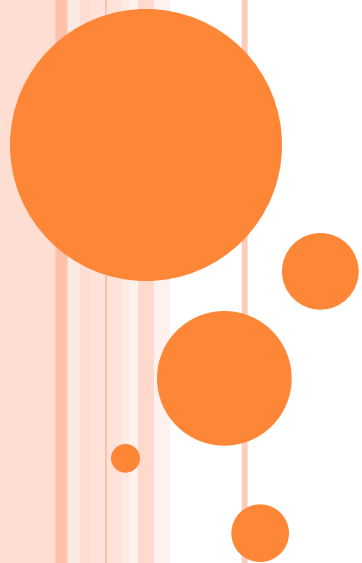


ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ



- **Определение:** говорят, что *число a делится на число b* (или a кратно b , или b делитель a), *если найдется такое целое число q , что $a = b \cdot q$.*
Обозначение: $a : b$.



- **Рекомендация:** для лучшего понимания темы можно привести наглядный пример. Например, заранее попросить ребят принести монетки, с помощью которых на уроке привести наглядную интерпретацию.
- Заметим, что если $a \div b$, то $a \div (-b)$ (Доказать!) Поэтому, если не оговорено противное, мы будем искать только положительные делители чисел.



□ **Задача 1.1.** Найдите все делители числа 36.



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

- 1.1. Будем последовательно проверять числа 1, 2, 3, 4 и т.д.: если их произведение на какое-то число даст 36, запишем это:
 $36=1*36=2*18=3*12=4*9=6*6=9*4=12*3=18*2=36*1.$
- Заметим, что в записи $a=bq$ оба числа b, q являются делителями числа a . Поэтому перебор можно остановить на произведении $6*6$.



- ▣ **Задача 1.2.** В верхней строке таблицы указано то, что дано. В левом то, что спрашивается. Заполните клетки: если «да», то поставьте «+», если «нет», то — «-», если данных не хватает, то знак «?». Обоснуйте свои ответы.



| | $a:m, b:m$ | $a:m, b$ не делится на m | a, b не делятся на m |
|------------|------------|----------------------------|--------------------------|
| $(a+b):m?$ | | | |
| $(a-b):m?$ | | | |
| $ab:m?$ | | | |



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

- Рассмотрим первую строку таблицы. Так как $a = km$ и $b = lm$, то $a + b = (k + l)m$, то есть $a + b$ делится на m . С клеткой под ней (разность) всё аналогично. Возможно и такое рассуждение: поскольку b делится на m , то и $-b$ делится на m , следовательно, и сумма $a + (-b)$ делится на m .



- Теперь рассмотрим третью клетку в первой строке. 5 не делится на 3 и 1 не делится на 3, но $5 + 1$ делится на 3. Однако 5 не делится на 3 и 2 не делится на 3 и также $5 + 2$ не делится на 3. Поэтому данных недостаточно. Аналогичные примеры можно привести и для разности.



- Рассмотрим вторую клетку в первой строке. Предположим, что $c = a + b$ делится на m . Тогда и $b = c - a$ должно делиться на m как разность двух чисел, делящихся на m . Полученное противоречие показывает, что $a + b$ не делится на m . Аналогично и c разностью.



- Теперь рассмотрим делимость произведения (третья строка).
Поскольку $a = km$, то $ab = (kb)m$ делится на m независимо от делимости b на m . В последней клетке третьей строки ab может не делиться на m (например $a = b = 1, m = 2$), но может и делиться (например, $a = b = 2, m = 4$). Значит, данных не хватает.



РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

| | $a \div m$ и $b \div m$ | $a \div m$ и $b \nmid m$ | $a \nmid m$ и $b \nmid m$ |
|---------------------|-------------------------|--------------------------|---------------------------|
| $a + b \div m?$ | + | - | ? |
| $a - b \div m?$ | + | - | ? |
| $a \cdot b \div m?$ | + | + | ? |



- ▣ **Задача 1.3.** Определите, не выполняя действий, делится ли
- а) $18^2 - 7^2$ на 11;
 - б) $53^3 + 67^3 + 2^3$ на 60;
 - в) $1^3 + 2^3 + \dots + 82^3$ на 83.



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

- а) Делится: $18^2 - 7^2 = (18 - 7)(18 + 7) = 11 \cdot 25$ делится на 11.
- б) Не делится: $53^3 + 67^3 = (53 + 67)(53^2 - 53 \cdot 67 + 67^2) = 120(53^2 - 53 \cdot 67 + 67^2)$ делится на 60, а 2^3 не делится на 60.
- в) Делится: разобьём слагаемые на пары и докажем, что сумма в каждой паре делится на 83. Например, $1^3 + 82^3$ делится на 83, $2^3 + 81^3$ делится на 83.



□ **Задача 1.4.** Петя считает, что если a^2 делится на $a - b$, то b^2 делится на $a - b$. Прав ли он?



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

- Рассмотрим разность двух Петиных выражений: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ делится на $(a - b)$.

Поскольку уменьшаемое и разность делятся на $a - b$, то по задаче 1.2 и вычитаемое должно делиться на $a - b$. Поэтому Петя прав.

- Может быть полезна такая формулировка: если сумма (разность) двух чисел делится на m , то либо оба числа делятся на m , либо оба не делятся.



- **Задача 1.5.** а) Докажите, что квадрат натурального числа имеет нечётное количество делителей.
- б) Верно ли обратное?



- ❖ 1.5. а) Сгруппируем делители числа $n = m^2$: если d — делитель числа n , то $\frac{n}{d}$ — тоже делитель; объединим их в пару. Только m попадёт в пару с самими собой, а все остальные делители n разобьются на пары. Поэтому у квадрата нечётное число делителей.
- б) Если количество делителей нечётно, значит, есть пара совпадающих делителей. Следовательно, число является квадратом, то есть обратное также верно.



- **Задача 1.6.** Докажите, что а)
произведение двух
последовательных чисел делится
на 2;
- б) число — целое.



- **1.6.** а) Заметим, что среди двух подряд идущих чисел хотя бы одно делится на 2. По задаче 1.2 произведение также делится на 2.
- б) Разложим числитель на множители: $n^2+n = n(n+1)$. Получим произведение двух последовательных чисел, которое чётно по п. а).



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ



▣ **Задача 1.7.** В каком случае два числа a и b таковы, что a делится на b и b делится на a ?



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

- Из того, что a делится на b , следует, что $|a| \geq |b|$. Из того, что b делится на a , следует, что $|b| \geq |a|$. Два неравенства вместе дают $|a| = |b|$, то есть числа могут отличаться только знаками.



- **Задача 1.8+.** а) Верно ли, что если $a \mid m$ и $b \mid n$, то $ab \mid mn$
- б) Верно ли, что если a делится на b и b делится на c , то a делится на c ?



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

- а) Верно: так как $a \text{ — } lm$, а $b \text{ — } kn$, то $ab = (kl)(mn)$, то есть по определению делится на mn .
- б) Верно: так как $a = kb$, $b = lc$, то $a = (kl)c$, то есть по определению a делится на c .



- Эти упражнения достаточно простые, однако важно, чтобы школьники привыкли корректно доказывать утверждения, ссылаясь на определение. Скажем, в предыдущем упражнении полезнее говорить «произведение кратно np », чем «в частном будет целое число».



- ▣ **Задача 1.9.** Вася считает, что если $ab + cd$ делится на $a - c$, то $ad + bc$ тоже делится на $a - c$. Прав ли он?



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

- Действуя аналогично задаче 1.4, найдём разность двух выражений:
- $$(ab + cd) - (ad + bc) = a(b - d) - c(b - d) = (a - c)(b - d)$$
- делится на $(a - c)$. Поэтому и второе выражение делится на $a - c$.



□ **Задача 1.10.** В Тройном королевстве имеют хождение только монеты по 9 и по 15 золотых. Докажите, что такими монетами нельзя набрать сумму в 50 золотых.



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

- Заметим, что 9 и 15 делятся на 3, поэтому любая сумма, набранная такими монетами, также делится на 3. Однако 50 не делится на 3.



□ **Задача 1.11.** а) Маша показывает такой фокус: ей называют любое трёхзначное число, она приписывает к нему такое же, а потом в уме за секунду делит получившееся шестизначное число на 1001. Как она это делает?

б) Саша заметила, что все шестизначные числа Маши делятся на 7. Почему? На какие ещё числа они делятся?



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

- а) Заметим, что $abcabc = 1001abc$.
Поэтому частное просто равно
исходному числу.
- б) $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, поэтому числа
вида $aЪсаЪс$ делятся на 7, на 11,
на 13 и на их попарные
произведения.



▣ **Задача 1.12.** В некотором государстве была тюрьма, в каждой из ста камер которой сидело по одному заключённому. Камеры были пронумерованы числами от 1 до 100, а замки в них были устроены так, что при одном повороте ключа дверь открывалась, при следующем повороте — закрывалась и т. д. Царь в то время воевал с соседним государством, и в какой-то момент ему показалось, что он побеждает.



- На радостях царь послал гонца с указанием отпереть все камеры, но затем ход военных действий изменился, и царь послал другого гонца вдогонку первому, наказав ему повернуть ключ в замке в каждой второй камере; затем был послан следующий гонец, чтобы повернуть ключ в замке у каждой третьей камеры, и т. д.



Таким образом 100 гонцов прибывали в тюрьму один за другим и последовательно поворачивали замки в камерах.

Сколько узников в итоге вышло на свободу и из каких камер?



- Заметим, что на свободу вышли узники из тех и только тех камер, в которых ключ повернули нечётное количество раз, то есть номера которых имеют нечётное количество делителей. По задаче 1.5 это квадраты, то есть искомые номера: 1, 4, 9, 16, ..., 100. Всего их десять.
- *К теме данного занятия относятся также задачи 1-7 из раздела «Дополнительные задачи».*

