Сложность вычислений

По определению язык L *разрешим* (или *рекурсивен*), если существует такая машина Тьюринга T, что выполняются условия:

1) если $x \in L$, то при входе x машина T попадает в заключительное состояние, останавливается и выдает значение $f_T(x) = 1$;
2) если $x \notin L$, то при входе x машина T попадает в заключительное состояние, останавливается и выдает значение $f_T(x) = 0$.

Такие машины соответствуют понятию «алгоритма» и применяются при решении *распознавательных задач* типа «да/нет».

По определению язык L *полуразрешим*, если существует такая машина Тьюринга T, что

$$L = L(T) = \{x \in A^*: f_T(x) = 1\}.$$

Теорема. Существуют полуразрешимые языки, которые не могут быть разрешимы никаким алгоритмом.

Примеры. 1. Язык

$$H = \{(s,x) \mid \langle s \rangle(x) \text{ останавливается}\}$$

(Halting problem – *задача об остановке алгоритма*).

2. Язык множества теорем ИП.

Если язык L рассматривается как кодировка массовой задачи (или проблемы) P, то задача P называется *разрешимой*, если язык L является разрешимым языком, и *неразрешимой* в противном случае.

Пример проблемы.

Является ли выполнимой формула алгебра высказываний?

В качестве модели алгоритма рассматривается машина Тьюринга T, вычисляющая числовую функцию $f(x)$.

Временной сложностью машины T называется функция $t_T(x)$, значение которой равно числу шагов работы машины T, сделанных при вычислении значения $f(x)$, если $f(x)$ определено, и $t_T(x)$ не определено, если $f(x)$ не определено.

Ленточной сложностью машины T называется функция $s_T(x)$, значение которой равно числу ячеек машины T, используемых при вычислении значения $f(x)$, и $s_T(x)$ не определено, если $f(x)$ не определено.

Говорят, что машина Тьюринга T имеет *полиномиальную временную сложность* $P(n)$ (или «время работы $P(n)$»), если, обрабатывая вход w длины n, T делает не более $P(n)$ переходов и останавливается независимо от того, допущен вход или нет.

Определение. Говорят, что язык L принадлежит *классу* **P**, если он разрешим некоторой детерминированной машины Тьюринга T с полиномиальной временной сложностью.

В частности, распознавательная задача принадлежит классу P, если ее язык принадлежит классу P, т.е. эта задача решается с помощью полиномиального алгоритма - некоторой детерминированной машины Тьюринга T с полиномиальной временной сложностью.

Пример. Задача вычисления НОД целых чисел принадлежит классу P.

Определение. Язык L принадлежит классу NP, если он разрешим некоторой недетерминированной машины Тьюринга T с полиномиальной временной сложностью.

В частности, распознавательная задача принадлежит классу NP, если ее язык принадлежит классу NP, т.е. эта задача решается с помощью полиномиального недетерминированного алгоритма - некоторой недетерминированной машины Тьюринга T с полиномиальной временной сложностью.

Полиномиальные сведения

Основной метод доказательства того, что проблему P_2 нельзя решить за полиномиальное время (т.е. $P_2 \notin P$) состоит в сведении к ней за полиномиальное время такой проблемы P_1, что $P_1 \notin P$. Такое преобразование языков называется *полиномиальным сведением*.

Определение. Говорят, что язык L является NP-*трудным*, если для любого языка L' из класса NP существует полиномиальное сведение языка L' к языку L.

Определение. Говорят, что язык L является NP-*полным*, если он принадлежит классу NP и является NP-трудным.

Теорема 1. Если проблема P_1 является NP-трудной и существует полиномиальное сведение проблемы P_1 к проблеме P_2, то проблема P_2 также NP-трудна.

Следствие. Если проблема P_1 является NP-полной и существует полиномиальное сведение проблемы P_1 к проблеме $P_2 \in NP$, то проблема P_2 также NP-полна.