

Обобщающий урок по алгебре
и началам анализа в 11 классе

«Решение показательных уравнений»

Учитель математики Золина А. В.
(Пустошенская МСОШ)

Цели урока:

- ❖ обобщить и систематизировать знания о методах решения показательных уравнений;
- ❖ закрепить умение применять эти знания при решении показательных уравнений;
- ❖ углубить знания учащихся по данной теме через решение показательных уравнений с параметрами

Ответьте на вопросы:

Показательным уравнением называется
Какое уравнение называется показательным?
уравнение вида $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$ и b –
некоторое число.

Сколько корней имеет показательное уравнение при
При $b \leq 0$ уравнение не имеет корней, так
как $a^x > 0$.

Сколько корней имеет показательное уравнение при
При $b > 0$ уравнение имеет один корень.
 $b > 0$?

Метод
уравнивания
показателей

Вынесение за
скобку общего
множителя

Методы
решения
показательных
уравнений

Метод
введения
новой
переменной

Решение
однородного
уравнения

Функциональ-
но-
графический
метод

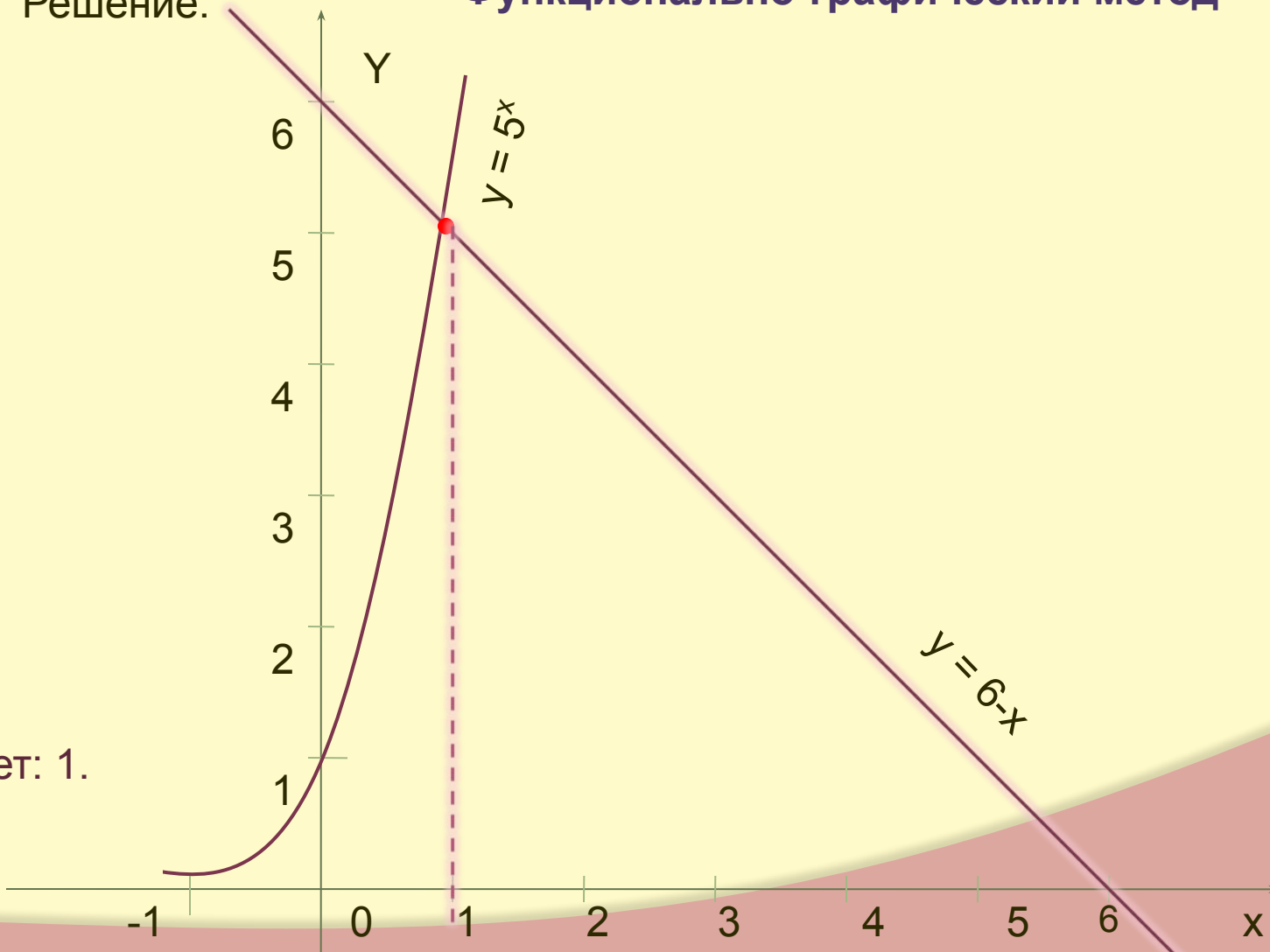


Решите уравнения:

1. $5^x = 6 - x$

Решение.

Функционально-графический метод



Ответ: 1.

$$2. \quad 2^{2x-4}=64$$

Метод уравнивания показателей

Решение.

Учитывая, что $64=2^6$, приведем уравнение

к виду

$$2^{2x-4}=2^6.$$

$$2x-4=6;$$

$$x=5$$

Ответ: 5.

$$3. \quad 5 \cdot 2^{x+2} - 16 \cdot 2^x - 64 = 0$$

Вынесение за скобку общего множителя

Решение.

$$5 \cdot 4 \cdot 2^x - 16 \cdot 2^x - 64 = 0;$$

$$2^x (20 - 16) = 64;$$

$$2^x \cdot 4 = 64;$$

$$2^x = 16;$$

$$x = 4;$$

Ответ: 4.

$$4. \quad 4^x - 2 \cdot 2^x - 24 = 0$$

Метод введения новой переменной

Решение.

$$4^x - (2^2)^x = 2^{2x};$$

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 24 = 0;$$

Пусть $t = 2^x$, тогда

$$t^2 + 2t - 24 = 0;$$

$$t_1 = 4 \text{ или } t_2 = -6;$$

$$2^x = 4; \text{ или } 2^x = -6$$

$x = 2$ решений нет,
 т.к. $2^x > 0$

Ответ: 2.

$$5. \quad 5 \cdot 5^{2x} - 13 \cdot 15^x + 6 \cdot 3^{2x} = 0$$

Решение однородного уравнения

Решение.

Разделим обе части уравнения на 3^{2x} :

$$5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - \frac{13 \cdot 3^x \cdot 5^x}{3^{2x}} + 6 = 0;$$

$$5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - \frac{13 \cdot 5^x}{3^x} + 6 = 0;$$

$$5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x + 6 = 0;$$

$$t = \left(\frac{5}{3}\right)^x, \text{ тогда } 5t^2 - 13t + 6 = 0$$

$$t_1 = \frac{3}{5}, \quad t_2 = 2;$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{3}{5}, \quad \left(\frac{5}{3}\right)^x = 2;$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^{-1};$$

$$x = -1, \quad x = \log_{\frac{5}{3}} 2$$

Решение уравнения с параметром

При каких значениях p уравнение $3 \cdot 3^{2x} + p \cdot 3^x + p - 3 = 0$ имеет один корень?

Решение.

Пусть $3^x = t$, где $t > 0$, тогда

$$3t^2 + pt + p - 3 = 0$$

Уравнение $3 \cdot 3^{2x} + p \cdot 3^x + p - 3 = 0$ имеет один корень в двух случаях:

- 1) если квадратное уравнение $3t^2 + pt + p - 3 = 0$ имеет один корень и этот корень положительный ($3^x > 0$, то есть $t > 0$);
- 2) если квадратное уравнение $3t^2 + pt + p - 3 = 0$ имеет два корня и эти корни имеют разные знаки (один корень будет посторонний, остается один корень).

Рассмотрим каждый из указанных случаев.

1) $3t^2 + pt + p - 3 = 0$ имеет один корень, если $D = 0$.

$$D = p^2 - 12(p-3) = p^2 - 12p + 36 = (p-6)^2$$

$$D = 0 \text{ при } p = 6.$$

Проверим, выполняется ли при этом условие $t > 0$. Подставив найденные значения p в квадратное уравнение, получим: $3t^2 + 6t + 3 = 0$, $t^2 + 2t + 1 = 0$, $(t+1)^2 = 0$, $t = -1$.

Условие не выполняется, значит, при $p = 6$ показательное уравнение

$3 \cdot 3^{2x} + p \cdot 3^x + p - 3 = 0$ корней не имеет.

2) При $p \neq 6$ $D > 0$, значит квадратное уравнение $3t^2 + pt + p - 3 = 0$ имеет два корня.

Нам нужно, чтобы корни были разных знаков, то есть по теореме Виета

$$t_1 t_2 = \frac{p-3}{3} < 0, \text{ откуда } p < 3.$$

Ответ: при $p < 3$ уравнение $3 \cdot 3^{2x} + p \cdot 3^x + p - 3 = 0$ имеет один корень.

Реши уравнение – расшифруй

КОД

Вариант 1

1. $7^{4x+9} = \frac{1}{49}$. (М)

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x-7} = \frac{1}{8}$. (Е)

3. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{3x-5} = 2\sqrt{2}$. (Р)

4. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-6x+6} = 9$. (О)

Вариант 2

5. $5^{x^2-5x+6} = 1$. (ВИ)

6. $6^{2x^2+3x} = \left(\frac{1}{36}\right)^{x+1}$. (Н)

7. $\left(\frac{1}{125}\right)^{2x+1} = 25^{4x-3}$. (Е)

8. $3^{3x^2-18x+4} = (\sqrt{3})^{x+2}$. (С)

9. $(\sqrt{3})^{4x+1} = 27^x$. (Т)

Вариант 3

10. $5^{2x} = 3$. (ЕЛЬ)

11. $3^{x+2} - 3^x = 216$. (ТИ)

12. $5^{x+3} + 5^{x+2} + 5^{x+1}$. (Ф)

13. $2^{2x-3} + 2^{2x+2} = 132$. (Ш)

Вариант 4

14. $5^{2x} - 4 \cdot 5^x - 5 = 0$. (ОН)

15. $4^x - 2 \cdot 2^x = 48$. (Ь)

16. $5^x + 5 \cdot 5^{-x} - 6 = 0$. (ЮТ)

17. $2 \cdot 5^{2x} - 7 \cdot 10^x + 5 \cdot 2^{2x} = 0$. (Н)

Узнай имена ученых,

внесших вклад в изучение степеней с рациональными показателями

Вариант 1

О	Р	Е	М
2; 4	$2\frac{2}{3}$	2	-8,75

Вариант 2

С	Т	Е	ВИ	Н
$\frac{1}{6}$; 6	0,5	$\frac{3}{14}$	2,3	-2; -0,5

Вариант 3

Ш	ТИ	Ф	ЕЛЬ
2,5	3	-3	$\lg 3$

Вариант 4

Н	Ь	ЮТ	ОН
0; 1	-6; 8	1; 5	1

По страницам истории науки

Nicolas Oresme



Орем Николай
(до 1330 – 11 июля 1382гг.)
место рождения – Нормандия
научная сфера - философ

- ❖ Католический богослов, епископ, один из наиболее известных французских философов и учёных XIV в. Его научные труды повлияли на Николая Кузанского, Коперника, Галилея и Декарта.
- ❖ **Математика.** Орему принадлежит математический трактат «Вычисление пропорций», в котором он впервые использовал степени с дробными показателями и фактически вплотную подошёл к идее логарифмов.
- ❖ **Физика.** Выводы Орема в области естествознания были по-настоящему революционны для своего времени. В «Книге о небе и мире» он обсуждает вопрос о возможности объяснения суточного вращения небесной сферы вращением Земли вокруг оси, в противовес постулату Аристотеля о вращении Неба. В трактате «О конфигурации качеств» Орем изобретает графическое представление для переменной величины, зависящей от пространственных координат либо от времени. Он изображает движение, откладывая по горизонтальной оси время, а по вертикальной — интенсивность движения в данный момент времени (величину, кот. впоследствии назвали мгновенной скоростью). Он доказывает теорему о том, что тело, движущееся равноускоренным движением, проходит за данное время то же самое расстояние, которое прошло бы за это же время тело, движущееся равномерным движением со скоростью, равной средней скорости первого тела.

Simon Stevin



Сімон Стéвин

(1548—1620)

фламандский математик-
универсал, инженер

- ❖ Подробности о жизни Стевина до нас не дошли. Он начинал как купец из Брюгге (сейчас это Бельгия), участвовал в голландской революции. Не установлены точные даты его рождения и смерти. Известно, что он много путешествовал по торговым делам, затем некоторое время был личным советником принца Морица Оранского.
- ❖ Стевин стал известен прежде всего своей книгой «Десятая» 1585 г. Именно после неё в Европе началось широкое использование десятичных дробей.
- ❖ Другая заслуга Стевина — разрыв с античной традицией и полное уравнение в правах иррациональных чисел. В своём трактате «Арифметика» он определяет число как «меру количества некоей вещи» и провозгласил, что «единица делима», и что нет никаких иррациональных, неправильных и т. д. чисел. С некоторой осторожностью он использовал и отрицательные числа.
- ❖ **Вслед за Оремом, Стевин вводит дробные (хотя в данном случае — не десятичные) показатели степени (например, $2/3$).**
- ❖ Он же доказал закон равновесия тела на наклонной плоскости, исходя из невозможности вечного двигателя.
- ❖ Около 1600 г. Стевин продемонстрировал своё изобретение — сухопутную парусную яхту на колёсах, и прокатил на ней принца вдоль побережья быстрее, чем на лошади.
- ❖ Помимо всего перечисленного, Стевин писал труды по механике, геометрии, теории музыки, изобрёл двойную бухгалтерскую регистрацию (дебет/кредит).

Michael Stifel,

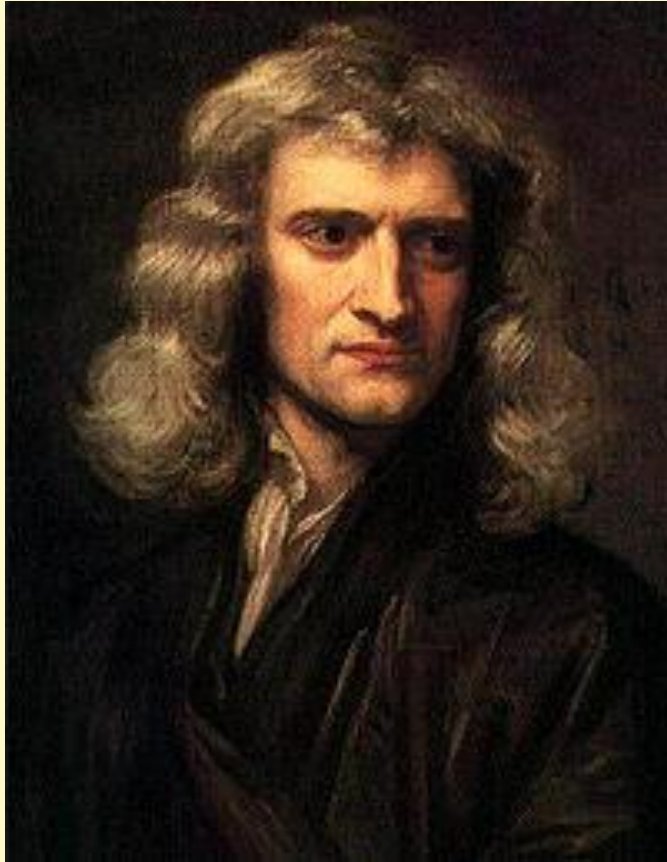
Михаэль Штифель

(около 1487 — 19 апреля 1567)

немецкий математик один из изобретателей логарифмов, активный деятель протестантской Реформации.

- ❖ Штифель вырос в богатой семье. Он учился в Виттенбергском университете, где получил звание магистра. В 1511 Ш. постригся в монахи. Вскоре началась Реформация и Ш. стал на сторону Лютера
- ❖ С 1535 по 1547г. Ш. был протестантским пастором в Хольцдорфе. К этому периоду относятся его главные труды в области математики. В 1559г он переехал в Йену где стал первым профессором математики в университете города.
- ❖ В этой же книге он впервые высказал идею, которая позже легла в основу теории логарифмов и поэтому считается одним из их изобретателей: сопоставить геометрическую и арифметическую прогрессии, благодаря чему трудоёмкое умножение на второй шкале можно заменить простым сложением на первой. Штифель, однако, не опубликовал никаких расчётных таблиц для реализации своей идеи, и Штифель оставил заметный след в развитии алгебры. В его главном труде *Arithmetica integra* (1544) он дал содержательную теорию отрицательных чисел, возведения в степень, различных прогрессий и других последовательностей. **Ш. впервые использовал понятия «корень» и «показатель степени», причём подробно анализировал и целые, и дробные показатели.** Опубликовал правило образования биномиальных коэффициентов и составил их таблицы до 18-й степени. Ш. переработал (фактически написал заново) книгу алгебраиста Кристофа Рудольфа, и использованные там современные обозначения арифметических операций с этого момента укоренились в математике (1553). слава первооткрывателя логарифмов досталась Неперу.

Isaac Newton



Исаак Ньютон
(4января 1643 – 31марта 1727г.)
английский физик, математик и
астроном, один из создателей
классической физики.

Автор фундаментального труда «Математические начала натуральной философии», в котором он изложил закон всемирного тяготения и три закона механики, разработал дифференциальное и интегральное исчисление, теорию цветности и многие другие математические и физические теории.

Ньютон добавил к современному знаку символа корня, введенному Декартом, показатели корней: и систематически начал их употреблять. $\sqrt[3]{\quad}$; $\sqrt[4]{\quad}$

Ньютон открыл биномиальное разложение произвольной (не обязательно целой) степени, с которого начинается ньютоновская теория бесконечных рядов — нового и мощнейшего инструмента анализа. Разложение в ряд Ньютон считал основным и общим методом анализа функций, и в этом деле достиг вершин мастерства. Он использовал ряды для вычисления таблиц, решения уравнений (в том числе дифференциальных), исследования поведения функций. Ньютон сумел получить разложение для всех стандартных на тот момент функций.

Ньютон разработал дифференциальное и интегральное исчисление. До Ньютона действия с бесконечно малыми не были увязаны в единую теорию и носили характер разрозненных остроумных приёмов. Создание системного математического анализа сводит решение соответствующих задач, в значительной степени, до технического уровня. Появился комплекс понятий, операций и символов, ставший отправной базой дальнейшего развития математики. Следующий, XVIII век, стал веком бурного и чрезвычайно успешного развития аналитических методов.

Лагранж говорил: «*Ньютон был счастливейшим из смертных, ибо существует только одна Вселенная, и Ньютон открыл её законы*».

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

Норма оценок: на «3» - А1 - А4,

на «4» - В1 –В5,

на «5» – В3 - В6

Отметьте номер правильного ответа в заданиях А1-А4

А1. Решите уравнение $(0,5)^{5-x} = 16\sqrt{2}$.

1. -0,5. 2. -9,5. 3. 0,5. 4. 9,5

А2. Найдите корень уравнения $6^{x-4} = 216^{-x}$

1. 1. 2. 2. 3. -1. 4. -2.

А3. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{5x} = 36$

1. (0;1). 2. (-1;0). 3. (-3;-2). 4. (2;3).

А4. Найдите корень уравнения $3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$.

1. 9 2. 2. 3. 3. 4. -1.

Ответом в заданиях В1-В6 должно быть целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

В1. Решите уравнение $5 \cdot 3^{2x} + 7 \cdot 15^x - 6 \cdot 5^{2x} = 0$.

В2. Найдите наибольший корень уравнения $6^{5x^2-5x} = 2 = \left(\frac{1}{6}\right)^{1-3x}$

В3. Найдите наименьший корень уравнения $(\sqrt[4]{3})^{4x^2+9x-1} = 3^{3x}$.

В4. Найдите сумму корней уравнения $7^{2x} - 50 \cdot 7^x + 49 = 0$.

В5. Найдите сумму корней уравнения $5^{2x+1} - 26 \cdot 5^x + 5 = 0$.

В6. При каких значениях параметра p уравнение $4^{x+1} + p \cdot 2^x + 5 = 0$ имеет один корень?

Проверь себя

Ответы:

	1	2	3	4
A1				✗
A2	✗			
A3		✗		
A4				✗

B1	1					
B2	1					
B3	-	0	,	2	5	
B4	2					
B5	0					
B6	-	4				