Лекция N1

Лектор: проф. ОРЛИК ЛЮБОВЬ КОНСТАНТИНОВНА

Тема: Несобственные интегралы. Функции нескольких переменных: область определения, линии уровня, частные производные

1. Несобственные интегралы.

В определении $\int_a^b f(x)\,dx$ предполагается, что a, b - конечные числа, а $f(x)$ - непрерывная функция.

Если хотя бы одно из этих условий нарушается, то интеграл называется **несобственным.**

Мы рассмотрим интегралы по бесконечному промежутку или несобственные интегралы 1-ого рода:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{B\to+\infty}\int_a^{B} f(x)\,dx.$$

Если такой предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл сходится.

Если же указанный предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл расходится.

Аналогично определяется

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{b} f(x)\,dx.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

где c - любая фиксированная точка оси Ox.

Пример.

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{B\to\infty}\int_1^{B}x^{-2}\,dx=\lim_{B\to\infty}\left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_1^B=$$

$$=\lim_{B\to\infty}\left(-\frac{1}{B}+1\right)=1,$$

следовательно $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ **сходится.**

На практике при вычислении несобственных интегралов можно сразу применять формулу Ньютона-Лейбница и символ « ∞ » подставлять как число.

Пример.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Теорема.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} : \begin{cases} \alpha > 1, & \text{сходится,} \\ \alpha \le 1, & \text{расходится.} \end{cases}$$

Функция двух переменных

<u>Пример.</u> Площадь z прямоугольника со сторонами x, y находится по формуле

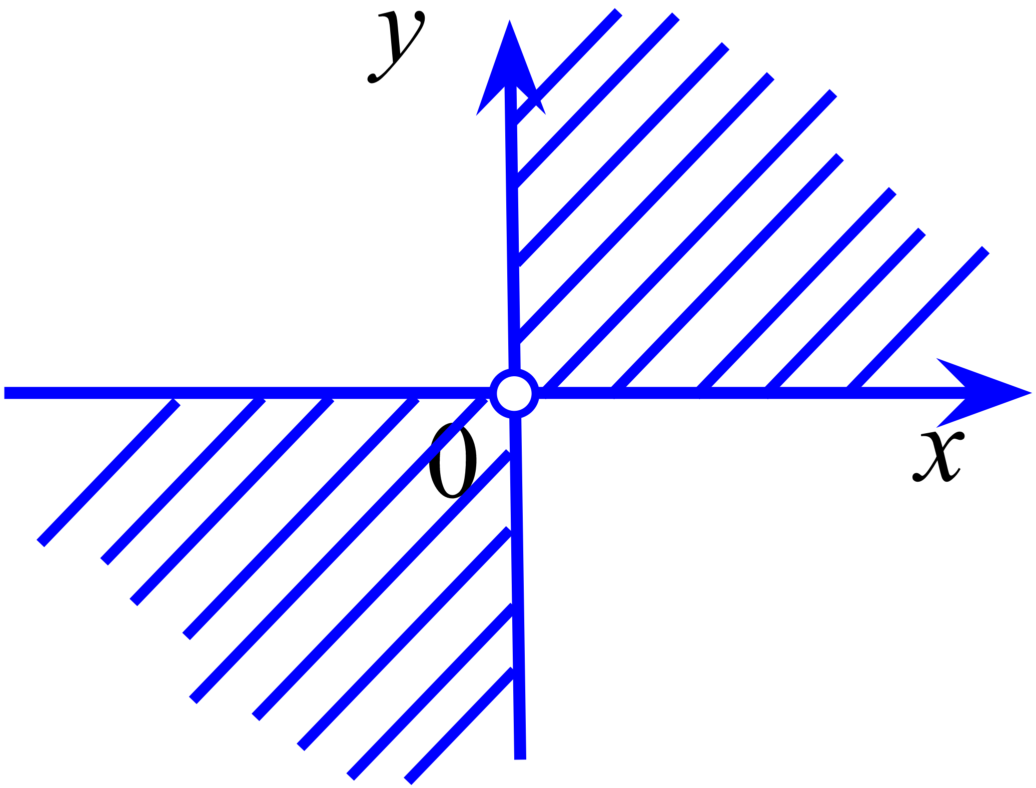
$$z = xy.$$

Эта формула определяет функцию двух переменных x и y.

Областью определения функции $z = z(x, y)$ является некоторое множество точек плоскости $Oxy.$

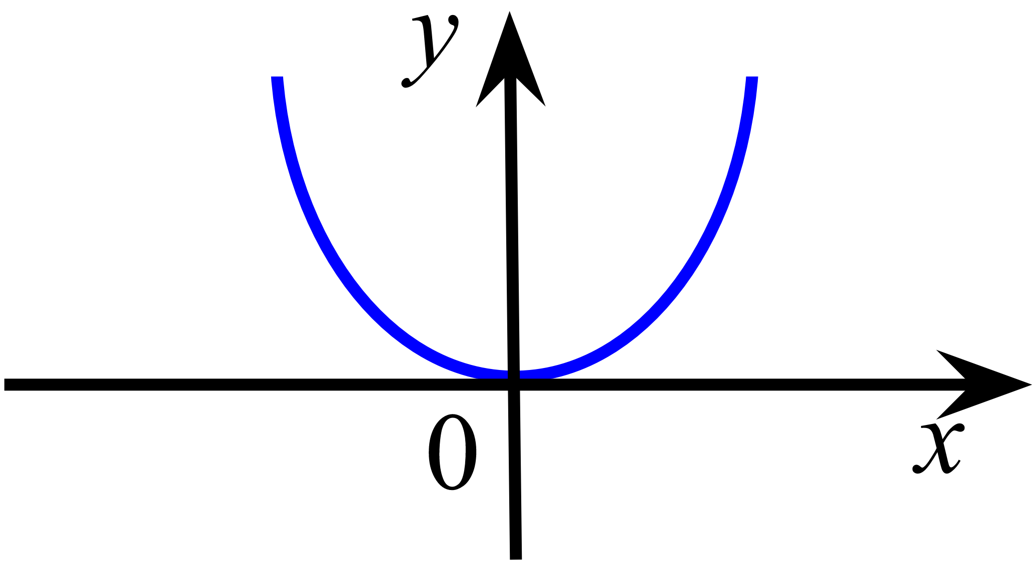
Примеры.

1) $z = \ln(xy)$. Эта функция определена, если $xy > 0$. Изобразим это множество на плоскости:



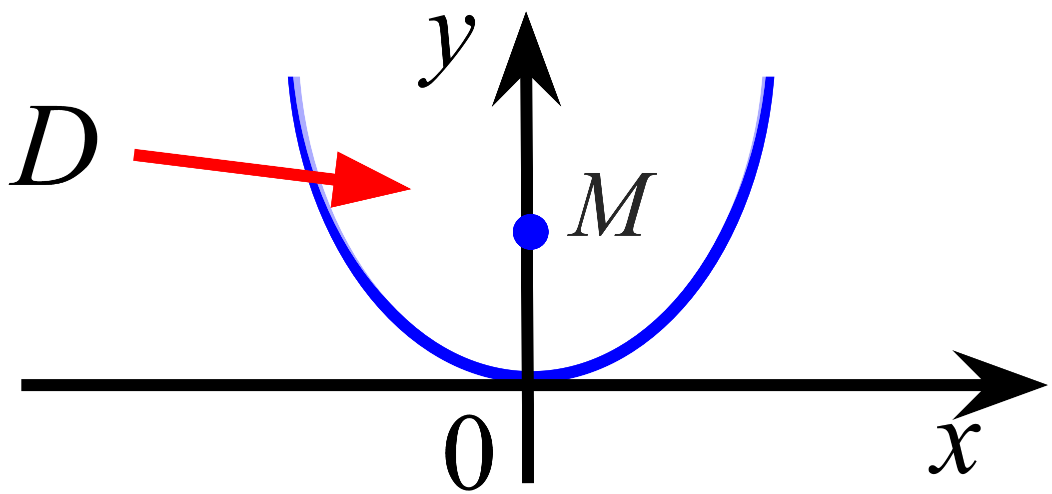
2) $z=\sqrt{y-x^2}; \quad y-x^2\ge 0.$

Нарисуем границу области $y=x^2.$
Это парабола.



Парабола делит область на две части. Достаточно взять одну точку, например $M(0;1)$, и проверить выполнение неравенства

$$y - x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 - 0 \geq 0$$ **(верно)**



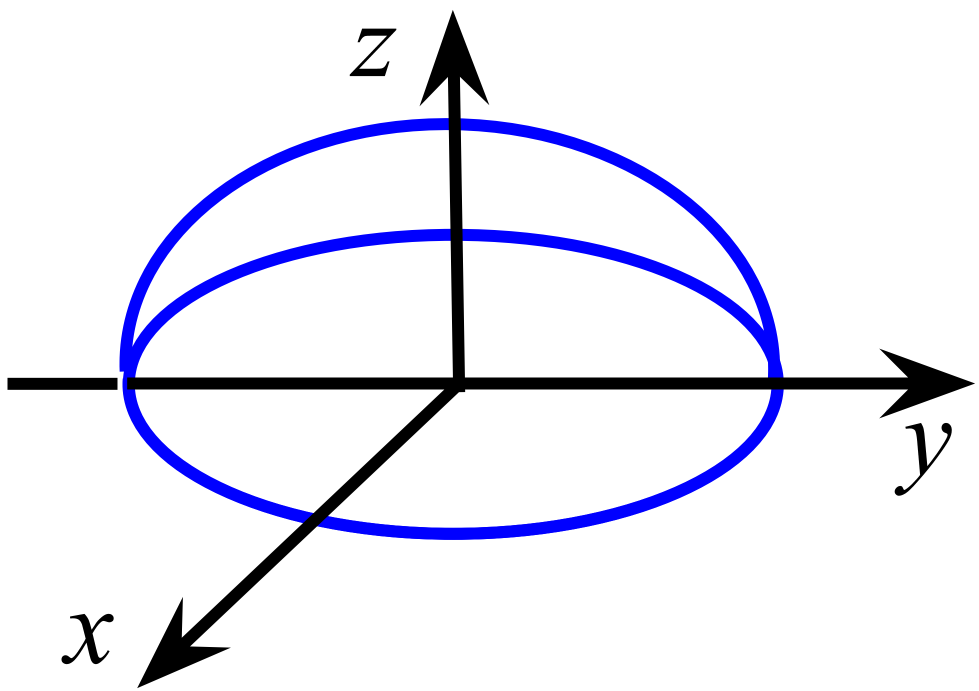
Следовательно, областью определения является множество точек D.

График функции двух переменных

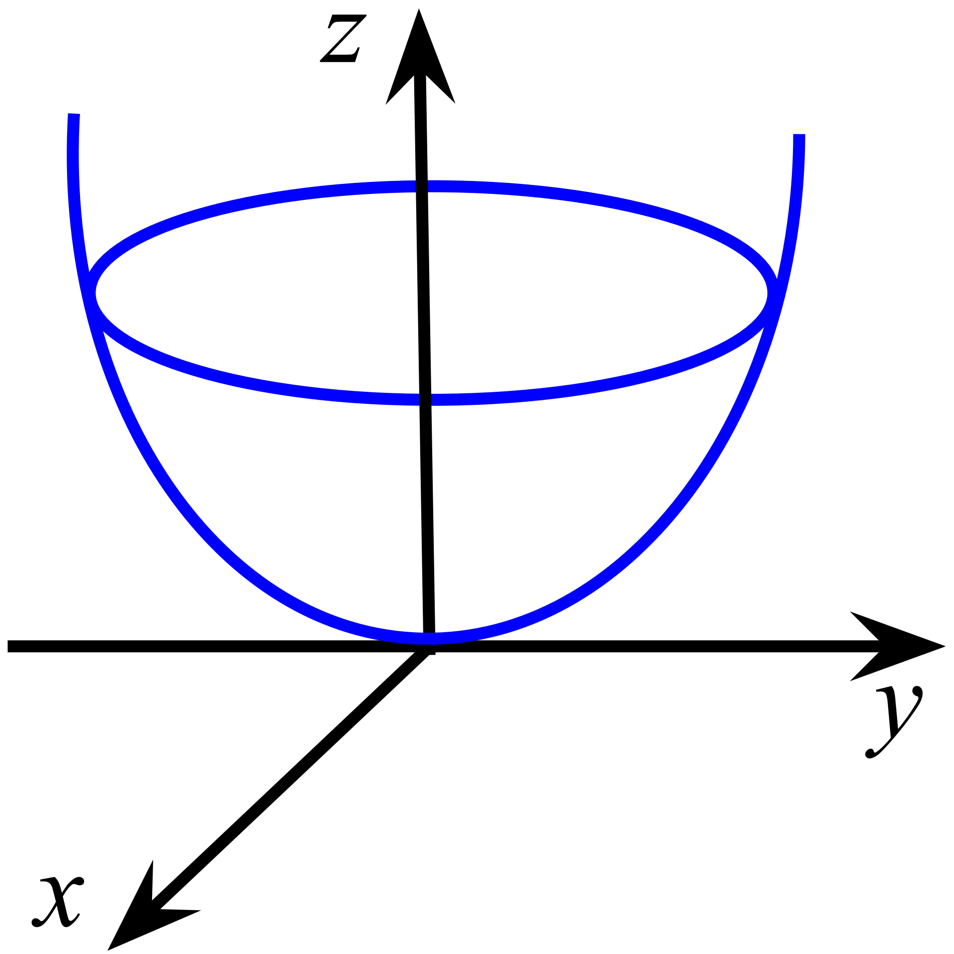
Графиком функции двух переменных является поверхность.

<u>Примеры.</u>

1) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ **- полусфера** $(z \geq 0)$.



2) $z = x^2 + y^2$ **- параболоид.**



Построение графиков функций двух переменных представляет значительные трудности. Поэтому существует еще один способ изображения функции двух переменных, основанный на сечении поверхности $z = f(x, y)$ плоскостями $z = c,$ где c - любое число, т.е. плоскостями, параллельными плоскости $Oxy.$

Назовем **линией уровня** множество точек плоскости $z(x, y) = c$, где c - число. Термин «линии уровня» взят из картографии. Там линии уровня – это линии, на которых высота точек земной поверхности над уровнем моря постоянна. По ним можно судить и о характере рельефа, что особенно важно, если местность гористая.

<u>Пример.</u> Построить линии уровня функции $z = x^2 + y^2$.

Линии уровня определяются уравнением

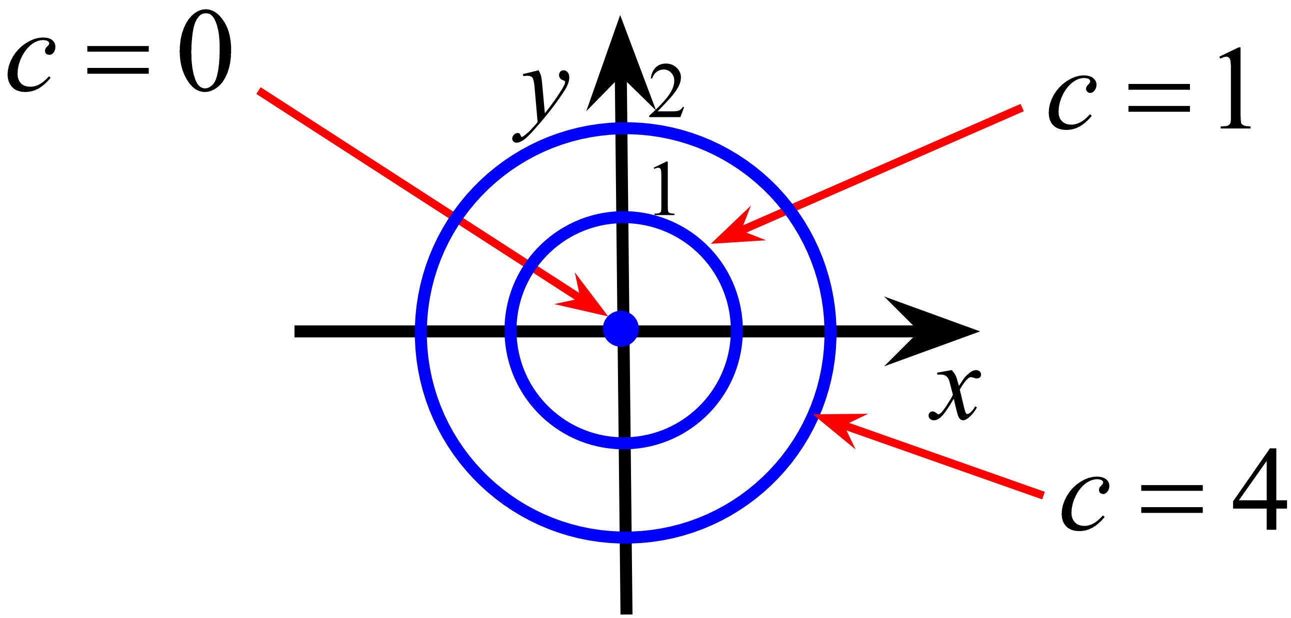
$$x^2 + y^2 = c \quad (0 \le c < +\infty).$$

Давая c **различные значения, получаем семейство концентрических окружностей.**

$c = 0:$ **получается точка** $(0,0)$.

$c = 1: \quad x^2 + y^2 = 1$ **(радиус** $r = 1$ **)**

$c = 4: \quad x^2 + y^2 = 2^2$ **(радиус** $r = 2$ **)**



Частные производные

Рассмотрим функцию $z = z(x, y)$. Зафиксируем одну переменную, например, y. Пусть $y = y_0$. Тогда получится функция одной переменной x. Производная от такой функции называется **частной производной** по x

и обозначается z'_x или $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Аналогично определяется z'_y или $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ (y - переменная, x - постоянная).

Пример.

1) **Найти** z'_x **и** z'_y, **если** $z = x^3 y^2 - 2xy.$

$$z'_x = y^2 \cdot (x^3)'_x - 2y \cdot x' = 3x^2 y^2 - 2y.$$

$$z'_y = x^3 \cdot (y^2)'_y - 2x \cdot y' = 2yx^3 - 2x.$$

Частные производные 2-ого порядка

Функция $z = z(x, y)$ **имеет четыре частные производные второго порядка.**

$$(z'_x)'_x = z''_{xx} \qquad (z'_y)'_x = z''_{yx}$$

$$(z'_x)'_y = z''_{xy} \qquad (z'_y)'_y = z''_{yy}$$

z''_{xy} **и** z''_{yx} **называются смешанными производными.**

Теорема.

Смешанные производные z''_{xy} **и** z''_{yx} **равны между собой при условии их непрерывности:**

$$z''_{xy} = z''_{yx}.$$

Пример.

1) Найти частные производные второго порядка функции

$$z = x^3 \cdot y^2.$$

$$z'_x = 3x^2 y^2,$$

$$z''_{xx} = (3x^2 y^2)'_x = 3y^2 \cdot 2x = 6xy^2.$$

$$z'_y = 2x^3 y,$$

$$z''_{yy} = (2x^3 y)'_y = 2x^3.$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (3x^2y^2)'_y = 2y \cdot 3x^2 = 6x^2y,$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (2x^3y)'_x = 2 \cdot 3x^2y = 6x^2y.$$

Мы видим, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Полный дифференциал функции

Пусть $z = z(x, y)$. **Полный дифференциал**

$$dz = z'_x\, dx + z'_y\, dy.$$

<u>Пример.</u> $z = x^2 y$. **Найти** dz.

$$z'_x = 2xy, \quad z'_y = x^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad dz = 2xy\, dx + x^2 dy.$$

Дифференцирование сложных функций

Пусть $z = z(x, y)$, **причем**

$x = x(t), y = y(t).$

Тогда z **есть сложная функция одной переменной** $t:$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Рассмотрим теперь функцию $f(x, y)$ **при условии, что** $y = y(x)$. **Здесь переменная** z **есть функция одной переменной** $x: z = f\left(x, y(x)\right)$.

Этот случай сводится к предыдущему, причем роль переменной t **играет** x.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Но $\frac{dx}{dx} = 1 \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.}$$

$\frac{\partial z}{\partial x}$ **- частная производная, которая находится так, как если бы** y **не зависел от** x **.**

$\dfrac{dz}{dx}$ - производная сложной функции одной переменной. Эту производную называют **полной производной.**

Примеры.

$$z = x^2 y, \quad \text{где} \quad y = \cos 2x.$$

Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ **и** $\dfrac{dz}{dx}$.

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy.$

Затем вместо y **подставим** $y = \cos 2x.$

Получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cos 2x.$$

2) $$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2; \quad \frac{dy}{dx}=-2\sin 2x \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dx}=2x\cos 2x-2x^2\sin 2x.$$

Ответ: $$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\cos 2x,$$

$$\frac{dz}{dx}=2x\cos 2x-2x^2\sin 2x.$$

Самостоятельная работа №2

1) Найти область определения функций

$$a)\ z=\sqrt{xy}, \qquad b)\ z=\frac{1}{\sqrt{x+y-1}}.$$

2) Найти частные производные первого и второго порядка

$$a)\ z=x^3y^4, \qquad b)\ z=x^2+3xy.$$

3) $z=x^3\cdot\ln y,$ **где** $y=5\sin x.$

Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ **и** $\dfrac{dz}{dx}.$