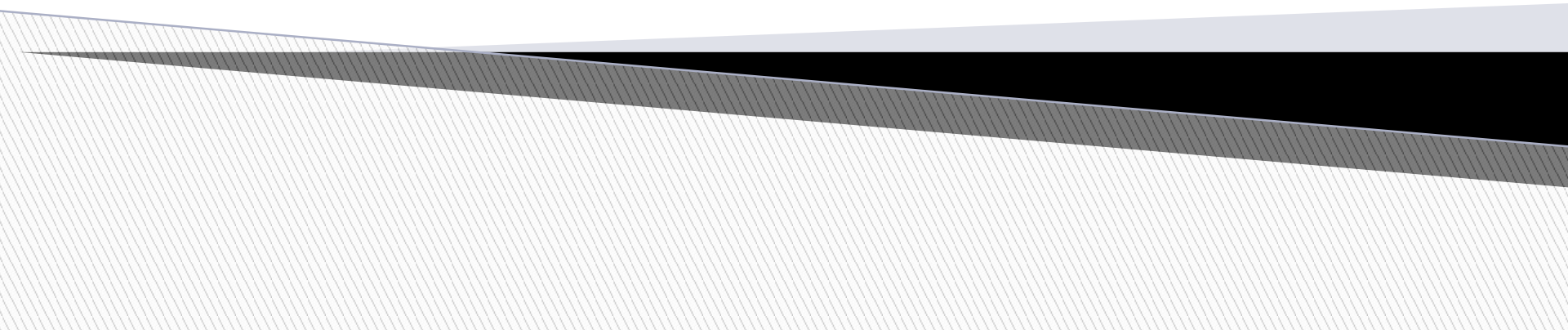


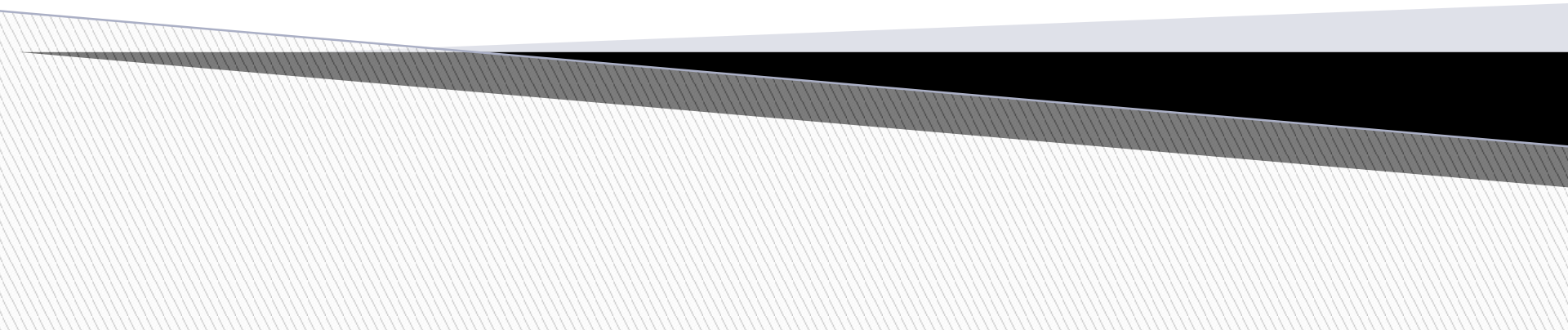
*ФГАОУ ВПО «Северо-Восточный федеральный университет им. М.К.
Аммосова»
Инженерно-технический институт
Кафедра прикладной механики*

**Решение задач
по дисциплине «Техническая механика»
270800 - Строительство**

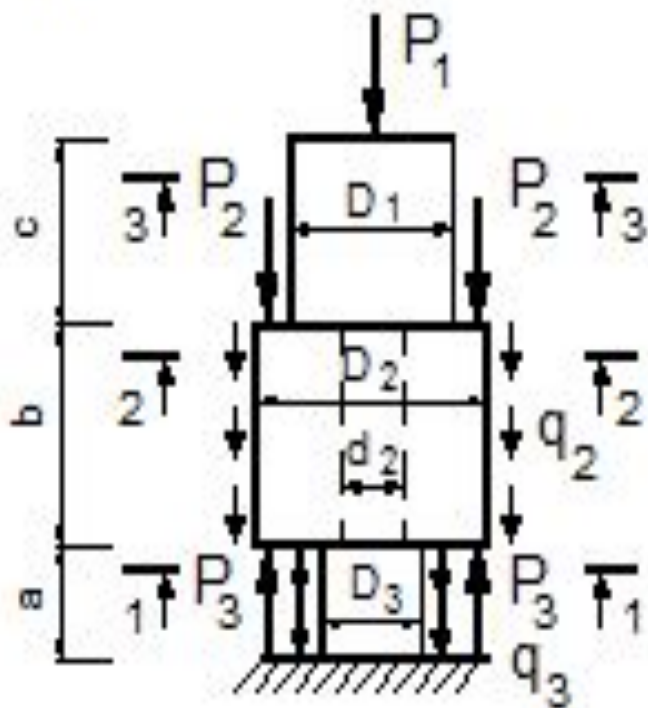


Центральное растяжение-сжатие

Расчет ступенчатого бруса



a)



На ступенчатую конструкцию со сплошным круглым сечением верхней и нижней частей диаметрами $D_1=1\text{ м}$, $D_3=1,5\text{ м}$ и кольцевым сечением средней части с размерами $D_2=2,0\text{ м}$, $d_2=0,6\text{ м}$ действуют сосредоточенные силы P_1 , P_2 и P_3 , а так же собственные веса от обмуровки по наружным поверхностям средней и нижней части $q_2=2,0\text{ кН/м}^2$, $q_3=3,0\text{ кН/м}^2$. Объемный вес материала конструкции $\gamma_{об}=8\text{ кН/м}^3$, $P_1=20\text{ кН}$, $P_2=15\text{ кН}$, $P_3=6\text{ кН}$, $a=2\text{ м}$, $b=1,5\text{ м}$, $c=1,2\text{ м}$, $E=0,8 \cdot 10^5\text{ МПа}=8 \cdot 10^7\text{ кПа}$.

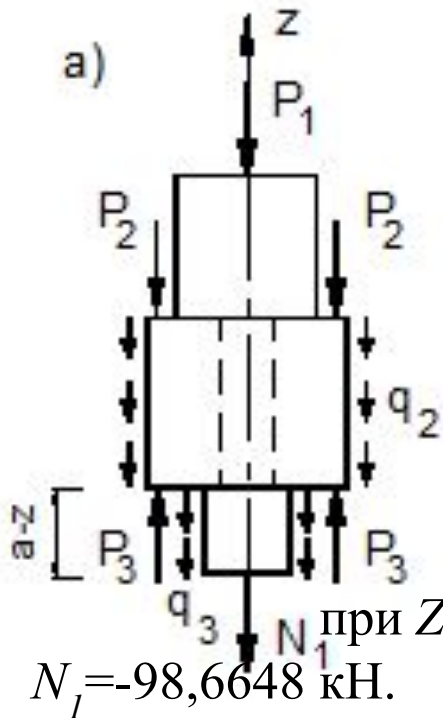
Требуется:

1. Определить внутренние усилия в сечениях бруса с учетом собственного веса конструкции и построить их эпюры.
2. Определить напряжения в сечениях бруса и построить их эпюры.
3. Определить перемещения сечений бруса и построить эпюры перемещений.
4. Определить наибольшее значение относительной линейной деформации и указать участок возникновения.
5. Проверить условие прочности бруса по местным напряжениям, возникающим в стыках отдельных частей бруса, если $[\sigma]=0,10 \text{ МПа}=100 \text{ кПа}$.

Решение

Для определения внутренних усилий и перемещений в сечениях бруса конструкцию делим на три отдельных участка и, применяя метод сечений, на каждом участке рассматриваем равновесие отсеченных частей и вычисляем величины продольных сил N_i .

I участок : $0 \leq Z \leq a$,



$$\sum Z = -N_1 - P_1 - 2P_2 + 2P_3 - q_2 \cdot \pi \cdot D_2 \cdot b - q_3 \cdot \pi \cdot D_3 \cdot (a - Z) - \gamma_{об} \left(\frac{\pi D_1^2}{4} \cdot c + \frac{\pi (D_2^2 - d_2^2)}{4} \cdot b + \frac{\pi D_3^2}{4} (a - Z) \right) = 0$$

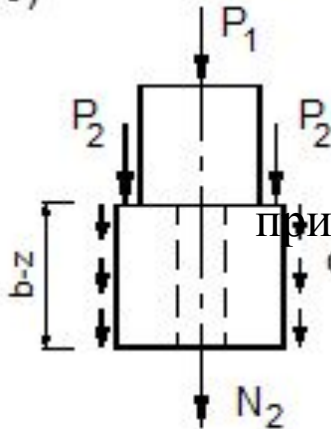
$$N_1 = - \left[P_1 + 2P_2 - 2P_3 + q_2 \cdot \pi \cdot D_2 \cdot b + q_3 \cdot \pi \cdot D_3 \cdot (a - Z) + \gamma_{об} \left(\frac{\pi \cdot D_1^2}{4} \cdot C + \frac{\pi (D_2^2 - d_2^2)}{4} \cdot b + \frac{\pi \cdot D_3^2}{4} \cdot (a - Z) \right) \right],$$

$$N_I = -155,1848 \text{ кН,}$$

$$Z = 2 \text{ м,}$$

II участок: $0 \leq Z \leq b$,

б)



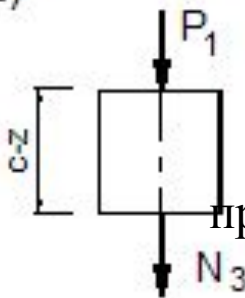
$$\sum Z = -N_2 - P_1 - 2P_2 - q_2 \pi D_2 (b - Z) - \gamma_{об} \left(\frac{\pi \cdot D_1^2}{4} \cdot C + \frac{\pi (D_2^2 - d_2^2)}{4} \cdot (b - Z) \right) = 0$$

$$N_2 = - \left[P_1 + 2P_2 + q_2 \pi D_2 (b - Z) + \gamma_{об} \left(\frac{\pi D_1^2}{4} \cdot C + \frac{\pi (D_2^2 - d_2^2)}{4} \cdot (b - Z) \right) \right],$$

при $Z=0$, $N_2 = -110,6648$ кН,
 $Z=1,5$ м, $N_2 = -57,536$ кН.

III участок: $0 \leq Z \leq c$,

в)

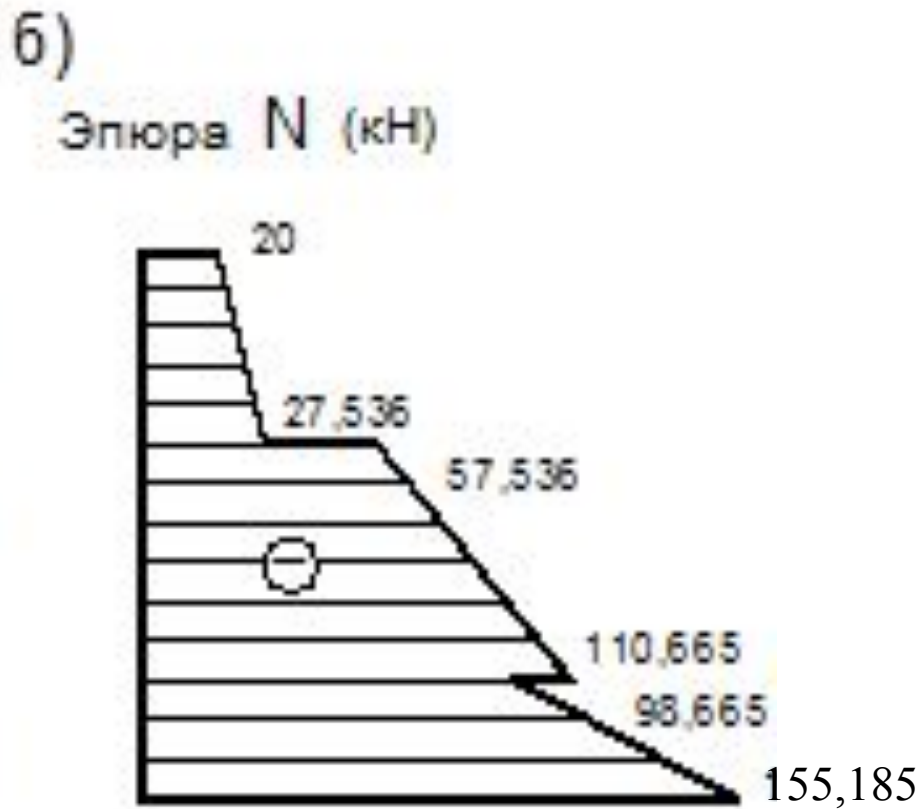
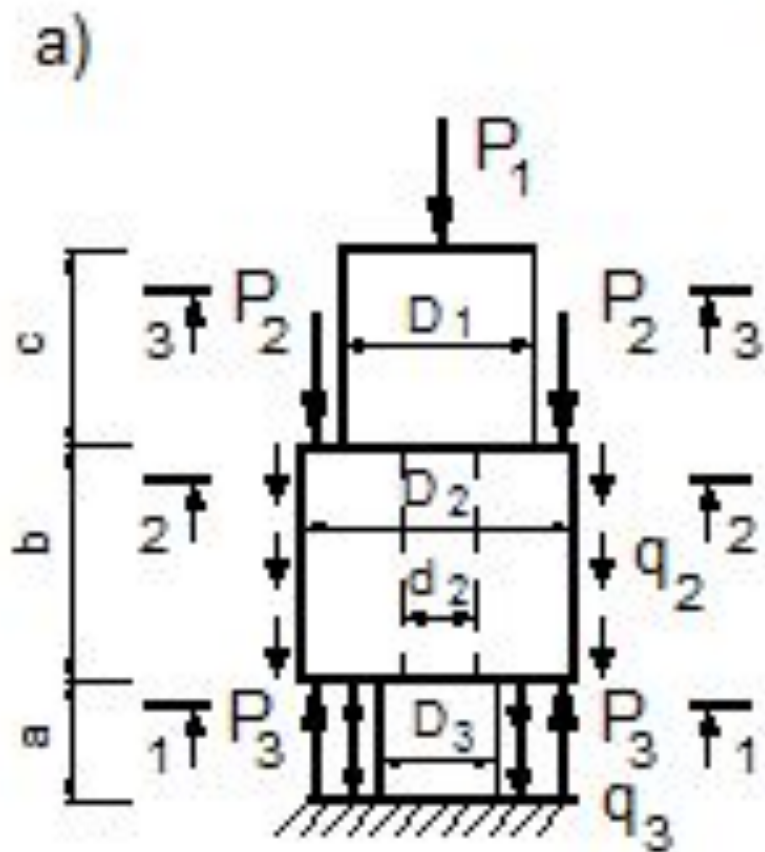


$$\sum Z = -N_3 - P_1 - \gamma_{об} \cdot \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} \cdot (C - Z) = 0$$

$$N_3 = - \left[P_1 + \gamma_{об} \cdot \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} \cdot (C - Z) \right],$$

при $Z=0$, $N_3 = -27,536$ кН,
 $Z=1,2$ м, $N_3 = -20$ кН.

По полученным значениям строим эпюру продольных сил N (рис.б)



Используя формулу $\sigma = \frac{N}{A}$, определяем нормальные напряжения в сечениях бруса. Так как в пределах рассматриваемых участков брус имеет постоянное поперечное сечение A_i , функция распределения нормальных напряжений σ будет такой же, как и функция изменения продольной силы N .

1 участок:

$$\sigma = \frac{N_1}{A_1}; \quad A_1 = \frac{\pi D_3^2}{4} = 1,76625 \text{ м}^2,$$

при $Z=0$

$$\sigma = -\frac{155,1848}{1,76625} = -87,86 \text{ кПа},$$

$Z=2 \text{ м}$

$$\sigma = -\frac{98,6648}{1,76625} = -55,86 \text{ кПа}.$$

II участок: $\sigma = \frac{N_2}{A_2}; \quad A_2 = \frac{\pi(D_2^2 - d_2^2)}{4} = 2,8574 \text{ м}^2$

при $Z=0$ $\sigma = -\frac{110,6648}{2,8574} = -38,7292 \text{ кПа}$

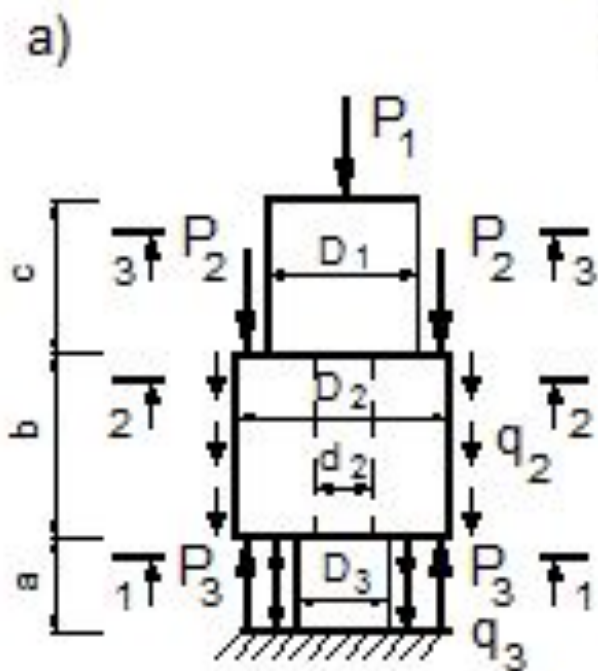
$Z=1,5 \text{ м}$ $\sigma = -\frac{57,536}{2,8574} = -20,1358 \text{ кПа.}$

III участок: $\sigma = \frac{N_3}{A_3}; \quad A_3 = \frac{\pi D_1^2}{4} = 0,785 \text{ м}^2$

при $Z=0$ $\sigma = -\frac{27,536}{0,785} = -35,0777 \text{ кПа}$

$Z=1,2$ $\sigma = -\frac{20,0}{0,785} = -25,4777 \text{ кПа.}$

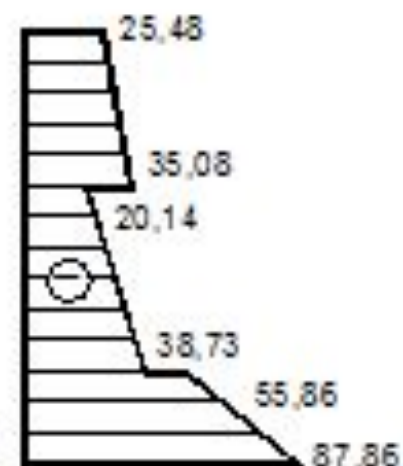
По этим значениям строим эпюру нормальных напряжений σ (рис.в).



б)
Эпюра N (кН)



в)
Эпюра σ (кПа)



Для получения уравнений перемещения сечений бруса используем формулу:

$$\Delta \varphi_i = \Delta \varphi_{i-1} + \int_0^{\varphi_i} \frac{N \cdot dZ}{EA_i} = \Delta \varphi_{i-1} + \frac{P_i Z}{EA_i} + \frac{q_i Z^2}{2EA_i} + \frac{\gamma_{об} Z^2}{2E}.$$

На рассматриваемом участке продольная сила, действующая на стыке со следующим участком, принимается как сосредоточенная сила.

<u>I участок</u>	$P_I = N_1(Z = 2 \text{ м}) = -98,6648 \text{ кН}$	$q_I = q_3 \cdot \pi D_3 = 14,13 \text{ кН/м}$
	$\Delta \varphi_I = -\frac{98,6648 \cdot Z}{8 \cdot 10^7 \cdot 1,76625} - \frac{14,13 \cdot Z^2}{2 \cdot 8 \cdot 10^7 \cdot 1,76625} - \frac{8 \cdot Z^2}{2 \cdot 8 \cdot 10^7};$	
$Z=0$	$\Delta \varphi_I = 0,$	
$Z=1$	$\Delta \varphi_I = -7,9826 \cdot 10^{-7} \text{ м},$	
$Z=2 \text{ м}$	$\Delta \varphi_I = -17,9826 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$	

II участок $P_{II} = N_2(Z = 1,5 \text{ м}) = -57,536 \text{ кН}$ $q_{II} = q_2 \cdot \pi D_2 = 12,56 \text{ кН/м}$

$$\Delta \square_{II} = -17,9826 \cdot 10^{-7} - \frac{57,536 \cdot Z}{8 \cdot 10^7 \cdot 2,8574} - \frac{8 \cdot Z^2}{2 \cdot 8 \cdot 10^7} - \frac{12,56 \cdot Z^2}{2 \cdot 8 \cdot 10^7 \cdot 2,8574};$$

$Z=0$ $\Delta \square_{II} = -17,9826 \cdot 10^{-7} \text{ м,}$

$Z=0,75 \text{ м}$ $\Delta \square_{II} = -22,044 \cdot 10^{-7} \text{ м,}$

$Z=1,5 \text{ м}$ $\Delta \square_{II} = -26,6874 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$

III участок $P_{III} = -20 \text{ кН;}$

$$\Delta \square_{III} = -26,6874 \cdot 10^{-7} - \frac{20 \cdot Z}{8 \cdot 10^7 \cdot 0,785} - \frac{8 \cdot Z^2}{2 \cdot 8 \cdot 10^7};$$

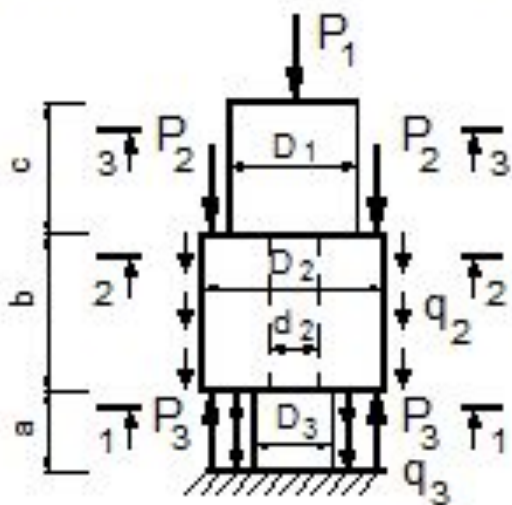
$Z=0$ $\Delta \square_{III} = -26,6874 \cdot 10^{-7} \text{ м,}$

$Z=0,6 \text{ м}$ $\Delta \square_{III} = -28,7782 \cdot 10^{-7} \text{ м,}$

$Z=1,2 \text{ м}$ $\Delta \square_{III} = -31,229 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$

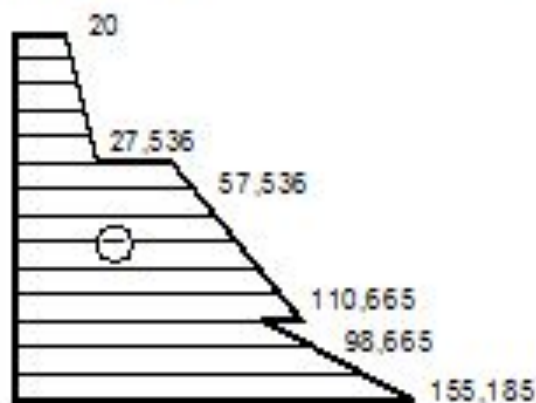
По этим значениям строим эюру перемещений сечений бруса (рис.г).

а)



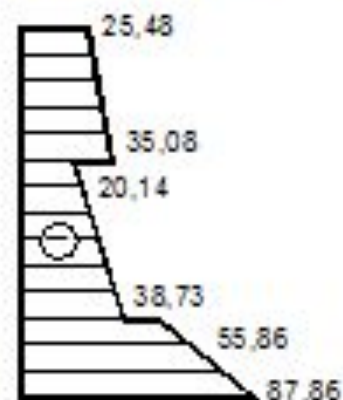
б)

Эюра N (кН)



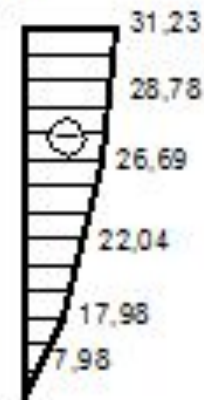
в)

Эюра σ (кПа)



г)

Эюра $\Delta L \cdot 10^7$ (м)



Наибольшая относительная деформация возникает в том месте бруса, где действует наибольшее нормальное напряжение, т.е. на первом участке при $Z=0$.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = -\frac{87,86}{8 \cdot 10^7} = -10,9825 \cdot 10^{-7}.$$

На стыке первого и второго участков площадь соприкосновения равна:

$$A_{I-II} = \frac{\pi(D_3^2 - d_2^2)}{4} = 1,48365 \text{ м}^2$$

и местное напряжение в стыке будет

$$\sigma = -\frac{98,6648}{1,48365} = -66,50 \text{ кПа} < 100 \text{ кПа}.$$

На стыке второго и третьего участков площадь соприкосновения равна:

$$A_{II-III} = \frac{\pi(D_1^2 - d_2^2)}{4} = 0,5024 \text{ м}^2$$

и местное напряжение в стыке будет

$$\sigma = -\frac{27,536}{0,5024} = -54,8089 \text{ кПа} < 100 \text{ кПа}.$$

Следовательно, на стыках отдельных частей бруса условие прочности удовлетворяется.