

Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

Стереометрия

- раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве

Основные понятия в пространстве:

точка



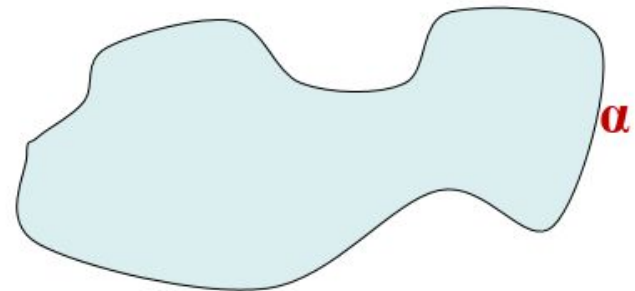
Обозначение
: A; B; C; ...;
M;...

прямая



Обозначение: a, b,
c, d..., m, n,...(или
двумя заглавными
латинскими)

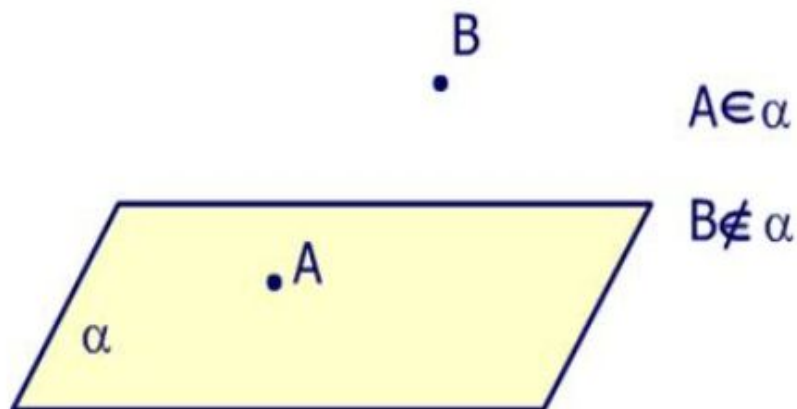
плоскость



Обозначение: α , β , γ ...

Условные изображения и обозначения прямых, точек и плоскостей

Точка A принадлежит плоскости α
Точка B не принадлежит



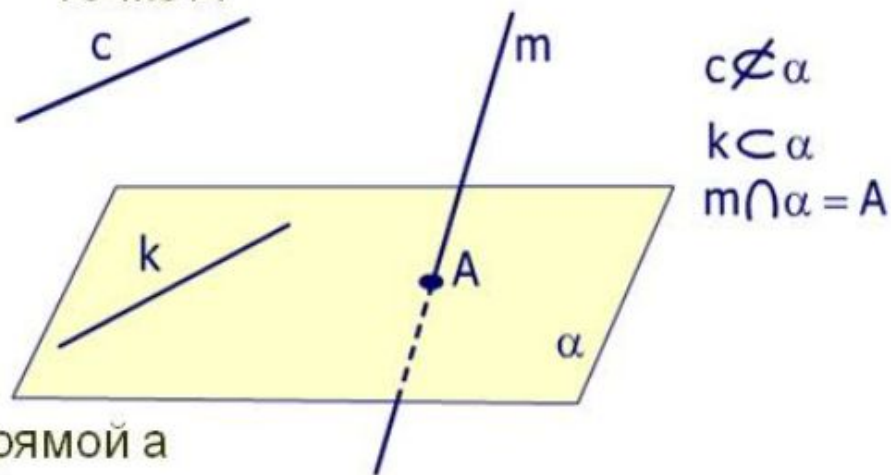
$$A \in \alpha$$

$$B \notin \alpha$$

Прямая c не лежит в плоскости α

Прямая k лежит в плоскости α

Прямая m пересекает плоскость α в
точке A



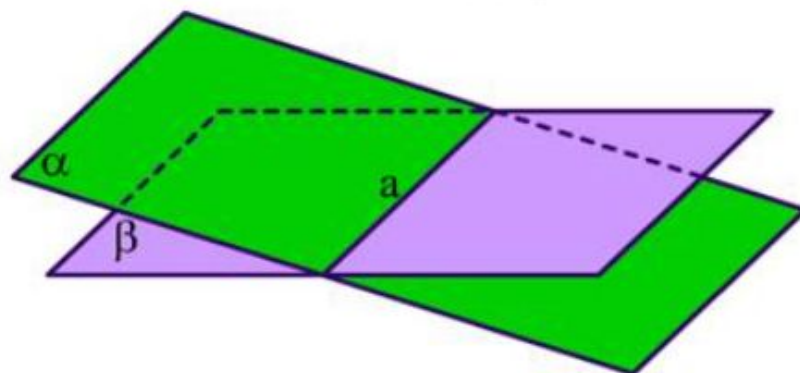
$$c \notin \alpha$$

$$k \subset \alpha$$

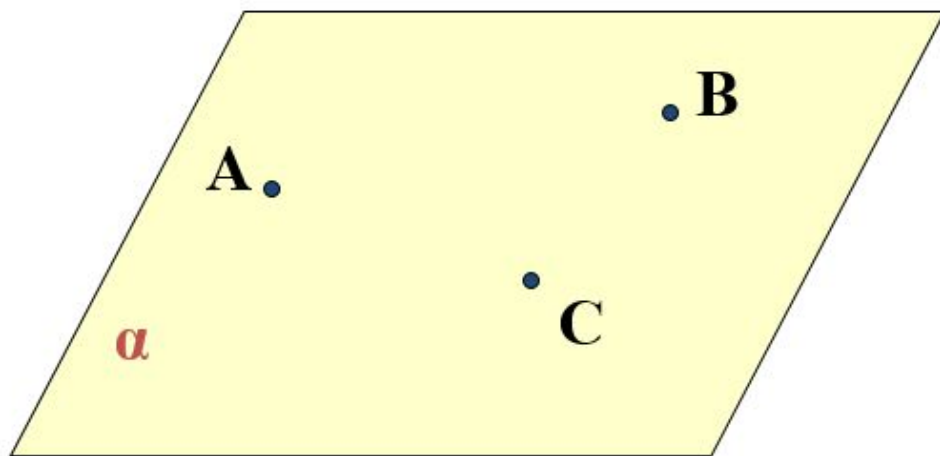
$$m \cap \alpha = A$$

Плоскости α и β пересекаются по прямой a

$$\alpha \cap \beta = a$$

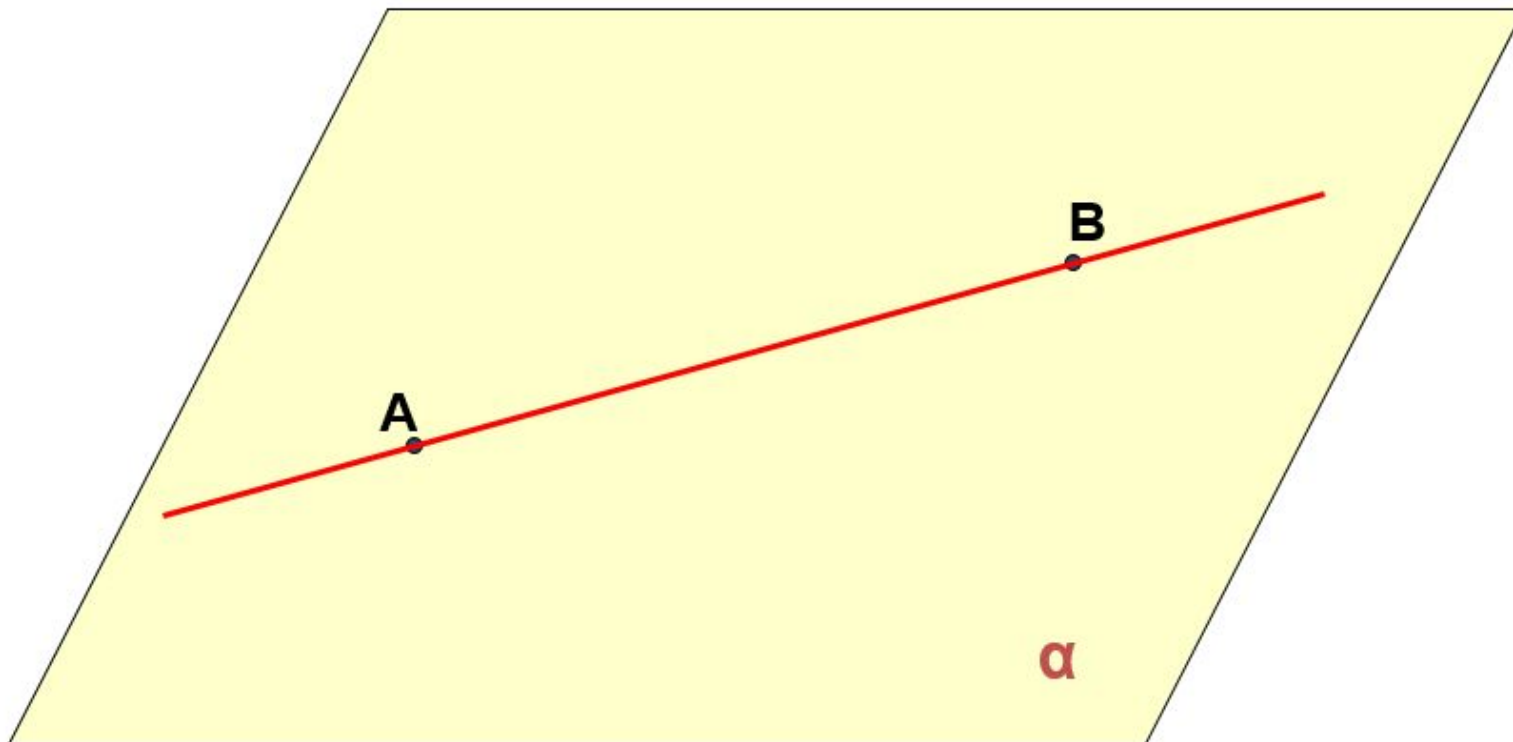


Аксиомы стереометрии



A1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и притом только одна.

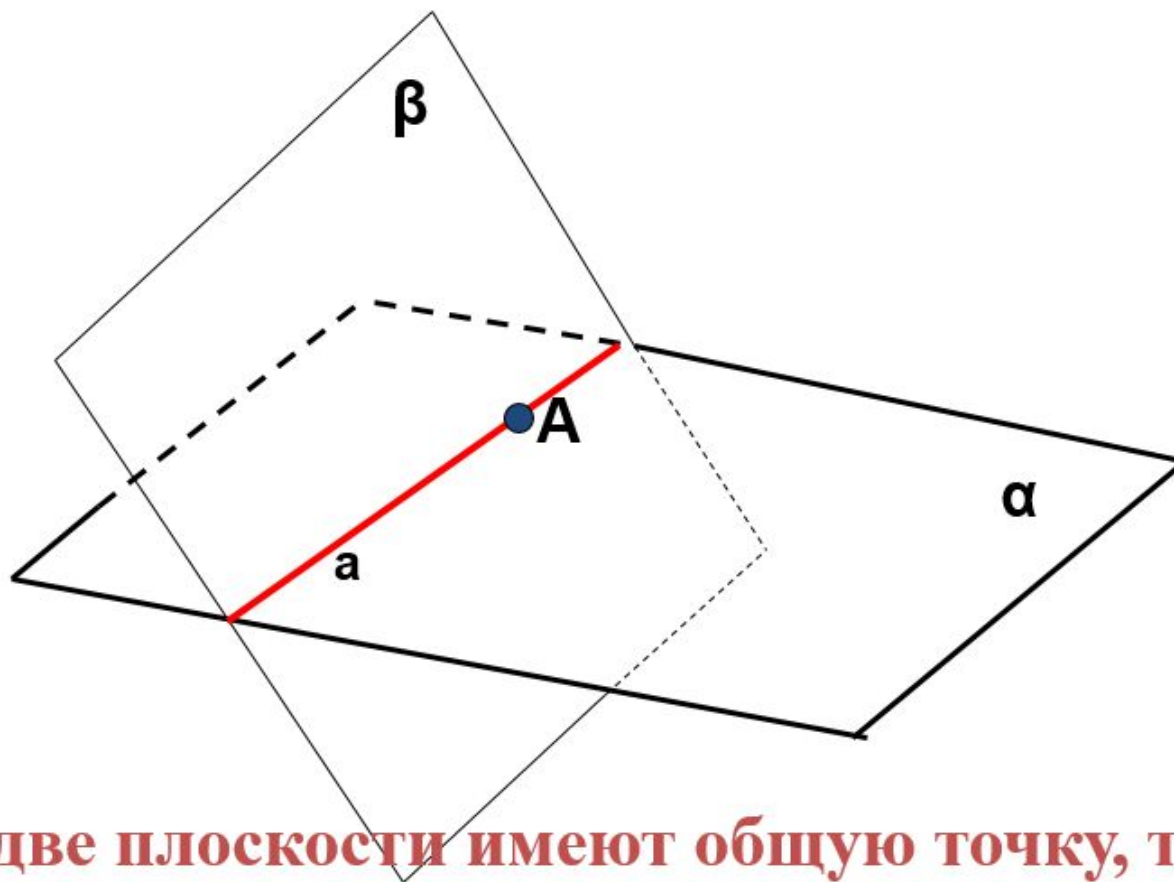
Аксиомы стереометрии



A2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то и все точки этой прямой лежат в этой плоскости.

Говорят: **прямая лежит в плоскости** или **плоскость проходит через прямую**.

Аксиомы стереометрии

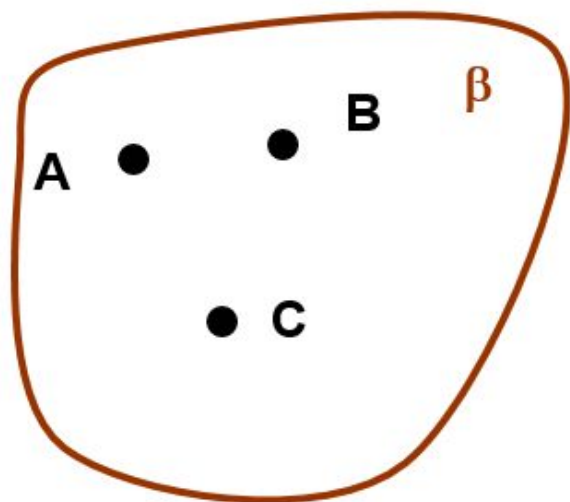


A3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей. **Говорят: плоскости пересекаются по прямой.**

Аксиомы стереометрии описывают:

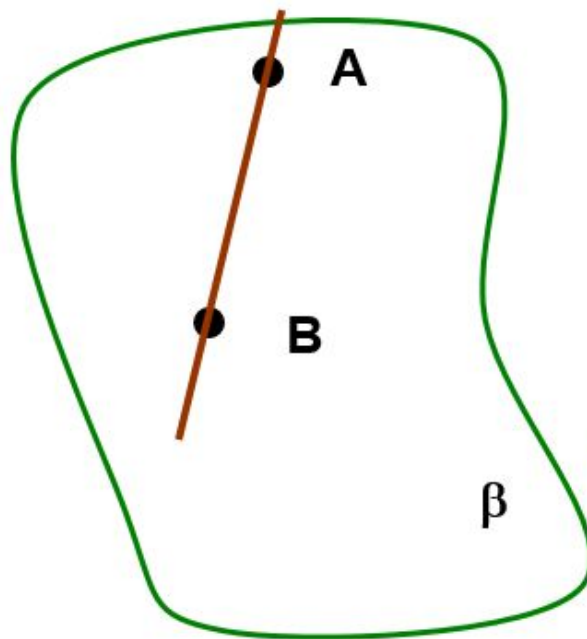
A1.

Способ задания
плоскости.



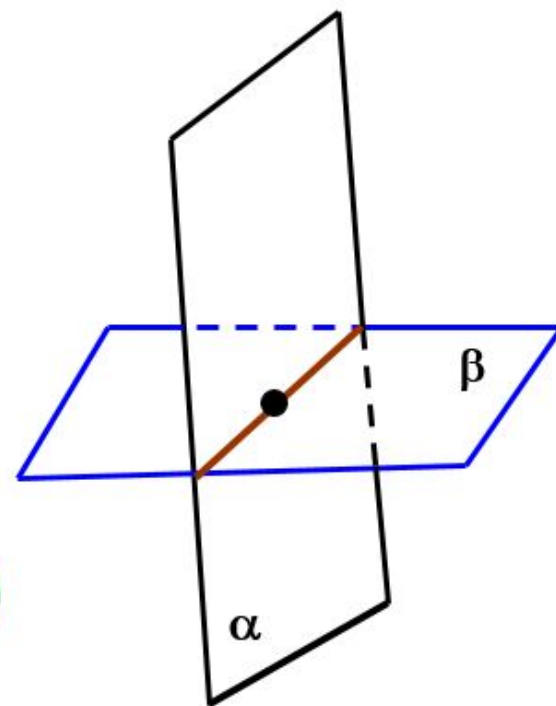
A2.

Взаимное
расположение
прямой и плоскости



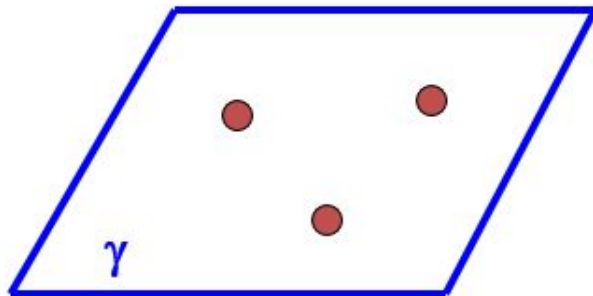
A3.

Взаимное
расположение
плоскостей

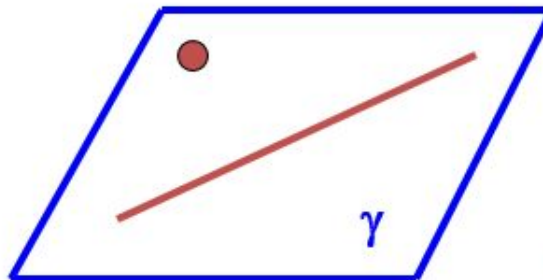


Способы задания плоскости

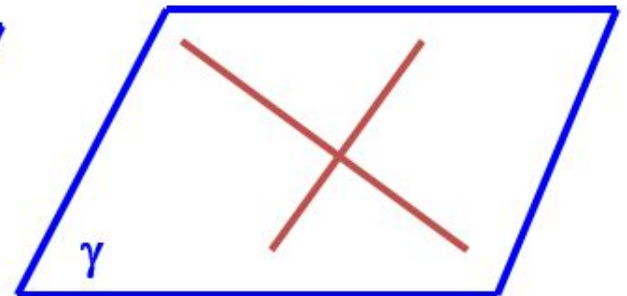
1. Плоскость можно провести через три точки.



2. Можно провести через прямую и не лежащую на ней точку.



3. Можно провести через две пересекающиеся прямые.

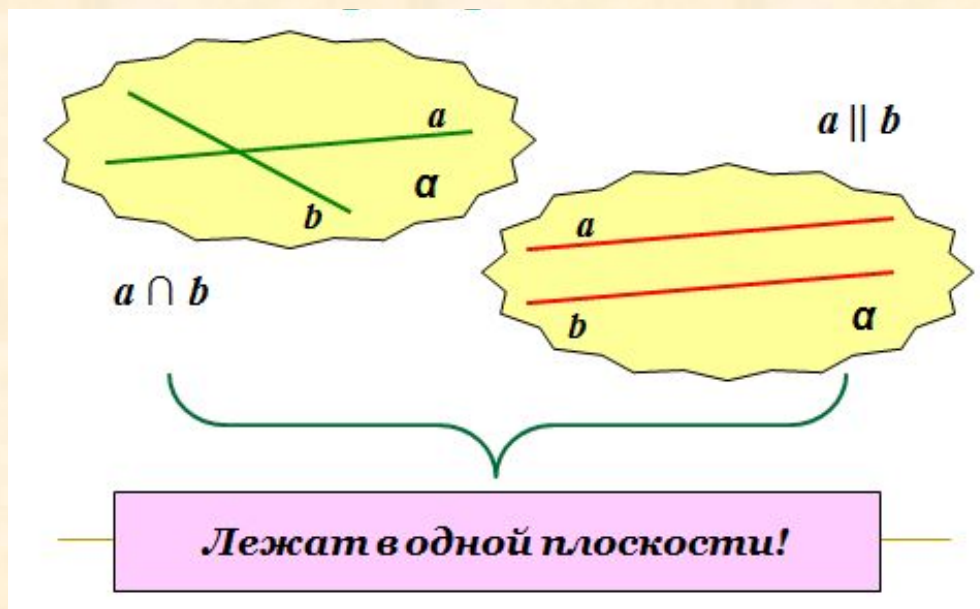


ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ

Прямые в пространстве могут:

- А) Быть параллельными
- Б) Пересекаться

В этом случае они лежат в одной плоскости



- В) Быть скрещивающимися.

Прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не имеют точек пересечения.

Свойства:

Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

Если одна из параллельных прямых пересекает плоскость, то и вторая прямая также пересекает эту плоскость.

Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

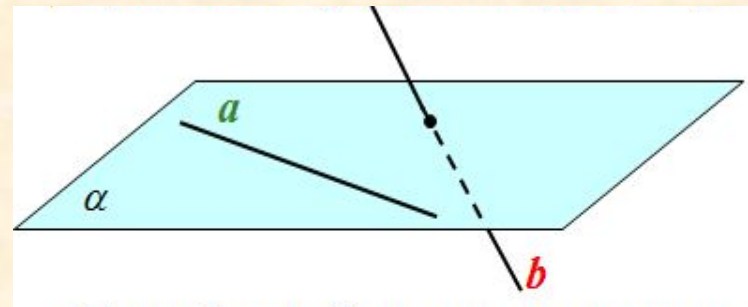
Две параллельные прямые, как и две пересекающиеся прямые, задают плоскость.

**Две прямые называются
скрещивающимися,
если они не лежат в одной плоскости.**

Признак скрещивающихся прямых:

Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.

Обозначение: $a \div b$



Например:

- Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

1. AD и AB пересекаются в точке A:

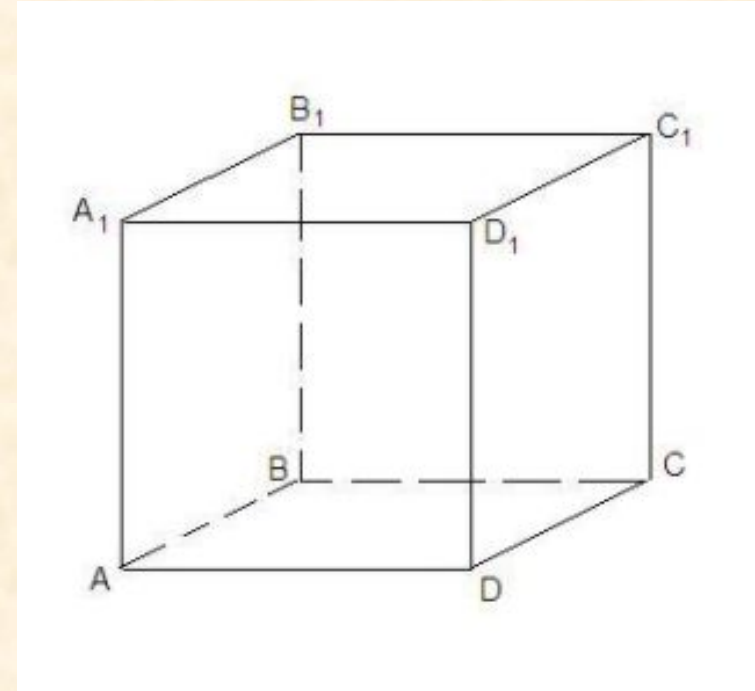
$$AD \cap AB = A$$

2. AD и A_1D_1 параллельны:

$$AD \parallel A_1D_1$$

3. AD и D_1C_1 скрещивающиеся:

$$AD \div D_1 C_1$$

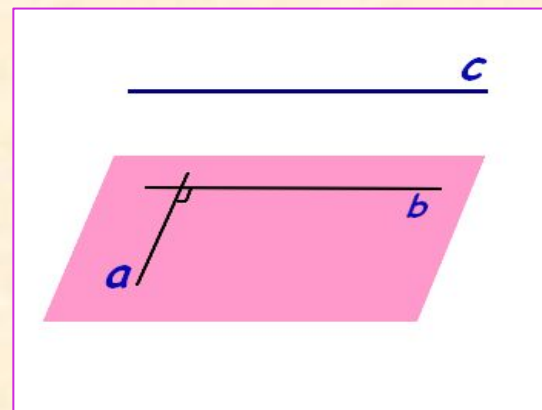


Углы между прямыми

Углом между двумя пересекающимися прямыми в пространстве называется наименьший из углов, образованных лучами этих прямых с вершиной в точке их пересечения.

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным.

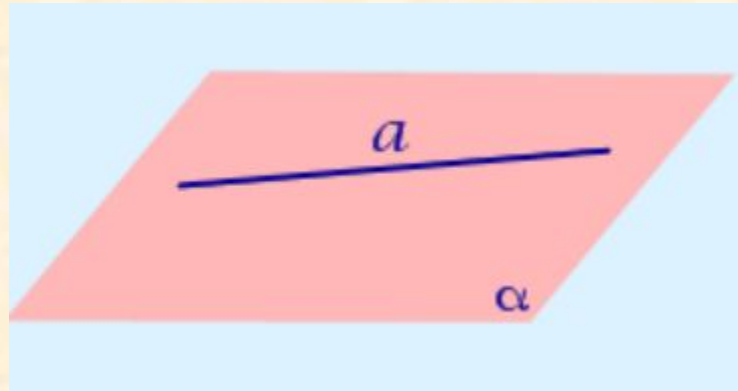
Две прямые в пространстве называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90^0 .



ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

- Прямая может лежать в плоскости:

$$a \subset \alpha$$

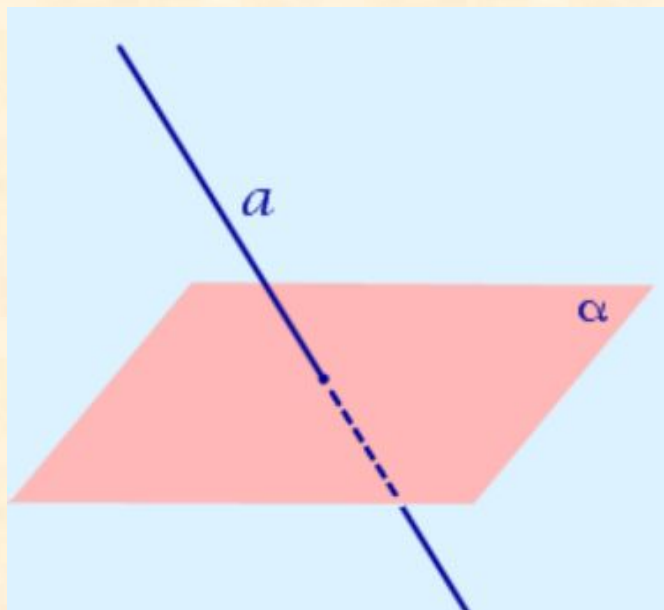


Прямая лежит на плоскости, если **все точки прямой принадлежат плоскости**.

Замечание. Для того, чтобы прямая лежала на плоскости, необходимо и достаточно, чтобы две любые точки этой прямой принадлежали этой плоскости.

Прямая может пересекать плоскость:

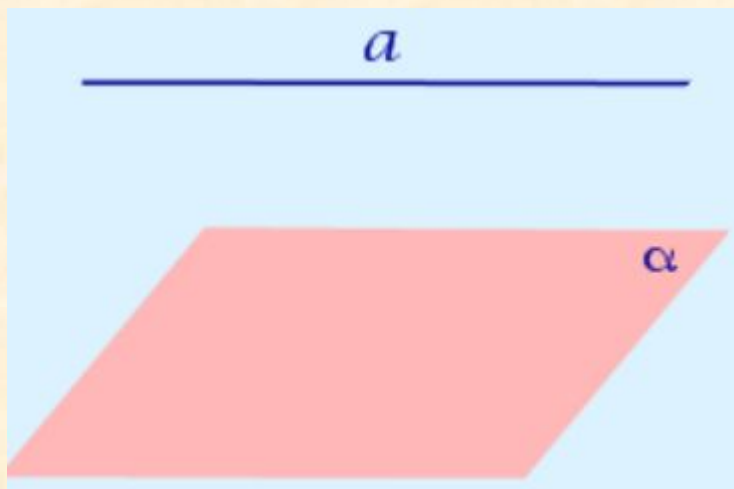
$$a \cap \alpha$$



Прямая пересекает плоскость, если прямая и плоскость имеют **единственную общую точку**.

Прямая может быть параллельна плоскости:

$$a \parallel \alpha$$



Прямая параллельна плоскости, если
прямая и плоскость **не имеют общих точек**.
(они не пересекаются)

Например:

• Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

1. AB и $(AA_1 D_1)$ пересекаются в точке A :

$$AB \cap (AA_1 D_1) = A$$

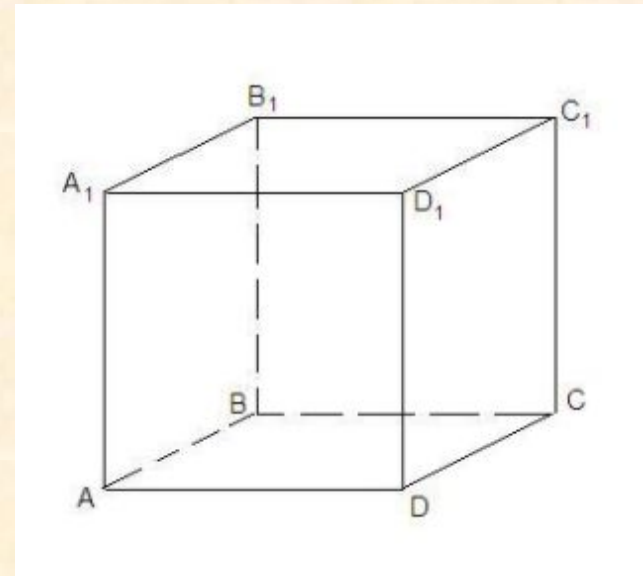
2. BC и $(AA_1 D_1)$ параллельны:

$$BC \parallel (AA_1 D_1)$$

3. AD лежит в плоскости $(AA_1 D_1)$:

$$AD \subset (AA_1 D_1)$$

Т.к. плоскость однозначно задается 3 точками, то плоскость любой грани куба можно обозначить тремя точками, лежащими в этой грани, например $(AA_1 D_1)$



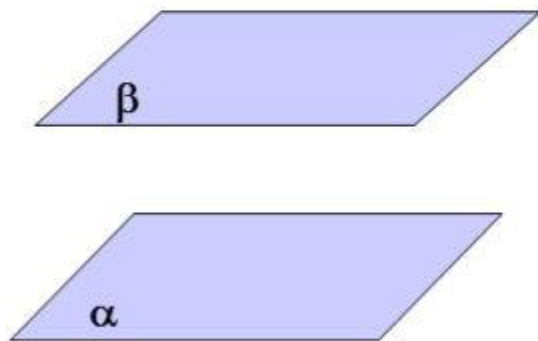
ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Взаимное расположение плоскостей.

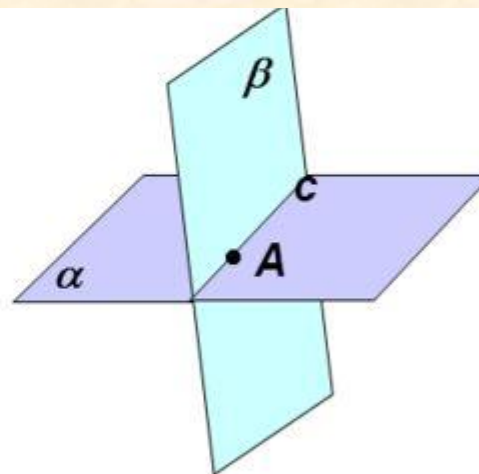
Две плоскости в пространстве могут либо пересекаться либо не пересекаться (быть параллельными).

Две плоскости называются параллельными, если у них нет общих точек.

$$\alpha \parallel \beta$$



$$\alpha \cap \beta = c$$



Например:

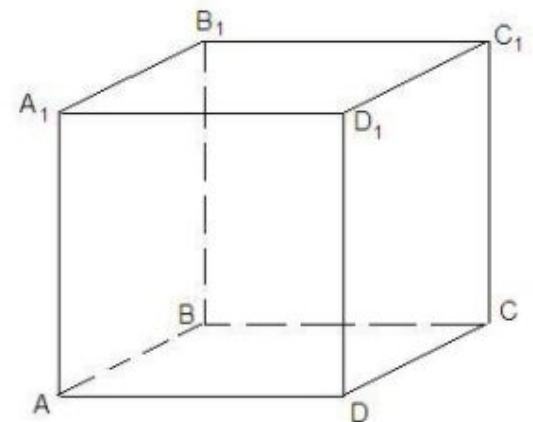
• Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

1. (ABC) и $(AA_1 D_1)$ пересекаются по прямой AD :

$$(ABC) \cap (AA_1 D_1) = AD$$

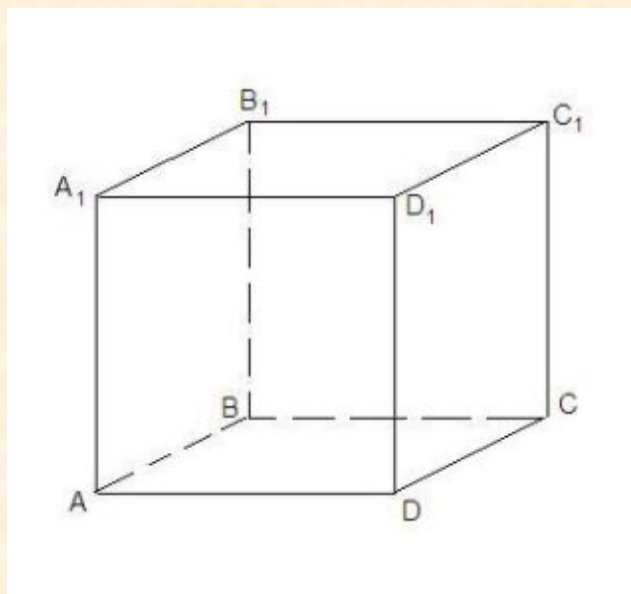
2. $(BB_1 C_1)$ и $(AA_1 D_1)$ параллельны:

$$(BB_1 C_1) \parallel (AA_1 D_1)$$



Задание 1

- Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
1. Выписать все пары скрещивающихся прямых
 2. Выписать все пары параллельных прямых
 3. Выписать все пары пересекающихся прямых



Задание 2

- Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
1. Выписать все пары параллельных плоскостей
 2. Выписать все пары пересекающихся плоскостей

