

# ПОДГОТОВКА к ЕГЭ

## ЗАДАЧА В13

Разработано учащимися 11 «А» класса МБОУ СОШ №15 г.  
Королёва Рафаелян Розой, Апраксиной Анной под руководством  
Моисеевой В.И.

# 1. Движение навстречу.

Если расстояние между двумя телами равно  $s$ , а их скорости  $v_1$  и  $v_2$ , то время  $t$ , через которое они встретятся, находится по формуле

$$t = s / (v_1 + v_2)$$

1. Расстояние между городами А и В равно 435 км. Из города А в город В со скоростью 60 км/ч выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 65 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города А автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

**Решение.** Через час после выезда первого автомобиля расстояние между автомобилями стало равно

$$435 - 60 = 375 \text{ (км)},$$

поэтому автомобили встретятся через время

$$t = 375 / (60 + 65) = 3 \text{ (ч)}.$$

Таким образом, до момента встречи первый автомобиль будет находиться в пути 4 часа проедет  $60 \cdot 4 = 240$  (км).

**Ответ.** 240.

## 2. Движение вдогонку.

Если расстояние между двумя телами равно  $s$ , они движутся по прямой в одну сторону со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  соответственно ( $v_1 > v_2$ ) так, что первое тело следует за вторым, то время  $t$ , через которое первое тело догонит второе, находится по формуле

$$t = s / (v_1 - v_2)$$

2. Два пешехода отправляются в одном направлении одновременно из одного и того же места на прогулку по аллее парка. Скорость первого на 1,5 км/ч больше скорости второго. Через сколько минут расстояние между пешеходами станет равным 300 метрам?

**Решение.** Время  $t$  в часах, за которое расстояние между пешеходами станет равным 300 метрам, т.е. 0,3 км, находим по формуле

$$t = 0,3 / 1,5 = 0,2(\text{ч}).$$

Следовательно, это время составляет 12 минут.

**Ответ.** 12.

### 3 . Движение по окружности (замкнутой трассе)

Рассмотрим движение двух точек по окружности длины  $s$  в одном направлении при одновременном старте со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  ( $v_1 > v_2$ ) и ответим на вопрос: через какое время первая точка будет опережать вторую ровно на один круг? Считая, что вторая точка покоится, а первая приближается к ней со скоростью  $v_1 - v_2$ , получим, что условие задачи будет выполнено, когда первая точка поравняется в первый раз со второй. При этом первая точка пройдет расстояние, равное длине одного круга, и искомая формула ничем не отличается от формулы, полученной для задачи на движение вдогонку:

$$t = s / (v_1 - v_2)$$

Итак, если две точки одновременно начинают движение по окружности в одну сторону со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  соответственно ( $v_1 > v_2$  соответственно), то первая точка приближается ко второй со скоростью  $v_1 - v_2$  и в момент, когда первая точка в первый раз догоняет вторую, она проходит расстояние на один круг больше.

3. Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 14 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 80 км/ч, и через 40 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

**Решение.** Пусть скорость второго автомобиля  $x$  км/ч. Поскольку 40 минут составляют  $\frac{2}{3}$  часа и это — то время, за которое первый автомобиль будет опережать второй на один круг, составим по условию задачи уравнение

$$14/(80-x)=2/3,$$

откуда  $160 - 2x = 42$ , т. е.  $x = 59$ .

**Ответ.** 59.

## 4 . Движение по воде

В задачах на движение по воде скорость течения считается неизменной. При движении по течению скорость течения прибавляется к скорости плывущего тела, при движении против течения – вычитается из скорости тела. Скорость плота считается равной скорости течения.

4. Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 25 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 30 часов после отплытия из него. Сколько километров прошел теплоход за весь рейс?

Решение. Пусть искомая величина равна  $2x$ . Составим по условию задачи уравнение

$$(x/28)+(x/22)+5=30$$

откуда

$$(x/28)+(x/22)=25,$$

$$(11x+14x)/(28*11)=25,$$

$$25x/308=25, x=308.$$

Значит, искомое расстояние равно 616 км.

*Ответ:616.*

## 5 . Средняя скорость

Напомним, что средняя скорость вычисляется по формуле

$$v = s/t$$

где  $S$  – путь, пройденный телом, а  $t$  – время, за которое это путь пройден. Если путь состоит из нескольких участков, то следует вычислить всю длину пути и всё время движения . Например, если путь состоял из двух участков протяженностью  $s_1$  и  $s_2$ , скорости на которых были равны соответственно  $v_1$  и  $v_2$ , то

$$S = s_1 + s_2, t = t_1 + t_2, \text{ где } t_1 = s_1/v_1, t_2 = s_2/v_2$$

**5. Первую треть трассы велосипедист ехал со скоростью 12 км/ч, а вторую треть – со скоростью 16 км/ч, а последнюю треть – 24 км/ч. Найдите среднюю скорость велосипедиста на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.**

**Решение.** Обозначим длину всей трассы за время  $t_1 = s/12$ , вторую треть – за время  $t_2 = s/16$ , последнюю треть – за время  $t_3 = s/24$ . Значит, время потраченное им на весь путь, равно

$$t_1 + t_2 + t_3,$$

т. е.

$$s/12 + s/16 + s/24 = 9s/48.$$

Поэтому искомая средняя скорость находится по формуле:

$$v = 3s : (9s/48) = 3s \cdot (48/9s) = 16 \text{ (км/ч)}.$$

## 6. Движение протяженных тел

В задачах на движение протяженных тел требуется, как правило, определить длину одного из них. Наиболее типичная ситуация: определение длины поезда, проезжающего мимо столба или протяженной платформы. В первом случае поезд проходит мимо столба расстояние, равное длине поезда, во втором случае — расстояние, равное сумме длин поезда и платформы.

6. По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 120 метров, второй — длиной 80 метров. Сначала второй сухогруз отстает от первого и в некоторый момент времени расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго сухогруза составляет 400 метров. Через 12 минут после этого уже первый сухогруз отстает от второго так, что расстояние от кормы второго сухогруза до носа первого равно 600 метрам. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?

**Решение.** Будем считать, что первый сухогруз неподвижен, а второй приближается к нему со скоростью  $x$  (м/мин), равной разности скоростей второго и первого сухогрузов. Тогда за 12 минут второй сухогруз проходит расстояние

$$l=400+80+120+600=1200(\text{м}).$$

Поэтому

$$x=1200/12=100(\text{м}/\text{мин}),$$

## 7. Задачи на работу

Ключевой в задачах на работу является следующая задача : первый мастер может выполнить некоторую работу за  $a$  часов , а второй мастер — за  $b$  часов . За какое время выполнят работу оба мастера, работая вдвоем? Поскольку объем работы не задан, его можно принять равным единице . Тогда первый мастер за один час выполнит часть работы, равную  $1/a$ , второй —  $1/b$ , а оба мастера — часть работы, равную  $1/a + 1/b$  . Значит, всю работу они выполнят за время

$$t = 1 / (1/a + 1/b)$$

**7. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15 часов. Через 3 часа после того , как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе . Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?**

**Решение.** За 3 часа первый рабочий сделал  $3/15$  всей работы . Оставшиеся  $12/15$  работы рабочие делали уже вместе и потратили на это

$$(12/15) / (2/15) = 6(\text{ч}).$$

Значит, время, затраченное на выполнение всего заказа, составляет 9 часов.

*Ответ. 9.*

## 8. Задачи на бассейны и трубы

Как уже отмечалось, задачи на бассейны и трубы аналогичны задачам на совместную работу. Модельная ситуация остается той же, только мастерам будут соответствовать насосы разной производительности, а работа будет заключаться в наполнении бассейна или иного резервуара.

**8. Первая труба пропускает на 6 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если бак объемом 360 литров она заполняет на 10 минут медленнее, чем вторая труба?**

**Решение.** Пусть первая труба пропускает  $x$  литров воды в минуту,  $x > 0$ . Тогда вторая труба пропускает  $x + 6$  литров воды в минуту. Составим по условию задачи уравнение

$$360/x = (360/(x+6)) + 10$$

откуда, сократив на 10, получим

$$36/x = (36/(x+6)) + 1$$

и, следовательно,

$$(36/x) - (36/(x+6)) = 1$$

Приведем дроби в левой части к общему знаменателю:

$$(36(x+6) - 36x) / x(x+6) = 1 \quad \text{откуда}$$

$$x(x+6) = 36 \cdot 6 \quad \text{и} \quad x^2 + 6x - 216 = 0$$

Корнями полученного квадратного уравнения являются числа -18 и 12, из которых только последнее удовлетворяет условию  $x > 0$ .

**Ответ. 12.**

## 9. Задачи на проценты и доли

При решении задач на проценты важно четко понимать, что процент – это просто сотая часть числа. Поэтому, решая даже кажущиеся очень простыми задачи на проценты, следует немножко подумать и посчитать, прежде чем радостно вписывать в бланк неправильный ответ. Разумеется, это относится и к любым другим задачам.

Отметим ещё следующее. Последовательное увеличение величины на некоторое число процентов, а затем уменьшение результата на то же число процентов не приводит к начальной величине: ведь второе действие мы совершаем уже с другой величиной. То же самое можно сказать и об обратной последовательности действий. Любопытно, что в любом случае получим в итоге величину, меньшую начальной. Например, увеличив  $a$  на 10%, получим  $1,1a$ . Уменьшив полученную величину на 10%, получим

$$1.1a * 0.9 = 0.99a$$

- полученная величина меньше начальной на 1%. При этом порядок действий не играет роли: если сначала уменьшить  $a$  на 10%, а затем результат увеличить на 10%, получим те же самые

$$0.99a = 0.9a * 1.1.$$

В общем случае, при увеличении величины  $a$  на  $k$  % получим величину

$$a_1 = a (1 + k/100).$$

Если же теперь уменьшить  $a_1$  на  $k$  %, получим величину

$$a_2 = a_1 (1 - (k/100)) = a (1 + (k/100))(1 - (k/100))$$

т.е.

$$a_2 = a(1 - (k/100)^2) < a.$$

## Задачи на проценты и доли (продолжение)

9. Пять рубашек дешевле куртки на 25%. На сколько процентов семь рубашек дороже куртки?

**Решение.** Обозначим через  $P$  стоимость одной рубашки, через  $K$  – стоимость куртки. Из условия задачи следует, что  $5P = 0,75K$ , откуда  $P = 0,15K$ , и, следовательно,  $7P = 1,05K$ . Значит, семь рубашек дороже куртки на 5%.

*Ответ.* 5.

# 10. Задачи на концентрацию, смеси, сплавы.

Задачи на концентрацию традиционно являются слабым звеном в подготовке школьников и абитуриентов, кажутся многим из них довольно сложными. В таких задачах речь обычно идет о растворах некоторого вещества в другом веществе и об изменении концентрации этого вещества после каких-либо манипуляций. При этом водные растворы, смеси или сплавы играют сходные роли и позволяют лишь несколько разнообразить сюжеты задач без изменения математического содержания. Ключевой при решении таких задач является идея отслеживания изменений, происходящих с «чистым» веществом (далее кавычки будем опускать). В качестве модельной задачи рассмотрим следующую. Смешали  $a$  литров  $n$ -процентного водного раствора некоторого вещества с  $b$  литрами  $m$ -процентного водного раствора этого же вещества. Требуется найти концентрацию получившейся смеси. Воспользуемся ключевой идеей: проследим за изменениями, происходящими с чистым веществом. В первом растворе его было

$$(a/100) \cdot n = an/100 \text{ (литров)}$$

во втором растворе —

$$(b/100) \cdot m = bm/100 \text{ (литров)}$$

Значит, количество чистого вещества в полученной смеси будет равно

$$an/100 + bm/100 \text{ (литров)}$$

а всего этой смеси получится  $a + b$  литров. Теперь уже найти искомую концентрацию к не представляет труда:

$$k = ((an/100 + bm/100) / (a+b)) * 100 = ((an + bm) / (a+b)) \%$$

Заметим, что растворы в этой задаче можно было бы заменить двумя сплавами разной массы и с разным содержанием чистого вещества (например, одного из двух металлов). Решение при этом практически не изменится, поменяются лишь единицы измерения и названия веществ.

**10. Виноград содержит 91 % влаги, а изюм – 7%. Сколько килограммов винограда требуется для получения 21 килограмма изюма ?**

**Решение.** Используем ключевую идею: будем следить за массой «чистого», т.е. в данном случае «сухого» вещества в винограде и изюме. Пусть для получения 21 килограмма изюма требуется  $x$  кг винограда. Из условия следует, что масса «сухого» вещества в  $x$  кг винограда равна  $0,09x$  кг. Поскольку эта масса равна массе «сухого» вещества в 21 килограмме изюма, то по условию задачи можно составить уравнение

$$0,09x = 0,93 \cdot 21,$$

откуда

$$9x = 93 \cdot 21,$$

т.е.  $x = 217$  кг.

**Ответ. 217.**

# 11. Арифметическая прогрессия.

11. Том Сойер и Гекльберри Финн красят забор длиной 100 метров. Каждый следующий день они красят больше, чем в предыдущий, на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме они покрасили 20 метров забора. За сколько дней был покрашен весь забор?

**Решение.** Пусть ребята в первый день покрасили  $a_1$  метров забора, во второй —  $a_2$  метров и т.д., в последний —  $a_n$  метров забора. Тогда

$$a_1 + a_n = 20 \text{ (м)}$$

а за  $n$  дней было покрашено

$$S_n = ((a_1 + a_n) / 2) \cdot n = 10n$$

метров забора.

Поскольку всего было покрашено 100 метров забора, имеем:  $10n = 100$ , откуда  $n = 10$ .

**Ответ:10**

## 12. Геометрическая прогрессия .

12. У гражданина Петрова 1 августа 2000 года родился сын. По этому случаю он открыл в некотором банке вклад в 1000 рублей. Каждый следующий год 1 августа он пополнял вклад на 1000 рублей. По условиям договора банк ежегодно 31 июля начислял 20 % на сумму вклада. Через 6 лет у гражданина Петрова родилась дочь, и он открыл в другом банке ещё один вклад, уже в 2200 рублей, и каждый следующий год пополнял этот вклад на 2200 рублей, а банк ежегодно начислял 44 % на сумму вклада. Через сколько лет после рождения сына суммы на каждом из двух вкладов сравняются, если деньги из вкладов не изымаются?

Решение. Через  $n$  лет в первом портфеле будет сумма

$$1000 + 1000 \cdot 1.2 + \dots + 1000 \cdot 1.2^n = 1000 \cdot (1.2^{n+1} - 1 / 1.2 - 1) = 5000(1.2^{n+1} - 1) \text{ (руб.)}.$$

В это же время во втором портфеле окажется

$$2200 + 2200 \cdot 1.44 + \dots + 2200 \cdot 1.44^{n-6} = 2200 \cdot (1.44^{n-5} - 1 / 1.44 - 1) = 5000(1.44^{n-5} - 1)$$

Приравняем эти суммы и решим полученное уравнение:

$$5000(1.2^{n+1} - 1) = 5000(1.44^{n-5} - 1)$$

Отсюда

$$1.2^{n+1} = 1.44^{n-5}, \text{ или } 1.2^{n+1} = 1.2^{2(n-5)}$$

Значит,

$$n+1 = 2n-10$$

т.е.  $n = 11$ .

**Ответ. 11.**