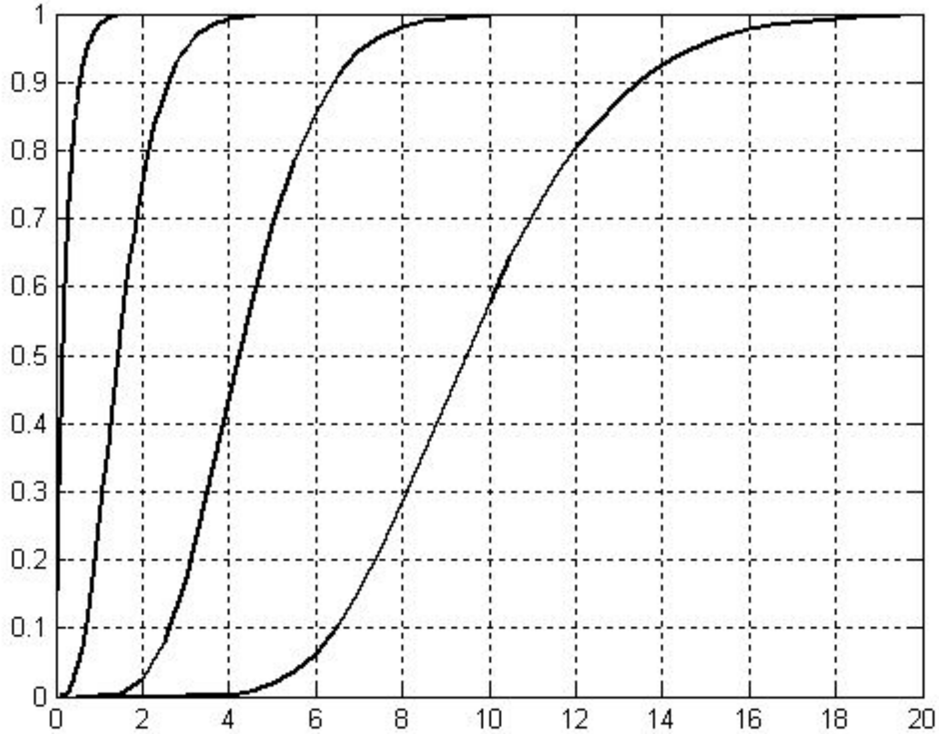


Интегральные функции распределения собственных чисел λ_1 (слева) и λ_2 (справа) и коэффициента $|h_{11}|^2$ (пунктир). N=2, M=2, 3, 4 (кривые 2, 3, 4, соответственно)

С ростом числа передающих (или приемных) антенн:

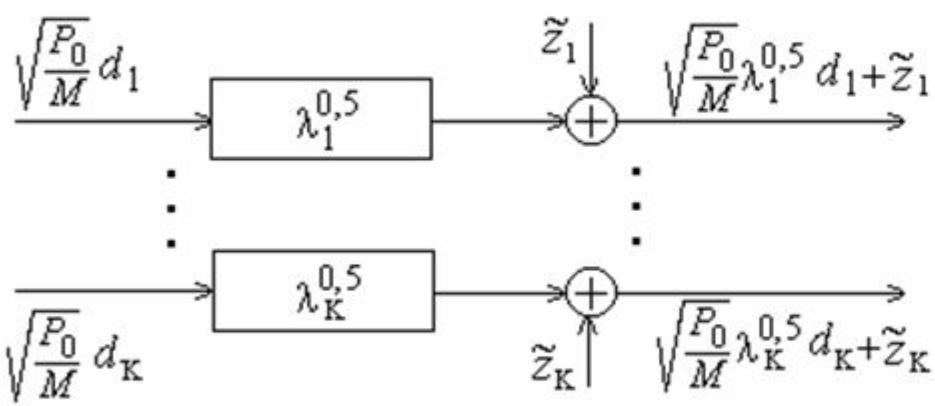
- функция распределения собственного числа λ_1 смещается в область больших значений. $\langle\lambda_1\rangle$ =3.5, 4.88 и 6.19 при M=2, 3, 4.
- функция распределения собственного числа λ_2 смещается в область больших значений. $\langle\lambda_2\rangle$ = 0.5, 1.13 и 1.81 при M=2, 3, 4.
- M=N=2. Собственное число λ_2 с большей вероятностью меньше коэффициента $|h_{11}|^2$,

M=4, N=4



Функции распределения собственных чисел λ_1, λ_2, λ_3 и λ_4 при M=N=4

Разброс собственных чисел увеличивается по сравнению со случаем M=N=2.



Эквивалентная схема MIMO-системы с параллельными подканалами

$$C = \sum_{i=1}^{M} \log_2 \left(1 + \frac{\rho_0}{M} \lambda_i \right)$$

СЭ MIMO системы равна сумме СЭ параллельных SISO подканалов.
В каждую подсистему распределяется одинаковая мощность P_0/M.
Канальный коэффициент усиления для *i*-й подсистемы равен собственному числу λ_i.

Частные случаи для некоррелированного релеевского канала.

$C(\rho_0, M, N) \quad \rho_0 = P_0 / \sigma_0^2$

1. Две передающие и одна приемная антенна (M=2, N=1):

$$C(\rho_0, 2, 1) = \log \left[1 + \frac{1}{2} \rho_0 \left(|h_{11}|^2 + |h_{12}|^2 \right) \right]$$

2. Одна передающая и две приемные антенны (M=1, N=2):

$$C(\rho_0, 1, 2) = \log \left[1 + \rho_0 \left(|h_{11}|^2 + |h_{21}|^2 \right) \right]$$

Имеем $C(2\rho_0, 2, 1) = C(\rho_0, 1, 2)$.
Система с 2 передающими и 1 приемной антенной обеспечивает такую же СЭ, как и система с 1 передающей и 2 приемными антеннами, но при удвоенной мощности.

3. Четыре передающие и одна приемная антенна (M=4, N=1):

$$C(\rho_0,4,1) = \log_2\left[1+\frac{1}{4}\rho_0\left(|h_{11}|^2+|h_{12}|^2+|h_{13}|^2+|h_{14}|^2\right)\right]$$

4. Одна передающая и четыре приемные антенны (M=1, N=4):

$$C(\rho_0,1,4) = \log_2\left[1+\rho_0\left(|h_{11}|^2+|h_{12}|^2+|h_{13}|^2+|h_{14}|^2\right)\right]$$

Имеем $C(4\rho_0,2,1)=C(\rho_0,1,4)$.
Система с 4 передающими и 1 приемной антенной обеспечивает такую же СЭ, как и система с 1 передающей и 4 приемными антеннами, но при в 4 раза большей мощности.

Предел СЭ при увеличении числа антенн.

Некоррелированный релеевский канал, одинаковое число антенн (M=N).
При увеличении числа M матрица $\mathbf{H}$ стремится к ортогональной матрице, так как

$$(\mathbf{HH}^H)_{pq} = \sum_{l=1}^{M} h_{pl}h_{ql}^* \underset{M\to\infty}{\to} M\,\delta_{pq} \qquad \text{или} \qquad \lim_{M\to\infty} \mathbf{HH}^H = M\,\mathbf{I}_N$$

СЭ стремится к неслучайной величине $\quad C \underset{M\to\infty}{\to} M\log_2(1+\rho_0)$

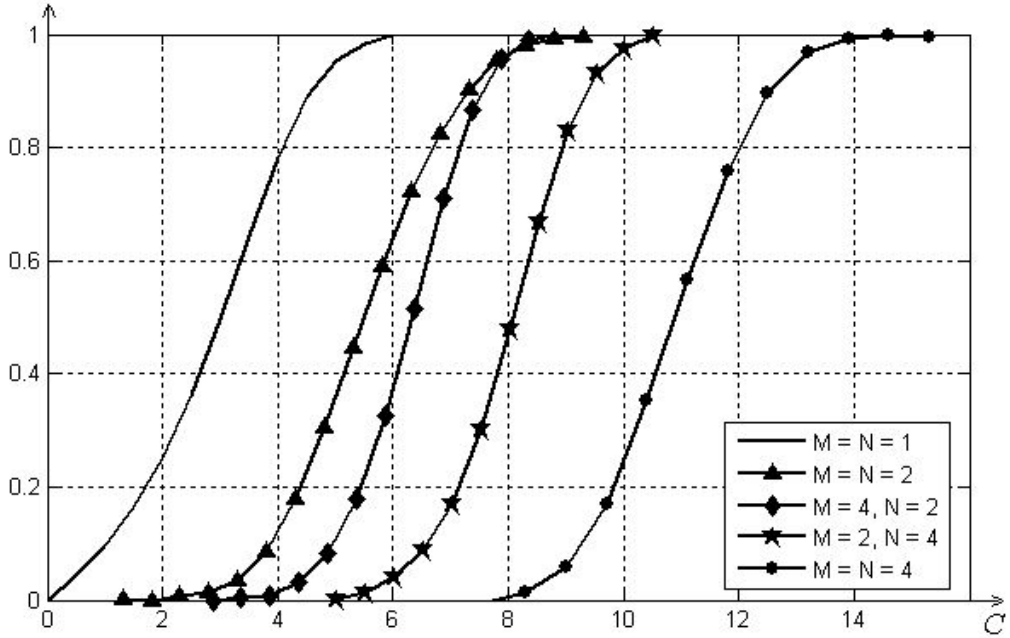
Средняя СЭ. $< C > = < \sum_{i=1}^{M} \log_2 \left(1 + \frac{\rho_0}{M} \lambda_i \right) >$

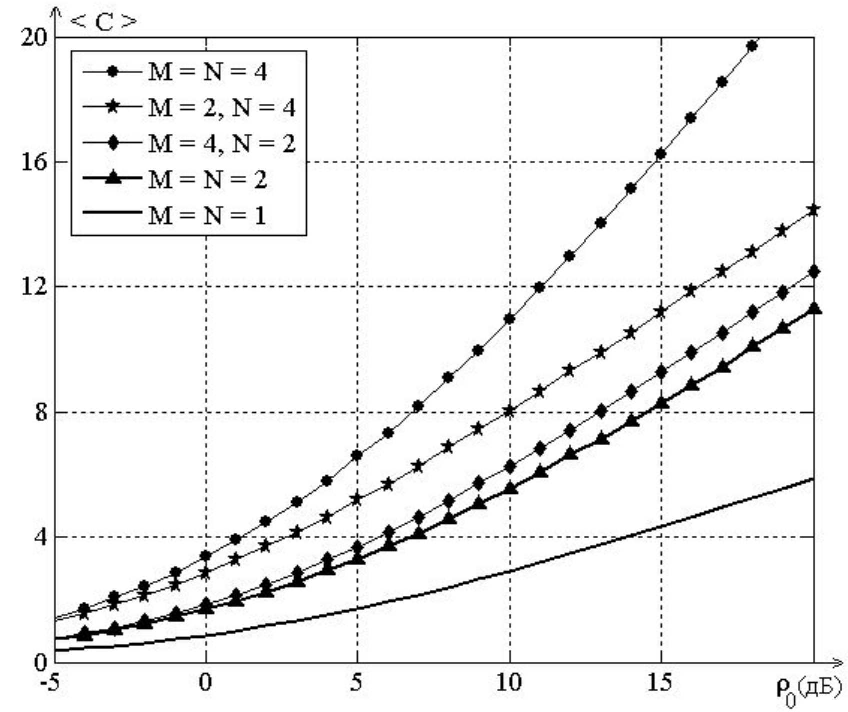
Средняя СЭ ОСШ ρ_0=10

N/M	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2.90	3.18	3.27	3.32	3.34	3.35	3.37	3.39
2	4.05	5.55	6.05	6.27	6.40	6.50	6.55	6.60
3	4.72	7.02	8.24	8.82	9.18	9.39	9.55	9.66
4	5.19	8.03	9.84	10.93	11.61	12.01	12.30	12.50
5	5.53	8.79	11.09	12.64	13.65	14.32	14.82	15.17
6	5.82	9.42	12.08	13.99	15.40	16.36	17.10	17.60
7	6.05	9.92	12.85	15.12	16.83	18.11	19.12	19.81
8	6.25	10.34	13.53	16.06	18.07	19.64	20.85	21.80

Выводы

- **Если зафиксировать число антенн в MIMO системе, то средняя СЭ будет наибольшей при одинаковом числе передающих и приемных антенн (M=N).**
- **Средняя СЭ уменьшается при неравном числе антенн.**
- **Система с большим числом передающих антенн (M>N) имеет меньшую СЭ по сравнению с системой с меньшим числом передающих числом антенн (M<N).**





Функция распределения СЭ в релеевском некоррелированном канале при ρ_0=10

Средняя СЭ MIMO системы в зависимости от ОСШ при разном числе антенн

2. Спектральная эффективность MIMO-системы с обратной связью

Передатчик «знает» канальную матрицу **H**.
Матрица **H** оценивается на приемной части системы, и затем информация о ней сообщается передатчику.
Должна быть обратная связь от приемника к передатчику
Распределение мощности между *M* антеннами может быть неравномерным.

$$C = \sum_{i=1}^{K} \log_2\left(1 + \frac{P_0}{M\sigma_0^2}\lambda_i\right) \longrightarrow C = \sum_{i=1}^{K} \log_2\left(1 + \frac{p_i}{\sigma_0^2}\lambda_i\right)$$

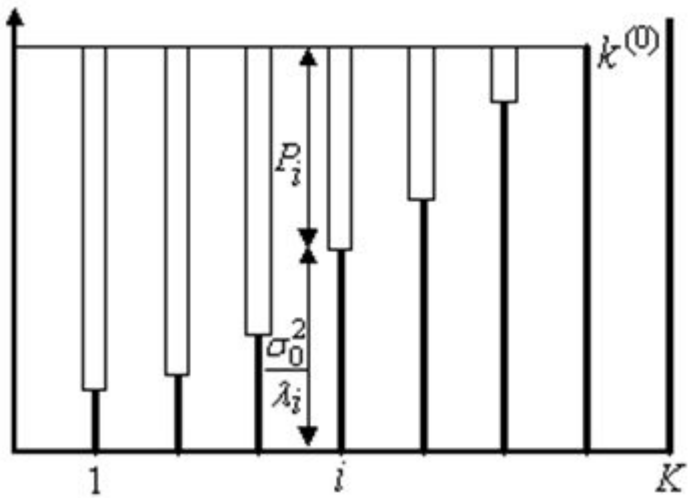
Передатчик «не знает» канал

Передатчик «знает» канал)

СЭ зависит от способа распределения полной мощности P_0 между подканалами. Максимальное значение СЭ достигается при «водоналивном» ("water pouring" или "water filling") способе распределения мощности.

Мощность в i–ом подканале $$p_i = k^{(0)} - \sigma_0^2 / \lambda_i$$

$k(0)$ находится из условия ограничения мощности: $p_1+p_2+\ldots+p_K=P_0$.



Распределение мощности по «водоналивному» правилу

$k^{(0)} - \sigma_0^2 / \lambda_i$ интерпретируется как глубина воды до дна чаши, соответствующую i-му собственному подканалу.

Если в чашу налить определенное количество воды, эквивалентное мощности P_0, то вода (мощность) распределится по чаше так, чтобы достигнуть максимума СЭ.

Чем глубже дно (больше коэффициент передачи i-го подканала), тем большая доля мощности распределяется в этот подканал.

Если для некоторых подканалов дно окажется выше уровня воды ($\sigma_0^2 / \lambda_i > k^{(0)}$), то в эти подканалы мощность не распределяется ($p_i=0$) и они не используются для передачи.

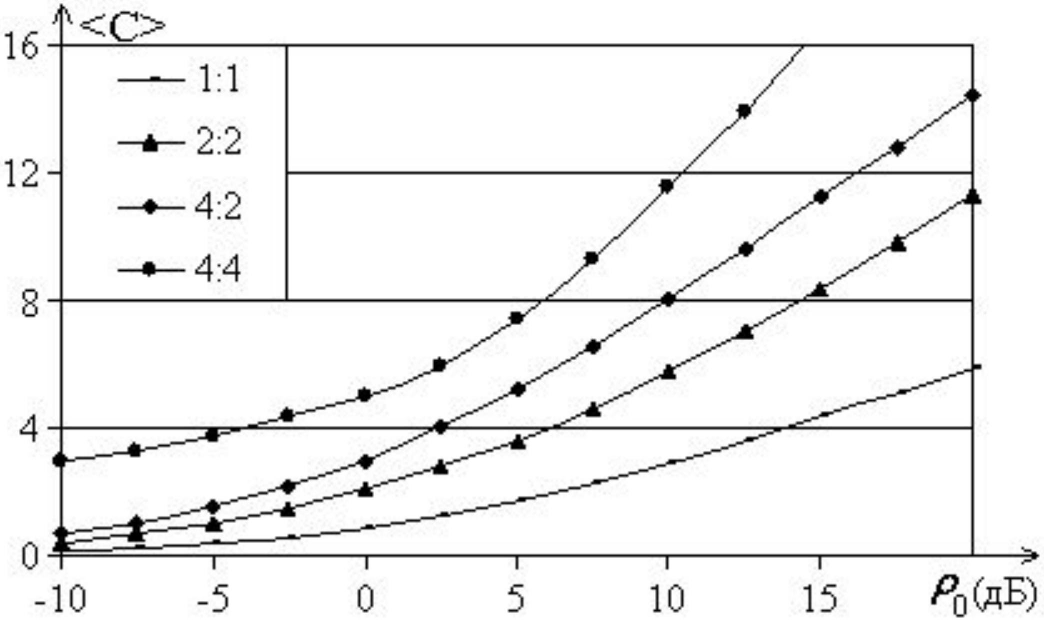
СЭ MIMO-системы - случайная величина, так как собственные числа λ_i - случайны. СЭ является симметричной функцией от числа антенн M и N.

N/M	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2.9							
2	4.1	5.7						
3	4.7	7.0	8.6					
4	5.2	8.1	10.0	11.5				
5	5.5	8.8	11.1	12.9	14.4			
6	5.8	9.4	12.1	14.1	15.8	17.3		
7	6.0	9.9	12.9	15.1	17.0	18.7	20.2	
8	6.2	10.3	13.5	16.1	18.2	19.9	21.6	23.1

Средняя СЭ при разном числе антенн (ρ_0=10 дБ, релеевский некоррелированный канал)

<u>Выводы</u>

- **Средняя СЭ MIMO-системы с одинаковым числом передающих и приемных антенн (M=N) увеличивается практически пропорционально числу антенн.**
- **Увеличение числа только передающих (или приемных) антенн приводит к меньшему увеличению СЭ, так как имеется только один собственный подканал и параллельная передача информации становится невозможной.**



Средняя СЭ при разном числе антенн (релеевский некоррелированный канал)

4. Сравнение спектральной эффективности при известном и неизвестном канале на передающей стороне линии связи (релеевский некоррелированный канал)

Случай 1. Передающих антенн не больше, чем приемных ($M \le N$).
Число подканалов подканалов для передачи данных равно M.

$$C_1 = \sum_{i=1}^{M} \log_2 \left(1 + \frac{P_0}{M\sigma_0^2} \lambda_i \right) \longrightarrow C_2 = \sum_{i=1}^{M} \log_2 \left(1 + \frac{p_i}{\sigma_0^2} \lambda_i \right)$$

Передатчик «не знает» канал

Передатчик «знает» канал

Уменьшение СЭ при неизвестном канале обусловлено заменой оптимального распределения мощности равномерным.
С увеличением средней мощности оптимальное распределение приближается к равномерному.
Поэтому при достаточно большой мощности $C_1 \approx C_2$.

Случай 2. Передающих антенн больше, чем приемных ($M>N$). Число собственных подканалов равно N.

$$C_1 = \sum_{i=1}^{M} \log_2\left(1 + \frac{P_0}{M\sigma_0^2}\lambda_i\right) \longrightarrow C_2 = \sum_{i=1}^{N} \log_2\left(1 + \frac{p_i}{\sigma_0^2}\lambda_i\right)$$

Передатчик «не знает» канал

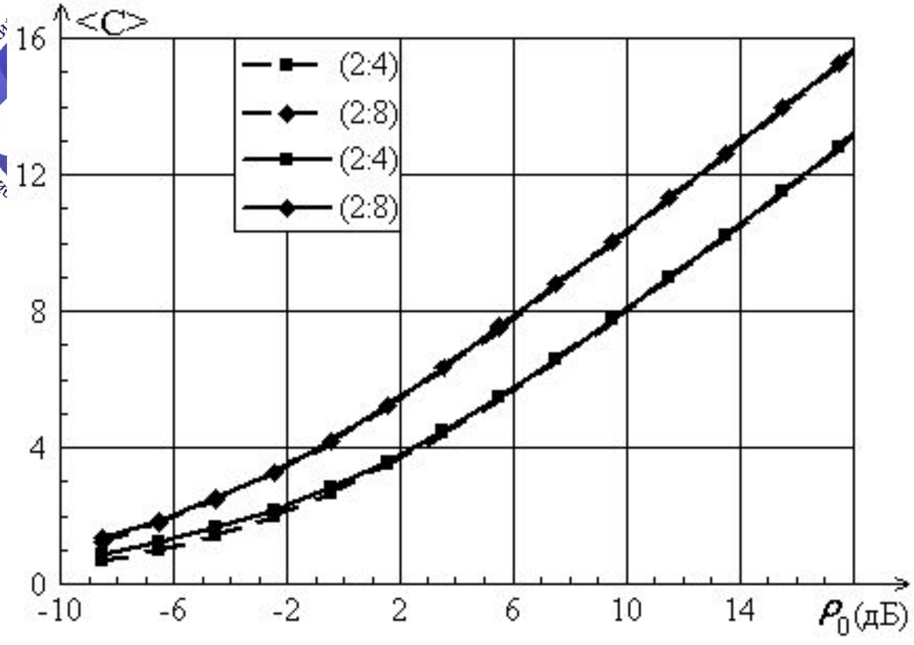
Передатчик «знает» канал

При достаточно большой мощности (когда распределение мощности между подканалами можно считать равномерным)

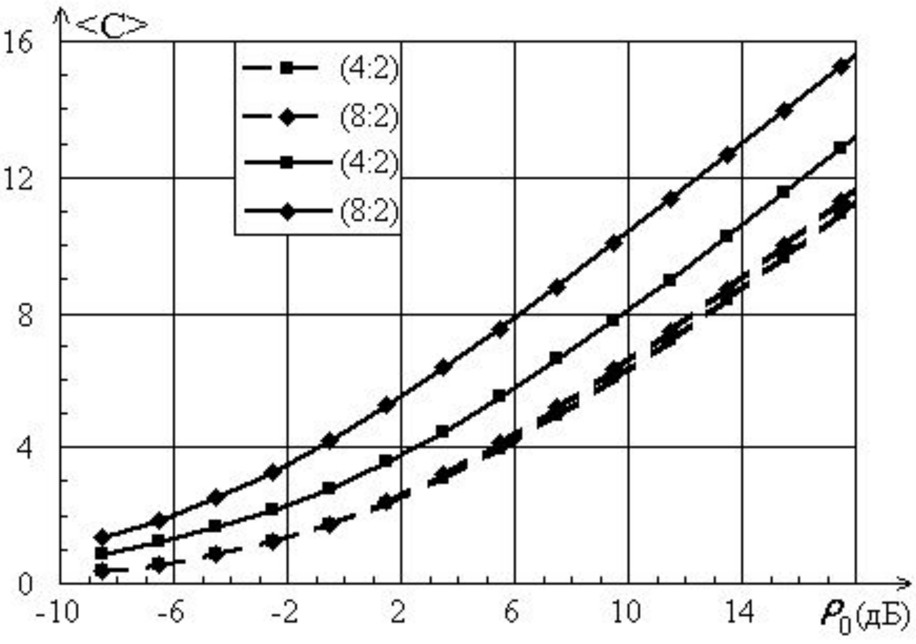
$$\Delta C = C_2 - C_1 \approx \sum_{i=1}^{N}\left[\log_2\left(1 + \frac{\rho_0}{N}\lambda_i\right) - \log_2\left(1 + \frac{\rho_0}{M}\lambda_i\right)\right] \qquad \Delta C \approx N \log_2\left(\frac{M}{N}\right)$$

Знание канала передатчиком увеличивает СЭ системы тем больше, чем больше используется передающих антенн при одинаковом числе приемных антенн.

Объяснение: равномерное деление мощности между большим числом M антенн в системе с незнающим канал передатчиком менее эффективно, чем оптимальное распределение мощности между меньшим числом N подканалов.



Средние СЭ $<C_2>$ и $<C_1>$ (сплошные и пунктирные кривые) при $M<N$



Средние СЭ $<C_2>$ и $<C_1>$ (сплошные и пунктирные кривые) при $M>N$

Знание канала передатчиком значительно увеличивает СЭ при большем числе передающих антенн

5. Спектральная эффективность при различных статистических свойствах пространственного канала

Четыре случая

1. Рассеиватели отсутствуют. Сигналы принимаются на фоне собственных шумов приемников, то есть коэффициенты передачи h_{mn} - неслучайные величины. Передающая и приемная АР состоят из произвольно расположенных антенн. АР находятся на большом расстоянии друг относительно друга (дальняя зона)

Имеется только один подканал для передачи данных. Он формируется весовыми векторами $\mathbf{V}_1$ (передающая АР) и $\mathbf{U}_1$ (приемная АР)

Весовой вектор $\mathbf{V}_1$ формирует плоскую волну (или ДН) в направлении на приемную АР, обеспечивая согласованную передачу сигналов.
Весовой вектор $\mathbf{U}_1$ формирует плоскую волну (или ДН) в направлении на передающую АР, обеспечивая согласованный прием сигналов.

$$C(\rho_0) = \log_2(1 + \rho_0 MN)$$ - СЭ MIMO-системы

M и N - максимальные КНД передающей и приемной АР.
$\rho_0 MN$ - ОСШ на выходе собственного подканала.

2. Рассеиватели сосредоточены только вокруг приемной АР.
Коэффициенты передачи h_{mn} - коррелированны для разных передающих антенн и некоррелированными для разных приемных антенн.

Номер столбца матрицы **H** соответствуют номеру передающей антенны.
Поэтому матрицы **H** столбцы линейно зависимы.
Матрица **H** имеет ранг равный единице.

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1M} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{N1} & h_{N2} & \dots & h_{NM} \end{pmatrix},$$

$\lambda_1 = M(|h_{11}|^2 + |h_{21}|^2 + \dots + |h_{N1}|^2)$ - единственное отличное от нуля собственное число

Имеется только один подканал для передачи данных. Он формируется весовыми векторами $\mathbf{V}_1$ (передающая АР) и $\mathbf{U}_1$ (приемная АР)

Весовой вектор $\mathbf{U}_1$ обеспечивает согласованный с пространственным каналом прием многолучевого сигнала ($\mathbf{U}_1 \sim \mathbf{H}_q$, где $\mathbf{H}_q$ – любой из столбцов матрицы **H**)
Весовой вектор $\mathbf{V}_1$ формирует плоскую волну в направлении на приемную АР, то есть дает согласованную передачу сигналов (формирует максимум ДН передающей АР в направлении на приемную АР).

$$C(\rho_0) = \log_2\left(1 + \rho_0 M \sum_{n=1}^{N} |h_{n1}|^2\right)$$

- СЭ MIMO-системы

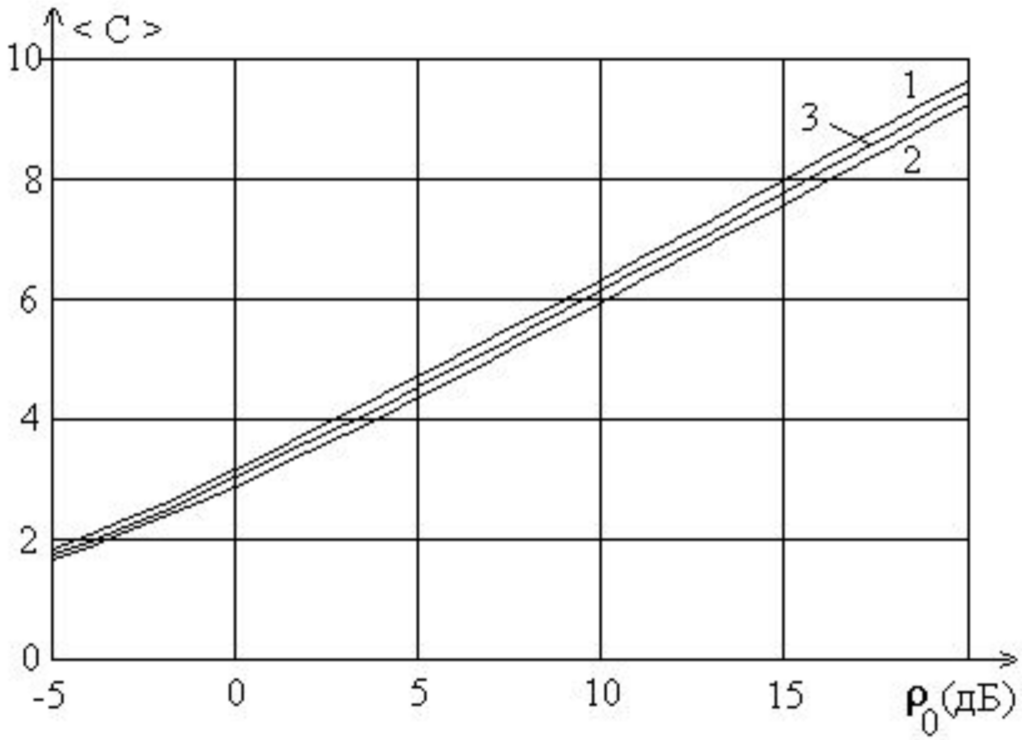
3. Рассеиватели сосредоточены только вокруг передающей АР.

Коэффициенты передачи h_{mn} - коррелированны для разных приемных антенн и некоррелированными для разных передающих антенн.

Этот случай является аналогичным предыдущему. Для нахождения СЭ необходимо заменить число передающих антенн числом приемных антенн и наоборот.

$$C(\rho_0) = \log_2\left(1 + \rho_0 N \sum_{n=1}^{M} \left|h_{1n}\right|^2\right)$$

- СЭ MIMO-системы



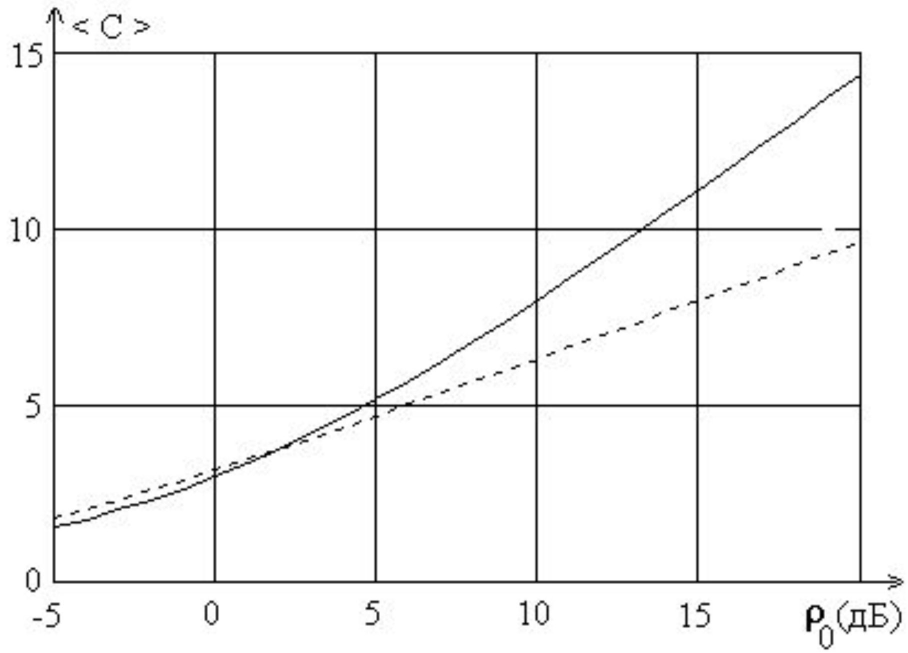
Средняя СЭ для трех случаев (кривые 1, 2, 3); M=4, N=2

- Наибольшая СЭ - в первом случае (рассеиватели отсутствуют – гауссов шумовой канал).
- Наименьшая СЭ – во втором случае, когда отражатели сосредоточены только вокруг приемной АР.
- Во всех случаях СЭ отличаются друга от друга незначительно, так как имеется один собственный подканал

4. Общий случай. Отражатели располагаются во всем пространстве между БС и пользователем.

Коэффициенты передачи h_{mn} являются независимыми случайными величинами.

Вероятность появления линейно зависимых строк или столбцов в матрице **H** пренебрежимо мала и матрица **H** имеет полный ранг $K=\min\{M,N\}$.
Имеется K параллельных подканалов для передачи данных.



Средняя СЭ в релеевском и гауссовом (пунктир) каналах, M=4; N=2

СЭ MIMO-системы

$$C=\sum_{i=1}^{K}\log_2\left(1+\frac{p_i}{\sigma_0^2}\lambda_i\right)$$

СЭ в релеевском канале может быть больше, чем в шумовом канале.
Это объясняется тем, что при малых ОСШ (≤3 дБ) в релеевском канале формируется один подканал, так как во второй подканал мощность не распределяется.
При больших ОСШ (≥3 дБ) формируются два подканала.
В шумовом канале имеется только один подканал.

Лекция 15. Передача и прием сигналов в MIMO-системах (пространственно-временное кодирование и декодирование)

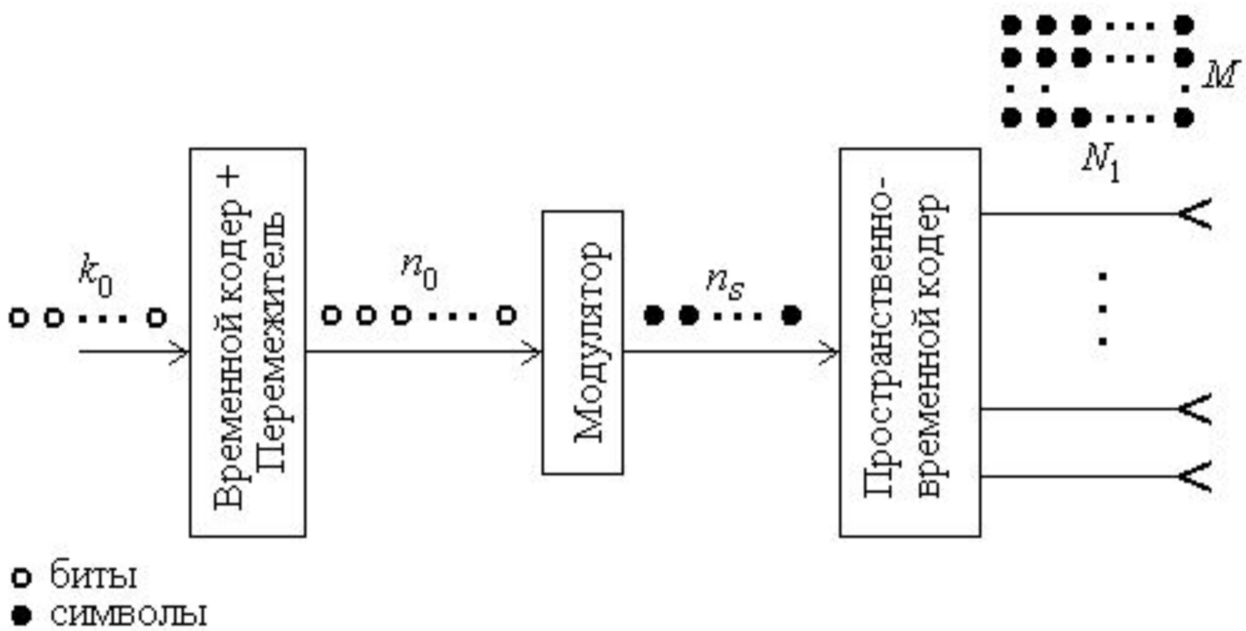


Схема пространственно-временного кодирования

- Входные биты (k_0) кодируются в помехоустойчивом кодере (временное кодирование).
- Далее n_0 ($n_0 > k_0$) кодированных бит перемешиваются в перемежителе и отображаются в модуляторе в $n_s = n_0/k_b$ символов (k_b – битовая загрузка символа).
- Символы поступают в пространственно-временной кодер, куда также добавляется некоторое количество избыточных символов.
- На выходе имеется MN_1 символов ($MN_1 > n_s$).
- Для увеличения скорости передачи данных эти символы разделяются на M параллельных потоков из N_1 символов каждый. Эти MN_1 символов называются пространственно-временным кодовым словом.

Длительность блока на выходе модулятора равна $n_s T_s$ (T_s – длительность импульса).
Длительность кодового слова после пространственно-временного кодирования - $N_1 T_s$.
Скорость пространственно-временного кодирования $R_{s\text{-}t}=n_s/N_1$.

1. Все антенны излучают одновременно одинаковый символ (разнесенная передача).

- Пространственно-временное кодирование переходит в пространственное, которое заключается в равномерном разделении мощности между антеннами.
- Скорость кодирования $R_{s\text{-}t}=1$, так как $n_s=N_1=1$.
- Статистические свойства ОСШ такие же, как и при передаче из одной антенны.
- Такая передача не изменяет вероятности битовой ошибки и СЭ системы, несмотря на использование нескольких антенн вместо одной.

Принятый сигнал $$x=\sqrt{\frac{P_0}{M}}\sum_{p=1}^{M}h_p d+z$$

d – передаваемый символ
M – число передающих антенн

ОСШ $$\rho=\rho_0\left|\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{p=1}^{M}h_p\right|^2 \qquad \rho_0=\frac{P_0}{\sigma_0^2}$$

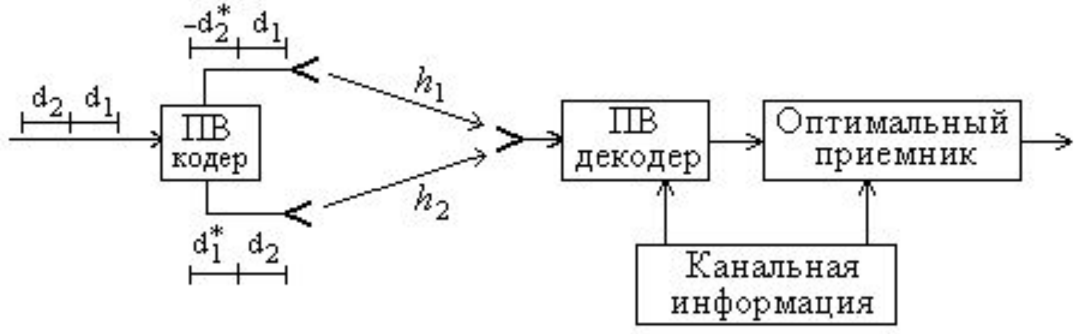
Одна антенна (M=1). ОСШ $$\rho_{M=1}=\rho_0\left|h_1\right|^2$$

Статистические свойства ОСШ в этих выражениях одинаковы.
Случайные величины под знаком модуля подчиняются гауссову закону с единичной дисперсией и нулевым средним.
Среднее ОСШ $\langle\rho_M\rangle=\langle\rho_{M=1}\rangle=\langle\rho_0\rangle$

2. Пространственно-временная разнесенная передача (схема Аламоути).

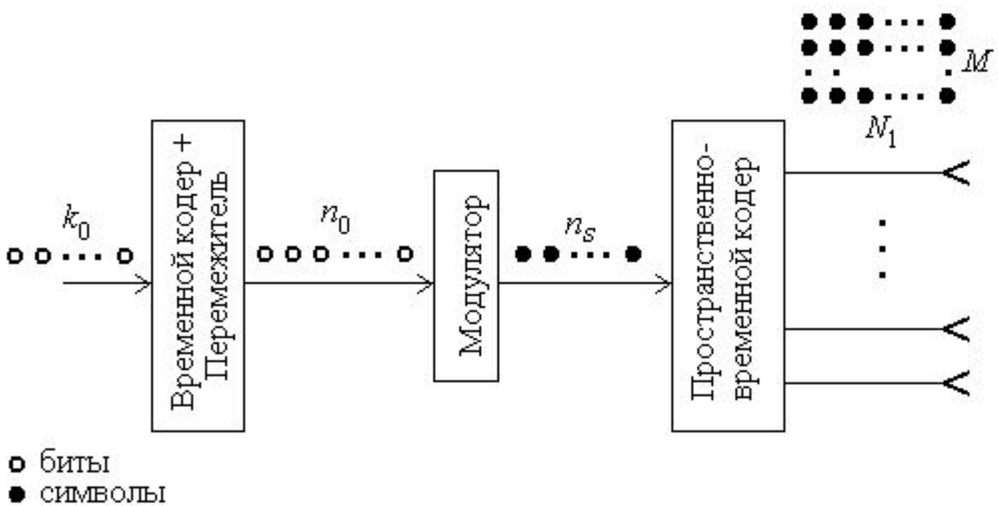
- Входной и выходной блоки состоят из 2 сигналов и имеют длительность $2T_s$ каждый (n_s=2, N_1=2).
- Скорость кодирования $R_{s\text{-}t}$=1.

Ортогональная ПВРП

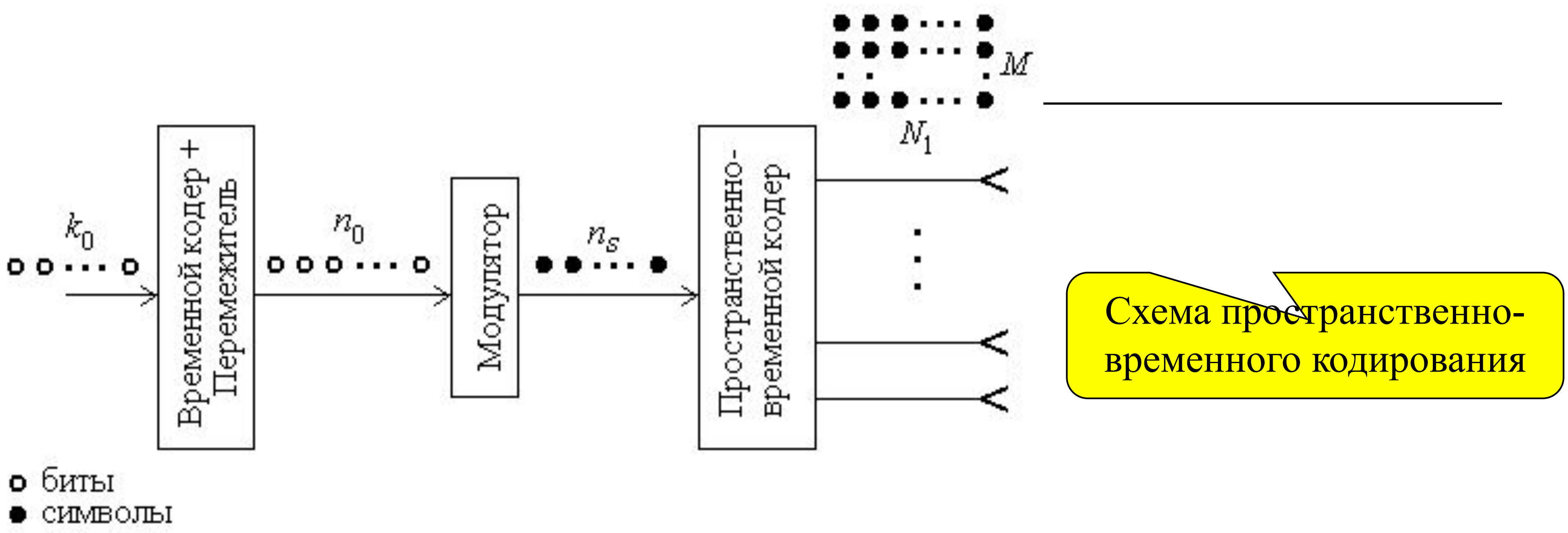


3. Каждая антенна передает разные символы.

- Скорость передачи достигает максимальной величины.
- Имеем, что n_s=M, N_1=1, а соответствующая скорость равна числу антенн $R_{s\text{-}t}$=n_s/N_1=M).



Ортогональное пространственно-временное блочное кодирование



1. Коды при произвольном числе передающих и приемных антенн

Условия ортогональности блочного пространственно-временной кода:

– выходные сигналы кодера есть линейная комбинация входных сигналов и их комплексно-сопряженных величин;

– матрица кодированных сигналов, передаваемых из M антенн за интервал времени $N_1 T_s$, удовлетворяет условию ортогональности

$$\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{D}}^H = \left(|d_1|^2 + |d_2|^2 + \ldots + |d_{n_s}|^2 \right) \mathbf{I}_M$$

- строки матрицы кодированных сигналов ортогональны между собой

1.1. Действительные (одномерные) сигналы (например, сигналы амплитудной модуляции).

Ортогональные блочные коды с единичной скоростью ($R_{s\text{-}t}$=1), то есть без задержки в передаче данных, существуют при произвольном числе M передающих антенн.

Если M четное, то можно сформировать коды, для которых матрица кодированных сигналов является квадратной.

Если M нечетное, то матрица кодированных сигналов становится прямоугольной.

<u>Ортогональные коды для разного числа передающих антенн</u>

M=2 $$\widetilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & -d_2 \\ d_2 & d_1 \end{pmatrix}$$

Строки соответствуют передающим антеннам. Столбцы - моментам времени.

M=4 $$\widetilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & -d_2 & -d_3 & -d_4 \\ d_2 & d_1 & d_4 & -d_3 \\ d_3 & -d_4 & d_1 & d_2 \\ d_4 & d_3 & -d_2 & d_1 \end{pmatrix}$$

M=
3

$$\tilde{\mathbf{D}}=\begin{pmatrix} d_1 & -d_2 & -d_3 & -d_4 \\ d_2 & d_1 & d_4 & -d_3 \\ d_3 & -d_4 & d_1 & d_2 \end{pmatrix}$$

M=
5

$$\tilde{\mathbf{D}}=\begin{pmatrix} d_1 & -d_2 & -d_3 & -d_4 & -d_5 & -d_6 & -d_7 & -d_8 \\ d_2 & d_1 & -d_4 & d_3 & -d_6 & d_5 & d_8 & -d_7 \\ d_3 & d_4 & d_1 & -d_2 & -d_7 & -d_8 & d_5 & d_6 \\ d_4 & -d_3 & d_2 & d_1 & -d_8 & d_7 & -d_6 & d_5 \\ d_5 & d_6 & d_7 & d_8 & d_1 & -d_2 & -d_3 & -d_4 \end{pmatrix}$$

Все эти коды удовлетворяют условию ортогональности и обеспечивают передачу данных с единичной скоростью без задержки ($R_{s\text{-}t}$=1).

Пример.

Матрица кода при M=5 состоит из 8 столбцов и 5 строк (блок из 8 символов d_1, d_2, …, d_8 кодируется и передается за 8 моментов времени с помощью 5 антенн).

В схеме пространственно-временного кодирования число выходных символов модулятора n_s=8 (длительность блока на выходе модулятора составляет $n_s T_\mathrm{s}$), длительность кодового слова после кодирования составляет $8T_\mathrm{s}$ (N_1=8). Следовательно, скорость кодирования $R_{s\text{-}t}$=1.

1.2. Комплексные (двумерные) сигналы (например, 4-ФМ, 16-КАМ и 64-КАМ сигналы).

Ортогональные блочные коды с единичной скоростью ($R_{s\text{-}t}$=1), то есть без задержки в передаче данных, существуют только при двух (M=2) передающих антенн.

Если число передающих антенн больше двух (M>2), то не существует ортогональных блочных кодов с единичной скоростью (всегда имеется задержка в передаче данных).

Известные коды обеспечивают скорость $R_{s\text{-}t}$=1/2, то есть длительность передаваемого блока удваивается.

Исключением являются случаи трех (M=3) и четырех (M=4) передающих антенн, когда можно обеспечить большую скорость кодирования, равную $R_{s\text{-}t}$=3/4.

Ортогональные коды для разного числа передающих антенн

$\boldsymbol{M=3,\ R_{s\text{-}t}=3/4}$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & -d_2^* & \alpha d_3^* & \alpha d_3^* \\ d_2 & d_1^* & \alpha d_3^* & -\alpha d_3^* \\ \alpha d_3 & \alpha d_3 & \alpha^2(-d_1 - d_1^* + d_2 - d_2^*) & \alpha^2(d_2 + d_2^* + d_1 - d_1^*) \end{pmatrix}$$

***M*=4, *R*$_{s\text{-}t}$=3/4**

$$\widetilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & -d_2^* & \alpha d_3^* & \alpha d_3^* \\ d_2 & d_1^* & \alpha d_3^* & -\alpha d_3^* \\ \alpha d_3 & \alpha d_3 & \alpha^2(-d_1 - d_1^* + d_2 - d_2^*) & \alpha^2(d_2 + d_2^* + d_1 - d_1^*) \\ \alpha d_3 & -\alpha d_3 & \alpha^2(-d_2 - d_2^* + d_1 - d_1^*) & -\alpha^2(d_1 + d_1^* + d_2 - d_2^*) \end{pmatrix}$$

***M*=3, *R*$_{s\text{-}t}$=1/2**

$$\widetilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & -d_2 & -d_3 & -d_4 & d_1^* & -d_2^* & -d_3^* & -d_4^* \\ d_2 & d_1 & d_4 & -d_3 & d_2^* & d_1^* & d_4^* & -d_3^* \\ d_3 & -d_4 & d_1 & d_2 & d_3^* & -d_4^* & d_1^* & d_2^* \end{pmatrix}$$

***M*=4, *R*$_{s\text{-}t}$=1/2**

$$\widetilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & -d_2 & -d_3 & -d_4 & d_1^* & -d_2^* & -d_3^* & -d_4^* \\ d_2 & d_1 & d_4 & -d_3 & d_2^* & d_1^* & d_4^* & -d_3^* \\ d_3 & -d_4 & d_1 & d_2 & d_3^* & -d_4^* & d_1^* & d_2^* \\ d_4 & d_3 & -d_2 & d_1 & d_4^* & d_3^* & -d_2^* & d_1^* \end{pmatrix}$$

Эти коды удовлетворяют условию ортогональности и имеют задержку в передаче.

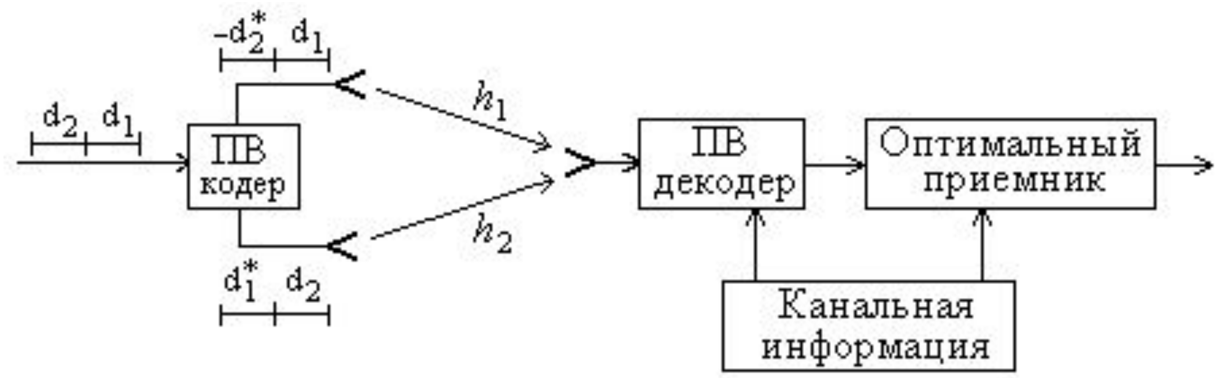
<u>Пример.</u> Матрица кода для M=4 состоит из 8 столбцов и 4 строк (блок из 4 символов d_1, d_2, …, d_4 кодируется и передается за 8 моментов времени с помощью 4 антенн).

В схеме пространственно-временного кодирования число выходных символов модулятора n_s=4 (длительность блока на выходе модулятора составляет $n_s T_s$), длительность кодового слова после кодирования составляет $8T_s$ (N_1=8), то есть $R_{s\text{-}t}$=1/2.

2. Вероятность битовой ошибки

2.1. Две передающие и произвольное число приемных антенн.

Пространственно-временная разнесенная передача (схема Аламоути).



$$\mathbf{Y} = \sqrt{P_0}\,\tilde{h}\,\mathbf{D} + \mathbf{Z}$$

$$\tilde{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|h_1|^2 + |h_2|^2}$$ - эффективный канальный коэффициент передачи для каждого из символов d_1 и d_2.

Эффективный коэффициент передачи для *i*-ой антенны $$\tilde{h}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|h_{i1}|^2 + |h_{i2}|^2}$$

h_{i1} и h_{i2} – коэффициенты передачи между первой и второй передающими антеннами и *i*-ой приемной антенной.

Две передающие антенны можно заменить одной и считать $\tilde{h}_i$ коэффициентом передачи между этой эквивалентной антенной и i-ой приемной антенной.

Для когерентного суммирования декодированных сигналов во всех приемных антеннах необходимо сложить эти сигналы с весовыми коэффициентами $\tilde{h}_i$

ОСШ для символов d_1 и d_2 будет одинаковым $$\rho = \rho_0 \sum_{i=1}^{N} \left|\tilde{h}_i\right|^2 = \frac{1}{2}\rho_0 \sum_{i=1}^{N} \left(\left|h_{i1}\right|^2 + \left|h_{i2}\right|^2\right)$$

2.2. Произвольное число передающих антенн.

Эффективный коэффициент передачи для i-й приемной антенны

$$\tilde{h}_i = \sqrt{\frac{1}{M}}\sqrt{\left|h_{i1}\right|^2 + \left|h_{i2}\right|^2 + \cdots + \left|h_{iM}\right|^2} = \sqrt{\frac{1}{M}}\sqrt{\sum_{j=1}^{M}\left|h_{ij}\right|^2}$$

Для когерентного суммирования декодированных сигналов во всех приемных антеннах необходимо сложить эти сигналы с весовыми коэффициентами $\tilde{h}_i$

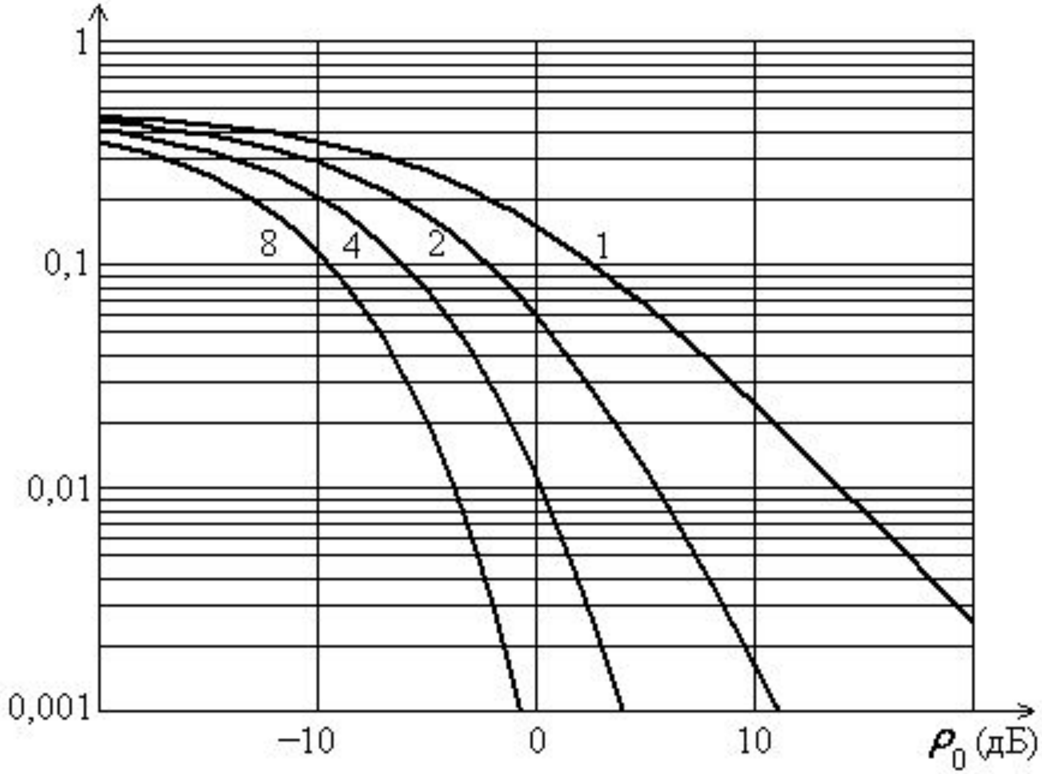
ОСШ при произвольном числе передающих и приемных антенн

$$\rho = \rho_0 \sum_{i=1}^{N} \left|\tilde{h}_i\right|^2 = \frac{\rho_0}{M} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \left|h_{ij}\right|^2 = \frac{\rho_0}{M}\left\|\mathbf{H}\right\|^2$$

Сравним ОСШ для ортогонального пространственно-временного блочного кодирования в системе с M передающими и N приемными антеннами с ОСШ в системе с разнесенным приемом на NM антенн.

$$\rho = \rho_0 \sum_{i=1}^{N} \left|\tilde{h}_i\right|^2 = \frac{\rho_0}{M} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \left|h_{ij}\right|^2 \qquad\qquad \rho = \rho_0 \sum_{p=1}^{NM} \left|h_p\right|^2$$

- ОСШ подчиняются одинаковому закону распределения (хи-квадрат распределение с $2NM$ степенями свободы).
- Ортогональное пространственно-временное блочное кодирование обеспечивает максимальный порядок разнесения, равный общему числу NM некоррелированных ветвей разнесения.
- При больших ОСШ вероятность битовой ошибки при ортогональном блочном кодировании уменьшается обратно пропорционально произведению NM.
- Имеется одно различие, связанное с тем, что среднее ОСШ для такой передачи меньше в $1/M$ раз из-за разделения мощности между передающими антеннами.
- Поэтому кривые вероятности битовой ошибки для ортогонального пространственно-временного блочного кодирования передачи будут смещены на $10\lg(M)$ дБ вправо по сравнению с соответствующими кривыми для разнесенного приема на NM антенн.



BER для 1, 2, 4 и 8 приемных антенн

Примеры.

1. Если M=2 и N=4, то кривые для BER сдвигаются на 3 дБ.
2. В противном случае (M=4, N=2) мощность разделяется между 4 антеннами, и сдвиг кривых увеличивается до 6 дБ.

Ортогональное пространственно-временное блочное кодирование обеспечивает максимальный порядок разнесения.
Скорость передачи данных либо сохраняется (две передающие антенны), либо уменьшается (M>2) по сравнению с системой без разнесенной передачи.

3. Спектральная эффективность (СЭ)

$$\rho = \rho_0 \sum_{i=1}^{N} \left|\tilde{h}_i\right|^2 = \frac{\rho_0}{M} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \left|h_{ij}\right|^2 = \frac{\rho_0}{M} \left\|\mathbf{H}\right\|^2$$

$$C_{ort} = R_{s-t} \log_2 \left[1 + \frac{\rho_0}{M} \left\|\mathbf{H}\right\|^2\right] = R_{s-t} \log_2 \left(1 + \frac{\rho_0}{M} \sum_{i=1}^{K} \lambda_i\right)$$

Сравним СЭ ортогонального пространственно-временного блочного кодирования со СЭ MIMO системы без обратной связи.

$$C = \sum_{i=1}^{K} \log_2 \left(1 + \frac{\rho_0}{M} \lambda_i\right) = \log_2 \prod_{i=1}^{K} \left(1 + \frac{\rho_0}{M} \lambda_i\right) = \log_2 \left(1 + \frac{\rho_0}{M} \sum_{i=1}^{K} \lambda_i + \frac{\rho_0^2}{M} a + \frac{\rho_0^3}{M} b + \ldots\right) \qquad a > 0,\ b > 0$$

Отсюда $C_{ort} \leq C$.

СЭ системы с ортогональным пространственно-временным блочным кодом меньше СЭ MIMO-системы без обратной связи (одинаковое число передающих и приемных антенн и одинаковая канальная матрица H).

<u>Исключение:</u> система с двумя передающими антеннами, когда скорость блочного кода является единичной и $C_{ort} = C$.

Два примера конфигурации MIMO-системы с ортогональным блочным кодом

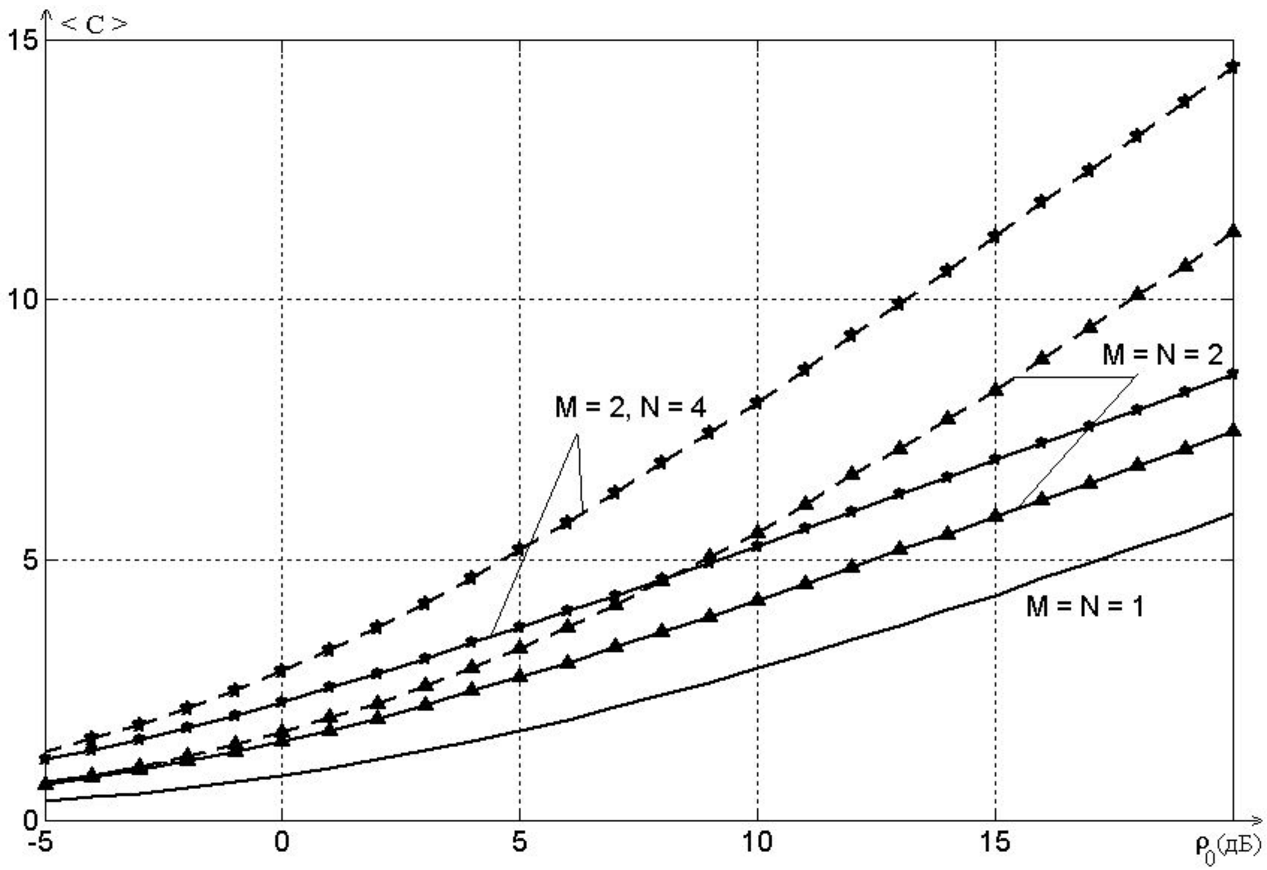
1. Две передающие и одна приемная антенна (M=2, N=1). СЭ

$$C_{ort} = \log_2\left[1 + \frac{1}{2}\rho_0\left(|h_{11}|^2 + |h_{12}|^2\right)\right]$$

2. Две передающие и две приемные антенны (M=2, N=2). СЭ

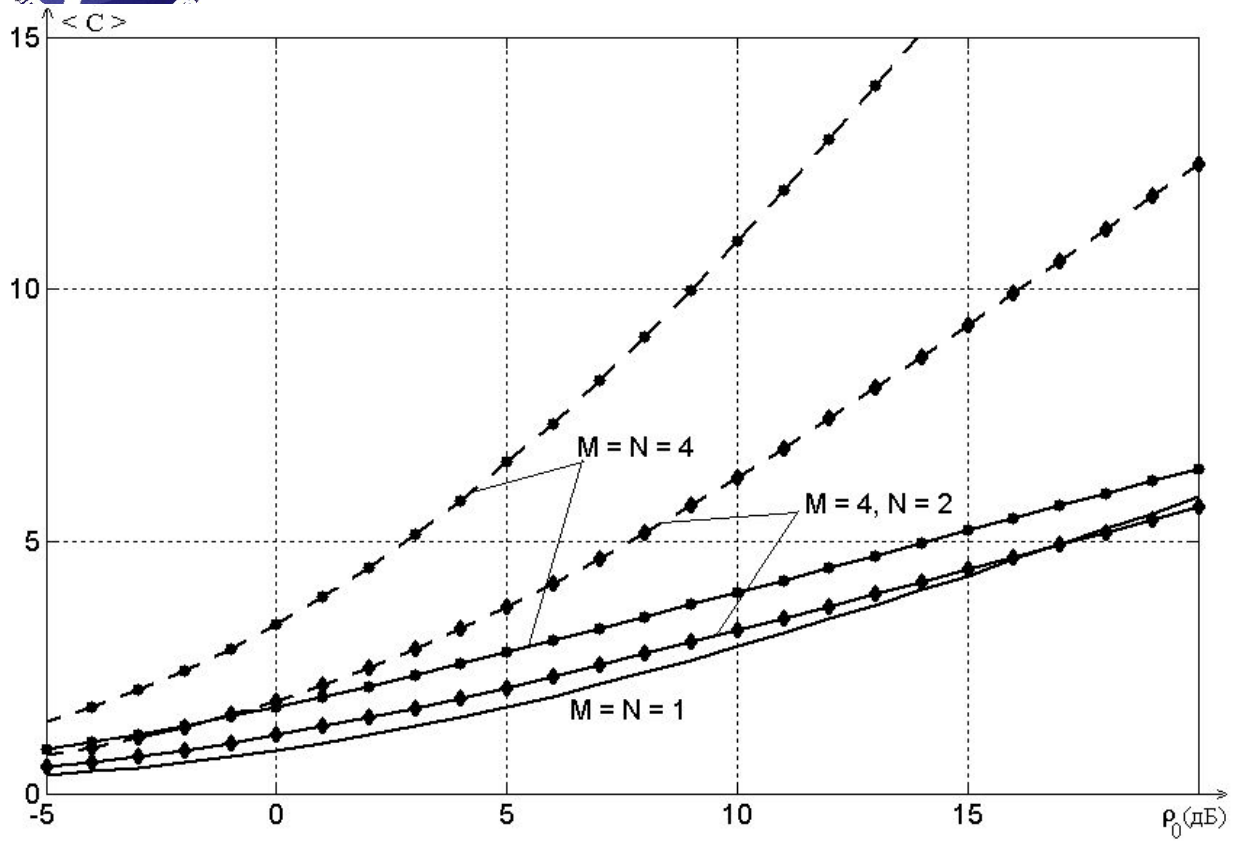
$$C_{ort} = \log_2\left[1 + \frac{1}{2}\rho_0\left(|h_{11}|^2 + |h_{12}|^2 + |h_{21}|^2 + |h_{22}|^2\right)\right]$$

Передающих антенн не больше, чем приемных



Средняя СЭ MIMO системы с ортогональным пространственно-временным кодированием (сплошные кривые) и MIMO системы без обратной связи с пространственным кодированием (пунктирные кривые)

Приемных антенн не больше, чем передающих



Средняя СЭ MIMO системы с ортогональным пространственно-временным кодированием (сплошные кривые) и MIMO системы без обратной связи с пространственным кодированием (пунктирные кривые)

Ортогональное блочное пространственно-временное кодирование приводит к уменьшению СЭ, особенно значительному в системах с большим числом передающих антенн