

# Лекция 3

## Метод анализа иерархий

# Классификация методов инженерии знаний

**Извлечение знаний** (*knowledge elicitation*) – процедура переноса компетентности эксперта через инженера по знаниям в базу знаний экспертной системы.

**Приобретение знаний** (*knowledge acquisition*) – процесс наполнения базы знаний экспертом с использованием специализированных методов и программных средств.

# Классификация методов инженерии знаний

**Формирование знаний, машинное обучение** (*machine learning*) – процесс анализа обучающих выборок и аналогий.

# Приобретение знаний (*knowledge acquisition*)

Метод анализа иерархий (МАИ) был предложен американским математиком Томасом Саати во второй половине XXв.

МАИ – метод экспертных оценок, пример .

МАИ позволяет принимающему решения лицу подобрать такой вариант решения задачи, который наилучшим образом соответствует его пониманию проблемы.

МАИ позволяет понятным и рациональным образом структурировать сложную проблему принятия решений в виде иерархии, сравнить и выполнить количественную оценку альтернативных вариантов решения.

Метод Анализа Иерархий используется:

от управления на межгосударственном уровне до решения отраслевых и частных проблем в бизнесе, промышленности, здравоохранении и образовании.

*Отражает ход человеческого мышления.*

Сталкиваясь с множеством контролируемых или неконтролируемых элементов, отражающих сложную ситуацию, разум объединяет их в группы в соответствии с распределением некоторых свойств между элементами.

Его модель позволяет повторять данный процесс таким образом, что группы, или скорее определяющие их общие свойства, рассматриваются в качестве элементов следующего уровня системы.

Процесс группировки будет повторяться до тех пор, пока не будет достигнут единственный элемент – вершина, которую зачастую можно отождествить с целью процесса принятия решений.

## Метод анализа иерархий использует следующую шкалу:

| Степень значимости | Определение  | Объяснение  |
|--------------------|--|---|
| 1                  | Одинаковая значимость  | Два элемента несут одинаковый вклад в достижение цели   |
| 3                  | Некоторое преобладание значимости одного элемента над другим (слабая значимость)   | Существуют соображения в пользу предпочтения одного из элементов, однако эти соображения недостаточно убедительны |
| 5                  | Существенная или сильная значимость  | Имеются надежные данные или логические суждения для того, чтобы показать предпочтительность одного из элементов   |
| 7                  | Очевидная или очень сильная значимость   | Убедительное свидетельство в пользу одного элемента перед другим  |
| 9                  | Абсолютная значимость  | Свидетельства в пользу предпочтения одного элемента другому в высшей степени убедительны                          |
| 2, 4, 6, 8         | Промежуточные суждения между двумя соседними суждениями  | Ситуация, когда необходимо компромиссное решение  |
| Обратные величины  | Если элементу $i$ при сравнении с элементом $j$ приписывается одно из определенных выше чисел, то элементу $j$ при сравнении элементом $i$ приписывается обратное значение | Если согласованность была постулирована при получении $N$ числовых значений для образования матрицы               |

Пусть веса  $w_i$  определены с допустимой точностью. Тогда отношение  $w_i/w_j$  показывает, во сколько раз вес объекта  $S_i$  больше/меньше веса объекта  $S_j$ .

Результаты сравнения можно представить в виде квадратной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_3}{w_2} & \dots & \frac{w_3}{w_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{pmatrix}$$



При этом диагональные элементы матрицы равны 1.

$w_1$

Столбец  $w = \dots$  - **собственный столбец** матрицы  $A$ .

$w_n$

При экспертном сравнении возможно возникновение *несогласованности* экспертных оценок.

Для определения степени согласованности суждений эксперта вводится показатель – *индекс согласованности*:

$$I = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}, \text{ где } n \text{ – порядок матрицы } A.$$

Удовлетворительная степень согласованности:  $I \leq 0.1$

При  $n > 2$  задача нахождения собственного вектора и соответствующего ему собственного значения технически достаточно сложна. Поэтому для нахождения максимального собственного числа матрицы парных сравнений используются приближенные методы.

Один из таких методов использует следующие выражения:

$$W_{\max} = \frac{Ae}{e^T Ae} -$$

$$\lambda_{\max} = e^T A W_{\max},$$

где  $e^T = (1 \dots 1)$  единичный вектор размерности  $n$ ,

$\lambda_{\max}$  - максимальное собственное число матрицы,

$W_{\max}$  - вектор приоритетов.

Оценки, присваиваемые экспертами при парных сравнениях, опираются на эмпирические знания, опыт.

Но полученные результаты оказываются всегда достаточно полезными.

В зависимости от понимания экспертом поставленной задачи, система предлагает ту или иную альтернативу.

## **Пример. Принятие решения о покупке дома**

семья намерена купить дом и учитывает при его выборе восемь важных для нее критериев.

1. **Размер** — число и размер комнат, площадь подсобных помещений, общая площадь дома.
2. **Транспорт** — транспортное сообщение: удобство и близость метро и автобуса.
3. **Окружение** — ближайшие окрестности дома: интенсивность движения транспорта, безопасность, вид местности, налоги, состояние окружающих зданий.
4. **Возраст** — как давно построен дом.
5. **Двор** — пространство двора со всех сторон дома, а также пространство, разделяемое с соседями.
6. **Удобства** — современные средства обслуживания: посудомоечная машина, мусоропровод, кондиционирование воздуха, система сигнализации и т. д.
7. **Состояние** — общее состояние дома: необходимость ремонта, состояние стен, пола, проводки, обоев, чистота.
8. **Финансы** — финансовые параметры: предполагаемая ликвидность, условия оплаты, возможности кредитования.

Проблема заключается в выборе одного дома из трех доступных альтернатив.

**На первом шаге** необходимо структурировать проблему в виде иерархии (рис. 1).

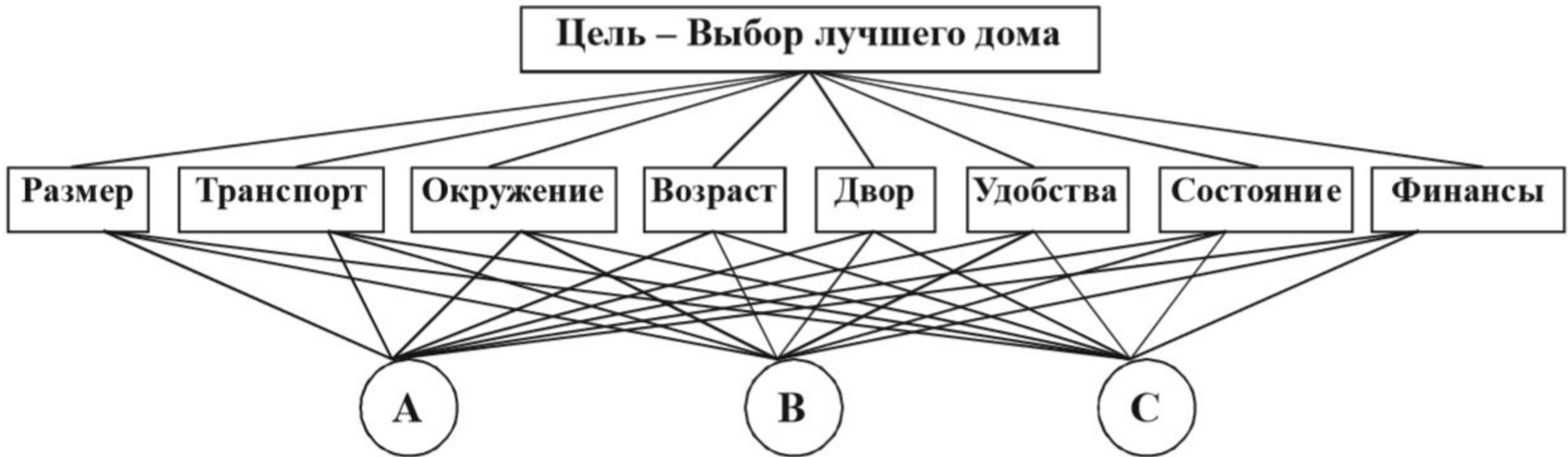


Рис. 1. Иерархия задачи о покупке дома

*На верхнем уровне* иерархии (в фокусе) располагается **главная цель** — выбор лучшего дома.

*На втором уровне* находятся восемь вышеназванных **критериев**, каждый из которых вносит определенный вклад в цель.

*На третьем* (самом нижнем) уровне — три **альтернативных дома**, которые оцениваются в терминах критериев, расположенных на втором уровне.

**На втором шаге** необходимо сформировать сравнительные суждения о важности критериев с точки зрения цели.

Для этого членам семьи необходимо выполнить попарные сравнения критериев относительно цели, выработать общее суждение для каждой пары и записать суждения в матрицу.

При сравнении двух критериев следует задавать вопросы следующего характера: «Какой из двух сравниваемых критериев важнее для семьи, покупающей дом, и на сколько он важнее с точки зрения цели, отражающей степень удовлетворения домом?»

Матрица парных сравнений факторов, сформированная покупателями дома, и вычисленные по ней приоритеты приведены в табл. 1.



*Таблица 1. Матрица парных сравнений критериев относительно цели выбора*

| Фактор           | Раз-<br>мер | Транс-<br>порт | Окру-<br>жение | Возраст | Двор | Удоб-<br>ства | Состо-<br>яние | Финан-<br>сы | Вектор<br>приори-<br>тетов $w$ | $v$   |
|------------------|-------------|----------------|----------------|---------|------|---------------|----------------|--------------|--------------------------------|-------|
| <b>Размер</b>    | 1           | 5              | 3              | 7       | 6    | 6             | 1/3            | 1/4          | 0.175                          | 0.042 |
| <b>Транспорт</b> | 1/5         | 1              | 1/3            | 5       | 3    | 3             | 1/5            | 1/7          | 0.062                          | 0.114 |
| <b>Окружен.</b>  | 1/3         | 3              | 1              | 6       | 3    | 4             | 1/2            | 1/5          | 0.103                          | 0.063 |
| <b>Возраст</b>   | 1/7         | 1/5            | 1/6            | 1       | 1/3  | 1/4           | 1/7            | 1/8          | 0.019                          | 0.368 |
| <b>Двор</b>      | 1/6         | 1/3            | 1/3            | 3       | 1    | 1/2           | 1/5            | 1/6          | 0.034                          | 0.194 |
| <b>Удобства</b>  | 1/6         | 1/3            | 1/4            | 4       | 2    | 1             | 1/5            | 1/6          | 0.041                          | 0.168 |
| <b>Состояние</b> | 3           | 5              | 2              | 7       | 5    | 5             | 1              | 1/2          | 0.221                          | 0.030 |
| <b>Финансы</b>   | 4           | 7              | 5              | 8       | 6    | 6             | 2              | 1            | 0.345                          | 0.021 |

Вектор приоритетов в табл. 1 показывает, что **Финансы** — самый важный критерий для семьи, поскольку он имеет максимальный приоритет (0.345).

Когда приходится сравнивать **более 9 объектов**, последние можно разделить на группы, внутри которых применяется тот же вид сравнений с применением девятибалльной шкалы.

При этом в каждой группе есть особый (центральный) элемент для связи с другими группами.

Приоритет любого элемента из одной группы следует разделить на вес центрального элемента в другой группе и умножить на вес центра своей группы, тогда приоритеты в этих двух группах сопоставимы и могут быть объединены и т. д.

Такой тип группирования называют **однородной кластеризацией**.

На **шаге 3** выбора дома семья должна попарно сравнить рассматриваемые альтернативы по каждому из восьми критериев. При этом нужно заполнить суждениями восемь матриц парных сравнений с размерностью 3 (число альтернатив). Эти матрицы приведены в табл. 3.

Таблица 3. Матрицы парных сравнений альтернатив

| Размер             | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | Нормирован. приоритеты | Идеализир. приоритеты |
|--------------------|----------|----------|----------|------------------------|-----------------------|
| <i>A</i>           | 1        | 5        | 9        | 0.743                  | 1.000                 |
| <i>B</i>           | 1/5      | 1        | 4        | 0.194                  | 0.261                 |
| <i>C</i>           | 1/9      | 1/4      | 1        | 0.063                  | 0.085                 |
| <i>C.R.</i> = 0.07 |          |          |          |                        |                       |

| Двор               | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | Нормирован. приоритеты | Идеализир. приоритеты |
|--------------------|----------|----------|----------|------------------------|-----------------------|
| <i>A</i>           | 1        | 6        | 4        | 0.691                  | 1.000                 |
| <i>B</i>           | 1/6      | 1        | 1/3      | 0.091                  | 0.132                 |
| <i>C</i>           | 1/4      | 3        | 1        | 0.218                  | 0.315                 |
| <i>C.R.</i> = 0.05 |          |          |          |                        |                       |

| Транспорт          | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | Нормирован. приоритеты | Идеализир. приоритеты |
|--------------------|----------|----------|----------|------------------------|-----------------------|
| <i>A</i>           | 1        | 4        | 1/5      | 0.194                  | 0.261                 |
| <i>B</i>           | 1/4      | 1        | 1/9      | 0.063                  | 0.085                 |
| <i>C</i>           | 5        | 9        | 1        | 0.743                  | 1.000                 |
| <i>C.R.</i> = 0.07 |          |          |          |                        |                       |

| Удобства           | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | Нормирован. приоритеты | Идеализир. приоритеты |
|--------------------|----------|----------|----------|------------------------|-----------------------|
| <i>A</i>           | 1        | 9        | 6        | 0.770                  | 1.000                 |
| <i>B</i>           | 1/9      | 1        | 1/3      | 0.068                  | 0.088                 |
| <i>C</i>           | 1/6      | 3        | 1        | 0.162                  | 0.210                 |
| <i>C.R.</i> = 0.05 |          |          |          |                        |                       |

| <b>Окружение</b>   | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | Нормирован. приоритеты | Идеализир. приоритеты |
|--------------------|----------|----------|----------|------------------------|-----------------------|
| <i>A</i>           | 1        | 9        | 4        | 0.717                  | 1.000                 |
| <i>B</i>           | 1/9      | 1        | 1/4      | 0.066                  | 0.092                 |
| <i>C</i>           | 1/4      | 4        | 1        | 0.217                  | 0.303                 |
| <i>C.R.</i> = 0.04 |          |          |          |                        |                       |

| <b>Состояние</b>   | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | Нормирован. приоритеты | Идеализир. Приоритеты |
|--------------------|----------|----------|----------|------------------------|-----------------------|
| <i>A</i>           | 1        | 1/2      | 1/2      | 0.200                  | 0.500                 |
| <i>B</i>           | 2        | 1        | 1        | 0.400                  | 1.000                 |
| <i>C</i>           | 2        | 1        | 1        | 0.400                  | 1.000                 |
| <i>C.R.</i> = 0.00 |          |          |          |                        |                       |

| <b>Возраст</b>     | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | Нормирован. приоритеты | Идеализир. приоритеты |
|--------------------|----------|----------|----------|------------------------|-----------------------|
| <i>A</i>           | 1        | 1        | 1        | 0.333                  | 1.000                 |
| <i>B</i>           | 1        | 1        | 1        | 0.333                  | 1.000                 |
| <i>C</i>           | 1        | 1        | 1        | 0.333                  | 1.000                 |
| <i>C.R.</i> = 0.00 |          |          |          |                        |                       |

| <b>Финансы</b>     | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | Нормирован.приоритеты | Идеализир. Приоритеты |
|--------------------|----------|----------|----------|-----------------------|-----------------------|
| <i>A</i>           | 1        | 1/7      | 1/5      | 0.072                 | 0.111                 |
| <i>B</i>           | 7        | 1        | 3        | 0.650                 | 1.000                 |
| <i>C</i>           | 5        | 1/3      | 1        | 0.278                 | 0.430                 |
| <i>C.R.</i> = 0.06 |          |          |          |                       |                       |

На **шаге 4** выполняется синтез обобщенных (глобальных) приоритетов.

Для того чтобы определить глобальные приоритеты альтернатив, мы умножаем локальные приоритеты рассматриваемых вариантов на приоритеты соответствующих критериев.

Последующее суммирование полученных значений по всем критериям дает компоненты вектора глобальных приоритетов альтернатив.

В табл. 4 приведены значения приоритетов альтернатив по критериям, вычисленные двумя способами.

Оба способа содержат процедуру линейной свертки на иерархии, а отличаются тем, что в традиционном для АНР способе вычисления глобальных приоритетов, называемом распределенным (дистрибутивным), используются собственные векторы матриц парных сравнений, где значения нормированы на сумму, а в идеальном способе значения главных собственных векторов матриц парных сравнений (т. е. распределенные приоритеты) нормируются на максимум.

В рассматриваемом примере оба результата, полученные разными способами, совпадают: лучшая альтернатива — дом В, на втором месте — А, а на третьем — С.



Таблица 4. Распределенный и идеальный синтез глобальных приоритетов альтернатив

| Веса критериев               | Размер<br>(0.175) | Транспорт<br>(0.062) | Окружение<br>(0.103) | Возраст<br>(0.019) | Двор<br>(0.034) | Удобства<br>(0.041) | Состояние<br>(0.221) | Финансы<br>(0.345) | Глобальные |
|------------------------------|-------------------|----------------------|----------------------|--------------------|-----------------|---------------------|----------------------|--------------------|------------|
| <i>Распределенный способ</i> |                   |                      |                      |                    |                 |                     |                      |                    |            |
| <i>A</i>                     | 0.743             | 0.194                | 0.717                | 0.333              | 0.691           | 0.770               | 0.200                | 0.072              | 0.346      |
| <i>B</i>                     | 0.194             | 0.063                | 0.066                | 0.333              | 0.091           | 0.068               | 0.400                | 0.649              | 0.369      |
| <i>C</i>                     | 0.063             | 0.743                | 0.217                | 0.333              | 0.218           | 0.162               | 0.400                | 0.279              | 0.285      |
| <i>Идеальный способ</i>      |                   |                      |                      |                    |                 |                     |                      |                    |            |
| <i>A</i>                     | 1.000             | 0.261                | 1.000                | 1.000              | 1.000           | 1.000               | 0.500                | 0.111              | 0.315      |
| <i>B</i>                     | 0.261             | 0.085                | 0.092                | 1.000              | 0.132           | 0.088               | 1.000                | 1.000              | 0.383      |
| <i>C</i>                     | 0.085             | 1.000                | 0.303                | 1.000              | 0.315           | 0.210               | 1.000                | 0.430              | 0.302      |

В общем случае упорядочения альтернатив, полученные разными способами, могут не совпадать.

**Идеальный способ** подходит для случаев, когда критерии не зависят от альтернатив. Тогда альтернативы можно оценивать по каждому критерию по отдельности, не учитывая остальные. Идеальный способ обеспечивает сохранение порядка при добавлении новых альтернатив к исходному множеству.

При применении **распределенного способа** порядок может измениться при добавлении новых альтернатив, что во многих случаях больше соответствует реальности

## Пример

Рассмотрим предприятие, оказывающее телекоммуникационные услуги (например, сотовая связь и доступ в Интернет). Необходимо разрешить проблему распределения финансовых ресурсов по следующим основным трем направлениям работы фирмы:

1. Техническое и информационное обеспечение деятельности фирмы (ТИО).
2. Работа с клиентами (РК).
3. Работа с персоналом (РП).

Таким образом надо на числовой оси упорядочить альтернативы ТИО, РК и РП.

Здесь необходимо наметить некую общую цель, например, упорядочить альтернативы, чтобы обеспечить наиболее эффективную деятельность фирмы (Ц).

В свою очередь, цель определяется вкладом каждого пользователя (альтернативы) в обеспечение эффективной финансовой деятельности фирмы (**ФД**), в формирование благоприятного имиджа фирмы (**И**) и в обеспечение территориального охвата (количество филиалов) (**ТО**).

Эксперт не в состоянии дать оценку сравнительного влияния каждой альтернативы на общую цель **Ц**.

Но он может определить сравнительное влияние альтернатив на элементы промежуточного уровня: **ФД**, **И**, **ТО**.

Также эксперт может оценить сравнительное влияние элементов промежуточного уровня на **Ц**.

Построим матрицу попарных сравнений влияния промежуточных элементов (критериев) на общую цель.

| Ц  | ФД  | И   | Т |
|----|-----|-----|---|
| ФД | 1   | 3   | 5 |
| И  | 1/3 | 1   | 2 |
| Т  | 1/5 | 1/2 | 1 |

Финансы с точки зрения цели Ц имеют сильное превосходство перед территориальным охватом (в 5 раз) и не очень сильное перед имиджем фирмы (в 3 раза).

⊙ определим собственный вектор матрицы – вектор приоритетов  $W_{\max}^{\square}$

$$Ae = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1/3 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3,33 \\ 1,7 \end{pmatrix};$$

$$e^T Ae = (1 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} 9 \\ 3,33 \\ 1,7 \end{pmatrix} = 14,03;$$

$$W_{\max}^{\square} = \frac{Ae}{e^T Ae} = (9/14,03 \quad 3,33/14,03 \quad 1,7/14,03)^T = (0,64 \quad 0,24 \quad 0,12)^T$$

Обозначим этот собственный вектор через  $W^*$ . Максимальное собственное число и индекс согласованности раны:

$$\lambda_{max}^u = (1 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1/3 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,64 \\ 0,24 \\ 0,12 \end{pmatrix} = 3,02$$

$$I_u = \frac{3,02 - 3}{3 - 1} = 0,01$$

Значение индекса согласованности меньше 0,1.

Финансы получают приоритет 0,64; имидж – 0,24;  
территориальный охват – 0,12.

Проведем оценку относительной важности каждого направления работы фирмы с точки зрения формирования финансовой деятельности, имиджа и обеспечения территориальной целостности.

Соответствующие матрицы попарных сравнений, индексы согласованности и векторы приоритетов имеют следующий вид:



| ФД  | ТИО | РК  | РП |
|-----|-----|-----|----|
| ТИО | 1   | 1/2 | 3  |
| РК  | 2   | 1   | 4  |
| РП  | 1/3 | 1/4 | 1  |

$$W^{\text{ФД}}_{\max} = (0,34 \quad 0,54 \quad 0,12)^T$$

$$\lambda_{\max}^{\text{ФД}} = 3,05$$

$$I^{\text{ФД}} = 0,025 < 0,1$$

На финансы оказывает больше всего влияние работа с клиентами, затем техническое и информационное обеспечение, меньше всего – работа с персоналом.

| И   | ТНО | РК  | РП |
|-----|-----|-----|----|
| ТНО | 1   | 1/2 | 2  |
| РК  | 2   | 1   | 5  |
| РП  | 1/2 | 1/5 | 1  |

$$W^I_{\max} = (0,26 \quad 0,6 \quad 0,128)^T$$

$$\lambda_{\max}^I = 2,996$$

$$|I^I| = -0,002 < 0,1$$

| ТО  | ТНО | РК  | РП |
|-----|-----|-----|----|
| ТНО | 1   | 1/2 | 2  |
| РК  | 2   | 1   | 6  |
| РП  | 1/2 | 1/5 | 1  |

$$W^I_{\max} = (0,25 \quad 0,63 \quad 0,12)^T$$

$$\lambda_{\max}^I = 3,017$$

$$|I^I| = 0,009 < 0,1$$

Запишем полученные столбцы в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0,34 & 0,26 & 0,25 \\ 0,54 & 0,6 & 0,63 \\ 0,12 & 0,128 & 0,12 \end{pmatrix}$$

Умножая эту матрицу на вектор  $W_{\max}^{\zeta}$ , находим искомый столбец приоритетов третьего уровня иерархии, представляющего собой распределение финансовых ресурсов по основным трем направлениям работы фирмы ТИП, РК и РП:

$$\begin{pmatrix} 0,34 & 0,26 & 0,25 \\ 0,54 & 0,6 & 0,63 \\ 0,12 & 0,128 & 0,12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,64 \\ 0,24 \\ 0,12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,31 \\ 0,57 \\ 0,12 \end{pmatrix}$$

Следовательно, в соответствии с вычислениями (и учитывая субъективное мнение эксперта) на техническое и информационное обеспечение следует выделить 31% средств, на работу с клиентами – 57%, на работу с персоналом – 12%.

Итоговый граф иерархий имеет следующий вид:

