Системы счисления

Как известно, системой счисления называется совокупность правил записи чисел. Системы счисления подразделяются на позиционные и непозиционные. Как в позиционных, так и в непозиционных системах счисления используется определенный набор символов — цифр, последовательное сочетание которых образует число.

В позиционной системе счисления количество символов в наборе равно *основанию* системы счисления. Место каждой цифры в числе называется *позицией.*

Номер позиции символа (за вычетом единицы) в числе называется *разрядом.* Разряд 0 называется *младшим* разрядом.

В общем случае **<u>количественный (десятичный)</u>** эквивалент некоторого положительного числа А в позиционной системе счисления можно представить выражением:

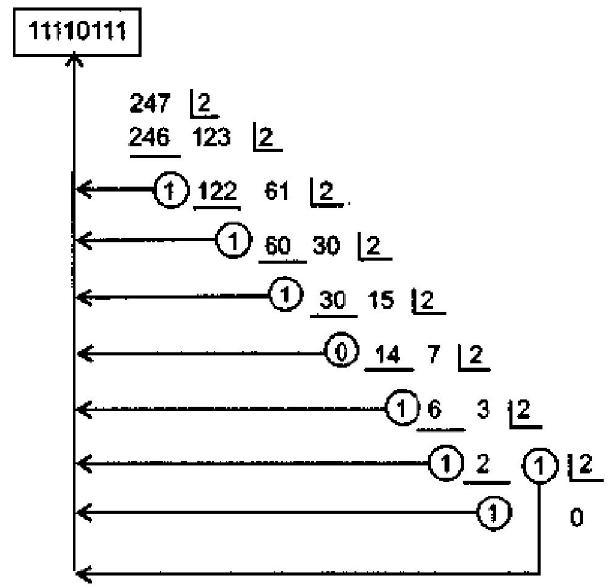
$$\mathbf{A_{(P)} = a_{n-1}\, p^{n-1} + a_{n-2}\, p^{n-2} + \ldots + a_1 p^1 + a_0 p^0} \qquad \mathbf{(1)}$$

где *р* — основание системы счисления (некоторое целое положительное число), а – цифра данной системы счисления, n – номер старшего разряда числа.

Двоичная система счисления

$$A_{(2)} = a_{n-1} 2^{n-1} + a_{n-2} 2^{n-2} + \ldots + a_1 2^1 + a_0 2^0 \qquad (2)$$

Значение степени (к)	$2^к$ (десятичное)	$2^к$ (двоичное)
1	2	10
2	4	100
3	8	1000
4	16	10000
5	32	100000
6	64	1000000
7	128	10000000
8	256	100000000
9	512	1000000000
10	1024	10000000000



0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111

Сложение и вычитание в двоичной системе

```
 11  11111      перенос
   110011011
 + 110010101
 -----------
  1100110000
```

```
   1  1   1      заем
   11010010011
 - 00111011011
 -------------
   10010111000
```

<u>Двоичная система счисления в вычислительной технике</u>

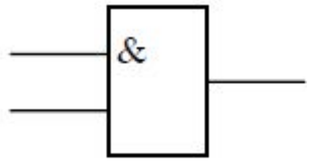
Аппаратура современных ЭВМ конструируется из некоторых относительно простых элементов – вентилями. Каждый вентиль является достаточно простой схемой и реализует одну из логических операций. У вентиля есть один или два входа (аргументы операции) и выход (результат).

Рассмотрим логику работы таких элементов.

Основные логические операции и логические элементы

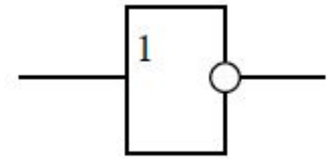
Конъюнкция (логическое

x	y	f
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



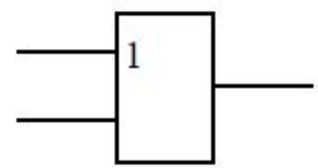
Инверсия (отрицание,

x	F
0	1
1	0



Дизъюнкция (логическое

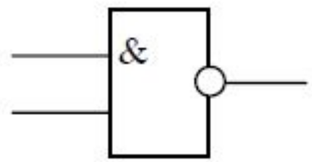
x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Логические операции и логические элементы

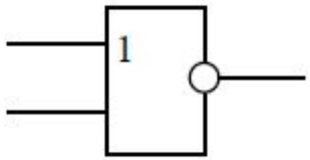
Штрих Шеффера (элемент «не и»)

x	y	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



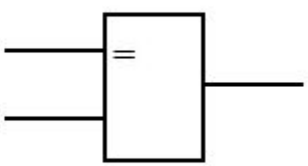
Стрелка Пирса (элемент «не или»)

x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



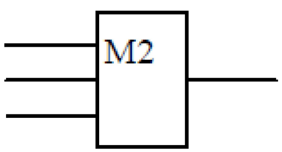
Эквивалентность

x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Исключающее «или» (сложение по mod 2)

x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Из вентилей строятся так называемые интегральные схемы (ИС) – набор вентилей, соединённых проводами такими радиотехническими элементами, Как сопротивления, конденсаторы и индуктивности. Каждая ИС имеет свои входы и выходы и реализует какую-нибудь функцию узла компьютера.

МИС – 1000 вентилей

СИС – 10 000 вентилей

БИС – 100 000 вентилей

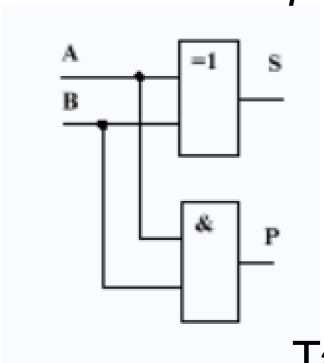
СБИС – 1 000 000 вентилей

Интегральная схема ЦП Pentium 4 содержит около 40 млн. транзисторов (15 млн. вентилей).

В качестве примера рассмотрим простую ИС двоичного полусуматора.

Полусумматор

Реализует сложение одноразрядных двоичных чисел без учета переноса из младшего разряда.

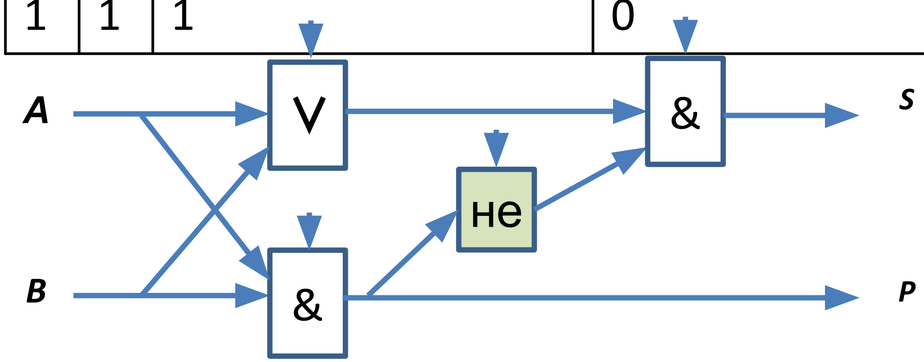


`S = a <> b = (a or b) and not (a and b)= a ⊕ b`

`P = a and b`

<u>Таблица истинности для функции x + y</u>

a	b	S (старший разряд)	P (младший разряд)
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

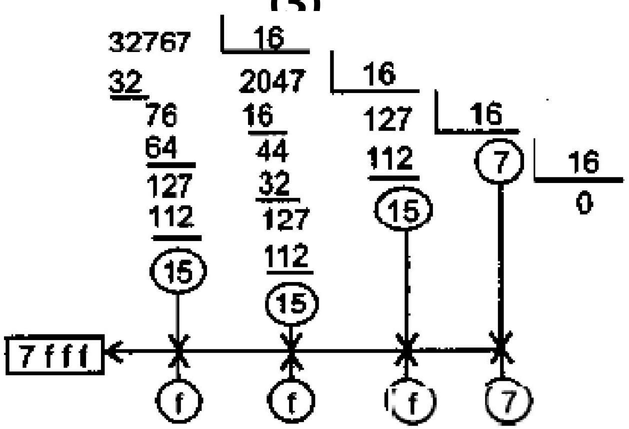


Шестнадцатеричная система счисления

Шестнадцатеричная система счисления имеет набор цифр {0,1, 2,..., 9, A, B, C, D, E, F} и основание степени *(р)* — 16.

Количественный эквивалент некоторого целого n-значного шестнадцатеричного числа вычисляется согласно формуле:

$$A_{(16)} = a_{n-1}16^{n-1} + a_{n-2}16^{n-2} + \ldots + a_1 16^1 + a_0 16^0 \quad (3)$$



1 1		перенос
+	E F 1 5	1 слагаемое
	C 1 E 8	2 слагаемое
	1 B 0 F D	результат

1 1		заем
-	B C D 8	уменьшаемое
	5 E F 4	вычитаемое
	5 D E 4	результат

0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

Перевод дробных чисел

Для перевода десятичных чисел в двоичное представление формулу (1) преобразуем к следующему виду:

$$A(p) = a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + \ldots + a_1p^1 + a_0p^0 + a_{-1}p^{-1} + a_{-2}p^{-2} + \ldots + a_{-m}p^{-m} \qquad (4)$$

Значение степени (к)	**$2^{-к}$**	**$16^{-к}$**
1	0,5	0,0625
2	0,25	0,00390625
3	0,125	0,000244140625
4	0,625	0,0000152587890625
5	0,03125	0,00000095367431640625
6	0,015625	0,0000000596046447753906250

Общий алгоритм перевода десятичной дроби в другую систему счисления:

1. Выделить целую часть десятичной дроби и выполнить ее перевод в выбранную систему счисления по алгоритмам, рассмотренным ранее.

2. Выделить дробную часть и умножить ее на основание выбранной новой системы счисления.

3. В полученной после умножения дробной части десятичной дроби выделить целую часть и принять ее в качестве значения первого после запятой разряда числа в новой системе счисления.

4. Если дробная часть значения, полученного после умножения, равна нулю, то прекратить процесс перевода. Процесс перевода можно прекратить также в случае, если достигнута необходимая точность вычисления. В противном случае вернуться к шагу 3.

Перевод чисел со знаком.

Представление чисел в памяти компьютера

Отрицательные числа. Прямой код

36_{10}
00100100_2
Прямой код:
00100100 (1Б)
0000000000100100 (2Б)

-36_{10}
Прямой код:
10100100 (1Б)
Обратный код
11011011 (1Б)
Дополнительный код
11011100 (1Б)

Диапазон изменения машинных изображений для прямого кода лежит в пределах

$- (1 - 2^{-n}) \leq [A_{пр}] \leq (1 - 2^{-n})$

Любое вещественное число А может быть записано в нормальной (научной, экспоненциальной) форме: $\mathbf{R = \pm\, \mathit{m} * p^{n}}$,
где: *m* - *м*антисса числа; *p* - основание системы счисления; *n* - порядок числа.

Представление числа в форме с плавающей точкой **неоднозначно**. Например, справедливы следующие равенства:

$$12{,}345 = 0{,}0012345 * 10^{4} = 0{,}12345 * 10^{2} = 1234{,}5 * 10^{-2}$$

Как правило, мантисса должна удовлетворять условию: $\mathbf{0{,}1_p < m < 1_p}$

± Машинный порядок *1 байт*	ма *2 байт*	нтис *3 байт*	са *4 байт*

Если обозначить машинный порядок Mp, а математический — p, то связь между ними выразится такой формулой: $M_p = p + 64$.

Пример: Запишем внутреннее представление числа 25,324 в форме с плавающей точкой.

1. Переведем его в двоичную систему счисления с 24 значащими цифрами. $25{,}324_{10} = 11001{,}0101001011110001101_2$
2. Запишем в форме нормализованного двоичного числа с плавающей точкой: $0{,}110010101001011110001101*10^{101}$

   Здесь мантисса, основание системы счисления ($2_{10}=10_2$) и порядок ($5_{10}=101_2$)записаны в двоичной системе.
3. Вычислим машинный порядок. Mp_2 = 101 + 100 0000 = 100 0101
4. Запишем представление числа в ячейке памяти.

01000101	11001010	10010111	10001101

Для того, чтобы получить внутреннее представление отрицательного числа -25,324, достаточно в полученном выше коде заменить в разряде знака числа 0 на 1.

11000101	11001010	10010111	10001101

Сложение (p_8)

	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	10
2	3	4	5	6	7	10	11
3	4	5	6	7	10	11	12
4	5	6	7	10	11	12	13
5	6	7	10	11	12	13	14
6	7	10	11	12	13	14	15
7	10	11	12	13	14	15	16

Умножение (p_8)

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	10	12	14	16
3	3	6	11	14	17	22	25
4	4	10	14	20	24	30	34
5	5	12	17	24	31	36	43
6	6	14	22	30	36	44	52
7	7	16	25	34	43	52	61

```
46052
23922
```

```
123
 32
```

```
 946
2864
```

Умножение (p_{16})

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f
2	2	4	6	8	a	c	e	10	12	14	16	18	1a	1c	1e
3	3	6	9	c	f	12	15	18	1b	1e	21	24	27	2a	2d
4	4	8	c	10	14	18	1c	20	24	28	2c	30	34	38	3c
5	5	a	f	14	19	1e	23	28	2d	32	37	3c	41	46	4b
6	6	c	12	18	1e	24	2a	30	36	3c	42	48	4e	54	5a
7	7	e	15	1c	23	2a	31	38	3F	46	4D				
8	8	10	18	20	28	30	38	40							
9	9	12	1b	24	2d	36	3f		51						
a	a	14	1e	28	32	3c	46			64					
b	b	16	21	2c	37	42	4d				79				
c	c	18	24	30	3c	48	54					90			
d	d	1a	27	34	41	4e	5b						A9		
e	e	1c	2a	38	46	54	62							C4	
f	f	1e	2d	3c	4b	5a	69							D2	E1

Сложение (p_{16})

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f
1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f	10
2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f	10	11
3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f	10	11	12
4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f	10	11	12	13
5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f	10	11	12	13	14
6	7	8	9	a	b	c	d	e	f	10	11	12	13	14	15
7	8	9	a	b	c	d	e	f	10	11	12	13	14	15	16
8	9	a	b	c	d	e	f	10	11	12	13	14	15	16	17
9	a	b	c	d	e	f	10	11	12	13	14	15	16	17	18
a	b	c	d	e	f	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
b	c	d	e	f	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
c	d	e	f	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
d	e	f	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
e	f	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
f	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

```
9A4DBE6       4A6B0F52     1B2A3
A2864AF       2F392F2F       3C2
```