Основная идея метода

Если неравенство приведено к стандартному виду

$$\frac{u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n}{v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_n} \vee 0, \qquad (1)$$

где символ «$\vee$» обозначает один из четырех возможных знаков неравенства: $<$, $\le$, $>$, $\ge$, то любой множитель в числителе или знаменателе можно заменить на более простой множитель, совпадающий с ним по знаку и имеющий те же самые корни.

Замечание. Преобразованное таким образом неравенство равносильно исходному в области его определения.

Предупреждение. Указанная замена возможна только тогда, когда неравенство приведено к стандартному виду.

Монотонность – ключ к замене

Утверждение 1. Функция $f(x)$ <u>строго</u> возрастает тогда и только тогда, когда для любых значений t_1 *и* t_2 из области определения функции разность $(t_1 - t_2)$ совпадает по знаку с разностью $\left(f(t_1) - f(t_2)\right)$, то есть

$$f\uparrow \Leftrightarrow \left(t_1 - t_2 \xleftrightarrow{ОДЗ} f(t_1) - f(t_2)\right).$$

Утверждение 2. Функция $f(x)$ <u>строго</u> убывает тогда и только тогда, когда для любых двух значений t_1 *и* t_2 из области определения функции разность $(t_1 - t_2)$ совпадает по знаку с разностью $\left(f(t_2) - f(t_1)\right)$, то есть

$$f\downarrow \Leftrightarrow \left(t_1 - t_2 \xleftrightarrow{ОДЗ} f(t_2) - f(t_1)\right).$$

Комментарий. Практически, только замена знакопостоянных множителей не вытекает из этих утверждений. Поэтому, если нет желания трогать знак неравенства, всюду положительные множители просто убираем, а всюду отрицательные – заменяем на *(-1)*. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ с отрицательным дискриминантом заменяем на старший коэффициент (или на свободный член), то есть $ax^2 + bx + c \leftrightarrow a \leftrightarrow c\ (при\ D < 0).$

(2)

Функция $y = t^n$ и вызываемые ею замены

Поскольку функция $y = t^n$ при $n > 0$ является строго возрастающей на множестве неотрицательных чисел (а при нечетном натуральном n – на всей числовой оси), то в силу *утверждения 1* справедливы замены:

$$t_1 - t_2 \leftrightarrow t_1^n - t_2^n \textit{ при } n > 0, t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, \qquad (3)$$

$$t_1 - t_2 \leftrightarrow t_1^{2k-1} - t_2^{2k-1} \textit{ при } k - \textit{натуральном}. \qquad (4)$$

Функции $y = t^2$ и $y = \sqrt{t}$, рассматриваемые на множестве неотрицательных чисел, являются строго возрастающими, то есть

$$t_1 \vee t_2 \Leftrightarrow t_1^2 \vee t_2^2 \Leftrightarrow \sqrt{t_1} \vee \sqrt{t_2}.$$

Поэтому

$$t_1 - t_2 \leftrightarrow t_1^2 - t_2^2, \qquad (5)$$

$$\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} \leftrightarrow t_1 - t_2, \textit{ где } t_1, t_2 \geq 0. \qquad (6)$$

Так как $|m| \geq 0$ и $|m|^2 = m^2$ для любого m, то получаем, что

$$|t_1| - |t_2| \leftrightarrow |t_1|^2 - |t_2|^2 \leftrightarrow t_1^2 - t_2^2. \qquad (7)$$

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{\left(|x-2|-4-x^2\right)\cdot\left(|x+4|-\sqrt{x^2-x-2}\right)}{\left(|1-x|-4\right)\cdot\left(|3+x|-|x-5|\right)}>0. \qquad (8)$$

Решение (подробное). Исходное уравнение имеет вид

$$\frac{u_1\cdot u_2}{v_1\cdot v_2}>0.$$

Все множители u_1, u_2, v_1 и v_2 имеют вид t_1-t_2, *где* $t_1\geq 0$ *и* $t_2\geq 0$ поэтому, в силу (5), эти множители можно заменить на знакосовпадающие с ними множители вида $t_1^2-t_2^2$:

$$(8)\Leftrightarrow\frac{\left(|x-2|^2-|4+x^2|^2\right)\cdot\left(|x+4|^2-\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)^2\right)}{\left(|1-x|^2-4^2\right)\cdot\left(|3+x|^2-|x-5|^2\right)}>0.$$

Так как $|m|^2=m^2$ и $\sqrt{x^2-x-2}=x^2-x-2$, то с учетом неотрицательности подкоренного выражения получаем:

$$(8) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left(|x-2|^2-|4+x^2|^2\right)\cdot\left(|x+4|^2-\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)^2\right)}{\left(|1-x|^2-4^2\right)\cdot\left(|3+x|^2-|x-5|^2\right)}>0, \\ x^2-x-2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left(x-2-\left(4+x^2\right)\right)\left(x-2+\left(4+x^2\right)\right)\left(9x+18\right)}{\left(1-x-4\right)\left(1-x+4\right)\left(3+x-\left(x-5\right)\right)\left(3+x+x-5\right)}>0, \\ x\leq -1 \; \text{или} \; x\geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{9\left(-x^2+x-6\right)\left(x^2+x+2\right)\left(x+2\right)}{16\left(-x-3\right)\left(5-x\right)\left(x-1\right)}>0, \\ x\leq -1 \; \text{или} \; x\geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

где знакопостоянные *(D<0)* квадратные трехчлены $\left(-x^2+x-6\right)$ и $\left(x^2+x+2\right)$ согласно (2) заменяем на (-1) и 1 соответственно

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(-1)\cdot 1\cdot (x+2)}{(x+3)(x-5)(x-1)} > 0, \\ x \le -1 \text{ или } x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+2)}{(x+3)(x-5)(x-1)} < 0, \\ x \le -1 \text{ или } x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < -2 \text{ или } 1 < x < 5, \\ x \le -1 \text{ или } x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 < x < -2, \\ 2 \le x < 5. \end{array} \right.$$

Ответ: $-3 < x < -2;\ 2 \le x < 5.$

Две любопытные замены:

$$\sqrt{t} \xleftrightarrow{ОДЗ} t, \tag{9}$$

$$\sqrt{f} + \sqrt{g} \xleftrightarrow{ОДЗ} f + g. \tag{10}$$

Замена (9) очень удобна там, где приходится отслеживать область допустимых значений.

Замена (10) суммы $\sqrt{f} + \sqrt{g}$ при возможном одновременном равенстве нулю подкоренных выражений на сумму $f + g$ позволяет учитывать эту возможность.

Пример 2. Решить неравенство

$$\left(x^2+x-6\right)\sqrt{x^2-2x-3}\ge 0.$$

Решение.

$$\left(x^2+x-6\right)\sqrt{x^2-2x-3}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2+x-6\right)\left(x^2-2x-3\right)\ge 0, \\ x^2-2x-3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x+3)(x-2)(x+1)(x-3)\ge 0, \\ x\le -1 \text{ или } x\ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -3, \\ x=-1, \\ x\ge 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\,-3]\cup\{-1\}\cup[3;\,+\infty).$

Пример 3. Решить неравенство

$$\left(\sqrt{x+10}-3x\right)\left(|x+14|-2x\right)<0.$$

<u>*Решение*</u>. Множители $\left(\sqrt{x+10}-3x\right)$ и $\left(|x+14|-2x\right)$ уже нельзя рассматривать как разности неотрицательных величин, так как выражения *3x* и *2x* в области допустимых значений (то есть при $x+10\geq 0$) могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Однако, если ОДЗ исходного неравенства разбить на два промежутка $-10\leq x\leq 0$ и $x>0$ (при *x=0* выражения *3x* и *2x* меняют знак), то легко заметить, что на промежутке $-10\leq x\leq 0$ мы имеем произведение двух положительных чисел, и поэтому исходное неравенство ложно, а на втором промежутке каждый множитель есть разность двух неотрицательных чисел, а следовательно, можно воспользоваться методом замены множителей. Итак,

$$\left(\sqrt{x+10}-3x\right)\left(|x+14|-2x\right)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -10\leq x\leq 0, \\ \left(\sqrt{x+10}-3x\right)\left(|x+14|-2x\right)<0 \quad (\textit{ложно}) \end{cases} \\ \begin{cases} x>0, \\ \left(\left(\sqrt{x+10}\right)^2-(3x)^2\right)\left(|x+14|^2-(2x)^2\right)<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \left(x + 10 - 9x^2\right)\left((x+14)^2 - (2x)^2\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ -\left(9x^2 - x - 10\right)\left(x + 14 - 2x\right)\left(x + 14 + 2x\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ -9(x+1)\left(x - \frac{10}{9}\right)(14 - x)(3x + 14) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \left(x - \frac{10}{9}\right)(x - 14) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

так как при *x>0 (x+1)* и *(3x+14)* – положительные числа

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \frac{10}{9} < x < 14 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{10}{9} < x < 14.$$

Ответ. $\left(\frac{10}{9}; 14\right)$.

Показательная и логарифмическая функции и вызываемые ими замены

Показательная функция $y = a^t$ строго убывает при $0 < a < 1$ и строго возрастает при $a > 1$. Поэтому, в частности, для $a = 10$ получаем

$$10^{t_1} - 10^{t_2} \leftrightarrow t_1 - t_2.$$

Для произвольного основания a, пользуясь основным логарифмическим тождеством, можно увидеть, что

$$a^{t_1} - a^{t_2} = \left(10^{\lg a}\right)^{t_1} - \left(10^{\lg a}\right)^{t_2} = 10^{t_1 \lg a} - 10^{t_2 \lg a}.$$

Откуда

$$a^{t_1} - a^{t_2} \leftrightarrow t_1 \cdot \lg a - t_2 \cdot \lg a,$$

$$\text{то есть } a^{t_1} - a^{t_2} \leftrightarrow \left(t_1 - t_2\right) \cdot \lg a. \qquad (11)$$

Функция $y = \lg x$ - строго возрастающая. Поэтому

$$x_1 - x_2 \xleftrightarrow{ОДЗ} \lg x_1 - \lg x_2.$$

Если $x_1=a$ и $x_2=1$, то получаем, что

$$a - 1 \leftrightarrow \lg a - \lg 1,$$

$$\textit{то есть}\ \lg a \leftrightarrow a - 1. \tag{12}$$

Откуда соотношение (11) принимает вид

$$a^{t_1} - a^{t_2} \leftrightarrow (t_1 - t_2)(a - 1). \tag{13}$$

Таким образом, разность степеней с одним и тем же основанием по знаку совпадает с произведением разности показателей этих степеней на разность основания и единицы.

Для логарифмической функции $y = \log_a t$ аналогично устанавливаем

$$\log_a t_1 - \log_a t_2 = \frac{\lg t_1}{\lg a} - \frac{\lg t_2}{\lg a} = \frac{1}{\lg a}\left(\lg t_1 - \lg t_2\right).$$

Отсюда следует, что

$$\log_a t_1 - \log_a t_2 \leftrightarrow \frac{\lg t_1 - \lg t_2}{\lg a} \leftrightarrow \frac{t_1 - t_2}{a - 1}.$$

То есть разность логарифмов по одному и тому же основанию всегда по знаку совпадает с отношением разности подлогарифмических выражений к разности основания и единицы:

$$\log_a t_1 - \log_a t_2 \leftrightarrow \frac{t_1 - t_2}{a - 1}. \qquad (14)$$

Замечание. Утверждения (14) и (13) равносильны, поскольку показательная и логарифмическая функции взаимно обратны.

Эти утверждения также позволяют эффективно решать многие неравенства, которые принято относить к разряду задач повышенной сложности. В частности, из (13) и (14) получаются полезные схемы решения основных показательных логарифмических неравенств:

1) $$a^f > a^g \Leftrightarrow \begin{cases} (f-g)(a-1) > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} a^f > b, \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (f - \log_a b)(a-1) > 0;$$

3) $$\log_a f > \log_a g \Leftrightarrow \begin{cases} (f-g)(a-1) > 0, \\ f > 0, \\ g > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

4) $$\log_a f > b \Leftrightarrow \begin{cases} (f-a^b)(a-1) > 0, \\ f > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

5) $$\log_a f + \log_a g > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (fg-1)(a-1) > 0, \\ f > 0, \\ g > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

6) $$\frac{a^{f_1} - a^{f_2}}{a^{g_1} - a^{g_2}} > 0 \Leftrightarrow \frac{f_1 - g_1}{f_2 - g_2} > 0.$$

Практика

Пример 1. $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0.$

Решение.

$$\frac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0 \Leftrightarrow \frac{|x|^2-7|x|+10}{(x-3)^2}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(|x|-2)(|x|-5)}{(x-3)^2}<0 \Leftrightarrow \frac{\left(x^2-2^2\right)\left(x^2-5^2\right)}{(x-3)^2}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+2)(x-5)(x+5)}{(x-3)^2}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-5;\,2) \cup (2;\,3) \cup (3;\,5).$$

Пример 2. $\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}>1.$

Решение.

$$\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}>1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-x\right)\left(\left(4x^2+2x+1\right)-1\right)>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1)(2x+1)>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-0{,}5)\cup(1;+\infty).$$

Пример 3. $\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq \left(x^2+x+1\right)^3.$

Решение.

$$\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq \left(x^2+x+1\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+5}{x+2}-3\right)\left(\left(x^2+x+1\right)-1\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(-2x-1)\cdot x\cdot(x+1)}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-2;-1] \cup [-0{,}5;0].$$

Пример 4. $\left|2^{4x^2-1}-5\right|\le 3.$

Решение.

$$\left|2^{4x^2-1}-5\right|\le 3 \Leftrightarrow \left(2^{4x^2-1}-5-3\right)\left(2^{4x^2-1}-5+3\right)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2^{4x^2-1}-2^3\right)\left(2^{4x^2-1}-2^1\right)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(4x^2-1-3\right)\left(4x^2-1-1\right)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left[-1;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{2}};1\right].$$

<u>Пример 5.</u> $1 < 3^{\left|x^2 - x\right|} \le 9.$

<u>Решение</u>.

$$1 < 3^{\left|x^2 - x\right|} \le 9 \Leftrightarrow 0 < \left|x^2 - x\right| < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|x^2 - x\right| \cdot \left(\left|x^2 - x\right| - 2\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - x\right)^2 \cdot \left(\left(x^2 - x\right) - 2\right)\left(\left(x^2 - x\right) + 2\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x^2 - 1\right)^2 (x + 1)(x - 2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-1;\, 0) \cup (0;\, 1) \cup (1;\, 2).$$

Пример 6. $$\frac{3^{2|x-1|}+3}{4}<3^{|x-1|}.$$

Решение.

$$\frac{3^{2|x-1|}+3}{4}<3^{2|x-1|} \Leftrightarrow \left(3^{|x-1|}\right)^2-4\cdot 3^{|x-1|}+3<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(3^{|x-1|}-1\right)\left(3^{|x-1|}-3\right)<0 \Leftrightarrow \left(|x-1|-0\right)\left(|x-1|-1\right)<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left((x-1)-1\right)\left((x-1)+1\right)<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x-2)x<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(0;1)\cup(1;2).$$

Пример 7. $\log_{x^2}(3-2x) > 1.$

Решение.

$$\log_{x^2}(3-2x) > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(3-2x)-x^2}{x^2-1} > 0, \\ 3-2x > 0, \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} < 0, \\ x < \dfrac{3}{2}, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad -3 < x < -1.$$

Пример 8. $\dfrac{\log_a\left(35-x^3\right)}{\log_a(5-x)}>3.$

Решение.

$$\frac{\log_a\left(35-x^3\right)}{\log_a(5-x)}>3 \Leftrightarrow \begin{cases}\log_{5-x}\left(35-x^2\right)>0,\\ a>0,\\ a\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(\left(35-x^3\right)-(5-x)^3\right)\cdot\left((5-x)-1\right)>0,\\ 35-x^3>0,\\ 5-x>0,\\ a>0, a\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(15x^2 - 75x + 90\right)\cdot\left(4 - x\right) > 0, \\ x^3 < 35, \\ x < 5, \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3)(x-4) > 0, \\ x < \sqrt[3]{35}, \\ x < 5, \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 2 < x < 3.$$

Пример 9. $\log_x(x+1) < \log_{\frac{1}{x}}(2-x)$.

Решение.

$$\log_x(x+1) < \log_{\frac{1}{x}}(2-x) \Leftrightarrow \log_x(x+1) < \log_x \frac{1}{(2-x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2-x} - (x+1)\right)(x-1) < 0, \\ 2-x > 0, \\ x+1 > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x^2 - x - 1)(x-1)}{x-2} < 0, \\ 0 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left(x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(x-1)}{x-2} < 0, \\ 0 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(x-1) > 0, \\ 0 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ \textit{или} \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} < x < 2. \end{matrix}$$

Пример 10. $5^{\log_x \frac{8-12x}{x-6}} > 25.$

Решение.

$$5^{\log_x \frac{8-12x}{x-6}} > 25 \Leftrightarrow \log_x \frac{8-12x}{x-6} > 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{8-12x}{x-6} - x^2\right)(x-1) > 0, \\ \dfrac{8-12x}{x-6} > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left(8-12x-x^3+6x^2\right)\left(x-1\right)}{x-6}>0, \\ \dfrac{2-3x}{x-6}>0, \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left(x-2\right)^3\left(x-1\right)}{x-6}>0, \\ \dfrac{2}{3}<x<6 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3}<x<1 \text{ или } 2<x<6.$$

Пример 11. $\log_x \log_2\left(4^x - 12\right) \le 1.$

Решение.

$$\log_x \log_2\left(4^x - 12\right) \le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\log_2(4^x - 12) - x\right)\left(x - 1\right) \le 0, \\ \log_2(4^x - 12) > 0, \\ x > 0, \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(4^x - 12 - 2^x\right)(x-1) \le 0, \\ 4^x - 12 - 1 > 0, \\ x > 0, \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2^{2x} - 2^x - 12\right)(x-1) \le 0, \\ x > \log_4 13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(2^x + 3\right)\left(2^x - 4\right)(x-1) \le 0, \\ x > \log_4 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2^x - 2^2\right)(x-1) \le 0, \\ x > \log_4 13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-1) \le 0, \\ x > \log_4 13 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \log_4 13 < x < 2.$$

Пример 12. $\log_3(4^x+1)+\log_{4^x+1}3>2{,}5.$

Решение.

$$\log_3(4^x+1)+\log_{4^x+1}3>2{,}5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_3(4^x+1)+\frac{1}{\log_3(4^x+1)}>\frac{5}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\left(\log_3(4^x+1)\right)^2-5\log_3(4^x+1)+2}{\log_3(4^x+1)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\left(\log_3(4^x+1)-2\right)\left(\log_3(4^x+1)-\frac{1}{2}\right)}{\log_3(4^x+1)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(4^x+1-9\right)\left(4^x+1-\sqrt{3}\right)}{4^x+1-1}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(4^x-8\right)\left(4^x-\left(\sqrt{3}-1\right)\right)}{4^x}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\log_4 8\right)\left(x-\log_4\left(\sqrt{3}-1\right)\right)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\log_4\left(\sqrt{3}-1\right)\right)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x<\log_4\left(\sqrt{3}-1\right) \textit{или } x>\frac{3}{2}.$$

Пример 13. $\log_3\left(3^x+1\right)\cdot\log_{\frac{1}{3}}\left(3^{x+2}-9\right)>-3.$

Решение.

$$\log_3\left(3^x+1\right)\cdot\log_{\frac{1}{3}}\left(3^{x+2}-9\right)>-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\log_3\left(3^x+1\right)\cdot\log_3\left(9\left(3^x+1\right)\right)+3>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\log_3\left(3^x+1\right)\cdot\left(2+\log_3\left(3^x+1\right)\right)+3>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\log_3\left(3^x+1\right)\right)^2+2\log_3\left(3^x+1\right)-3<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\log_3\left(3^x+1\right)-(-3)\right)\left(\log_3\left(3^x+1\right)-1\right)<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(3^x - 1 - \frac{1}{27}\right)\left(3^x - 1 - 3\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(3^x - \frac{28}{27}\right)\left(3^x - 4\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \log_3 \frac{28}{27}\right)\left(x - \log_3 4\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{28}{27} < x < \log_3 4.$$

Пример 14. $\left(2^x+3\cdot 2^{-x}\right)^{2\log_2 x-\log_2(x+6)}>1.$

Решение.

$$\left(2^x+3\cdot 2^{-x}\right)^{2\log_2 x-\log_2(x+6)}>1 \Leftrightarrow \begin{cases}\left(2^x+3\cdot\dfrac{1}{2^x}\right)^{\log_2\frac{x}{x+6}}>1,\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(x^2-(x+6)\right)\left(2^{2x}-2^x+3\right)>0,\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-x-6>0,\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)(x+2)>0,\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \quad x>3.$$

Пример 15. $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)-\log_{\frac{1}{2}}(x+3)-\log_{\frac{x+3}{x-3}} 2>0.$

Решение.

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-3)-\log_{\frac{1}{2}}(x+3)-\log_{\frac{x+3}{x-3}} 2>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+3)-\log_2(x-3)-\frac{1}{\log_2\frac{x+3}{x-3}}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left(\log_2\dfrac{x+3}{x-3}-1\right)\left(\log_2\dfrac{x+3}{x-3}+1\right)}{\log_2\dfrac{x+3}{x-3}}>0, \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left(\dfrac{x+3}{x-3}-2\right)\left(\dfrac{x+3}{x-3}-\dfrac{1}{2}\right)}{\dfrac{x+3}{x-3}-1} > 0, \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(9-x)(x+9)}{x-3} > 0, \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (9-x)(x+9) > 0, \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 < x < 9.$$

Пример 16. $\log_p \frac{1+\log^2{}_p x}{1-\log_p x} < 0.$

Решение.

$$\log_p \frac{1+\log^2{}_p x}{1-\log_p x} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1+\log^2{}_p x}{1-\log_p x} - 1\right)(p-1) < 0, \\ \frac{1+\log^2{}_p x}{1-\log_p x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(\log^2{}_p x + \log_p x)(p-1)}{1-\log_p x} < 0, \\ 1-\log_p x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_p x \cdot (\log_p x + 1)(p-1) < 0, \\ 1 - \log_p x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) \cdot \left(x - \dfrac{1}{p} \right)(p-1) < 0, \\ (x-p)(p-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < p < 1, \\ (x-1) \cdot \left(x - \dfrac{1}{p} \right) > 0, \\ (x-p) > 0 \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} p > 1, \\ (x-1) \cdot \left(x - \dfrac{1}{p} \right) < 0, \\ (x-p) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < p < 1, \\ p < x < 1 \text{ или } x > \dfrac{1}{p} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} p > 1, \\ \dfrac{1}{p} < x < 1. \end{cases}$$

При $p \le 1$ *решений нет.*

Пример 17. $\log_5 x + \log_x \frac{x}{3} < \frac{\log_5 x \cdot (2 - \log_3 x)}{\log_3 x}.$

Решение.

$$\log_5 x + \log_x \frac{x}{3} < \frac{\log_5 x \cdot (2 - \log_3 x)}{\log_3 x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_5 x + 1 - \frac{1}{\log_3 x} - \frac{2\log_5 x - \log_5 x \cdot \log_3 x}{\log_3 x} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\log_5 x \cdot \log_3 x + \log_3 x - 1 - 2\log_5 x}{\log_3 x} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\log_5 x\cdot\left(\log_3 x-1\right)+\left(\log_3 x-1\right)}{\log_3 x}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\log_3 x-1\right)\left(\log_5 x+\dfrac{1}{2}\right)}{\log_3 x}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-3)\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)}{x-1}<0, \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 0<x<\frac{1}{\sqrt{5}} \text{ или } 1<x<3.$$

Пример 18. $\log_{|x-4|}\left(2x^2-9x+4\right)>1.$

Решение.

$$\log_{|x-4|}\left(2x^2-9x+4\right)>1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(2x^2-9x+4-|x-4|\right)\left(|x-4|-1\right)>0, \\ 2x^2-9x+4>0, \\ |x-4|\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\left(2x^2-9x+4\right)^2-(x-4)^2\right)\left((x-4)^2-1\right)>0, \\ 2x^2-9x+4>0, \\ x\neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(2x^2-9x+4-x+4\right)\left(2x^2-9x+4+x-4\right)\left(x-4-1\right)\left(x-4+1\right)>0, \\ x<\dfrac{1}{2} \text{ или } x>4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(2x^2-10+8\right)\left(2x^2-8x\right)\left(x-5\right)\left(x-3\right)>0, \\ x<\dfrac{1}{2} \text{ или } x>4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-1\right)\cdot\left(x-4\right)^2\cdot x\cdot\left(x-5\right)\left(x-3\right)>0, \\ x<\dfrac{1}{2} \text{ или } x>4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x<0 \\ \text{или} \\ x>5. \end{matrix}$$

Пример 19. $\left|\log_3 x\right| < \left|\log_3 \dfrac{x}{9}\right|.$

Решение.

$$\left|\log_3 x\right| < \left|\log_3 \frac{x}{9}\right| \Leftrightarrow \log^2{}_3 x < \log^2{}_3 \frac{x}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\log_3 x - \log_3 \frac{x}{9}\right)\left(\log_3 x + \log_3 \frac{x}{9}\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\log_3 x - \log_3 x + 2\right)\left(2\log_3 x - 2\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x - 1 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 < 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ 0 < x < 3.$$

Пример 20. $8\cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}+9^{\sqrt[4]{x}+1}\ge 9^{\sqrt{x}}$.

Решение.

$$8\cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}+9^{\sqrt[4]{x}+1}\ge 9^{\sqrt{x}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9\cdot 3^{\sqrt{x}}\cdot 3^{\sqrt[4]{x}}+9\left(3^{\sqrt[4]{x}}\right)^2-\left(3^{\sqrt{x}}\cdot 3^{\sqrt[4]{x}}+\left(3^{\sqrt{x}}\right)^2\right)\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9\cdot 3^{\sqrt[4]{x}}\left(3^{\sqrt{x}}+3^{\sqrt[4]{x}}\right)-3^{\sqrt{x}}\left(3^{\sqrt[4]{x}}+3^{\sqrt{x}}\right)\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(3^{\sqrt{x}}+3^{\sqrt[4]{x}}\right)\left(9\cdot 3^{\sqrt[4]{x}}-3^{\sqrt{x}}\right)\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{2+\sqrt[4]{x}} - 3^{\sqrt{x}} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + \sqrt[4]{x} - \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt[4]{x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{x} - 2\right)\left(\sqrt[4]{x} + 1\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x} \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 16.$$

Итоги

Основные замены:

$$t_1 - t_2 \leftrightarrow f(t_1) - f(t_2),$$

если *f(t)* – строго возрастающая функция;

$$t_1 - t_2 \leftrightarrow f(t_2) - f(t_1),$$

если *f(t)* – строго убывающая функция.

Наиболее часто встречающиеся замены (без учета ОДЗ):

$$|t| \leftrightarrow t^2;$$

$$|t_1| - |t_2| \leftrightarrow t_1^2 - t_2^2;$$

$$at^2 + bt + c \leftrightarrow a \text{ при } D < 0;$$

$$\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} \leftrightarrow t_1 - t_2;$$

$$\left|t_1\right| - \sqrt{t_2} \leftrightarrow t_1^{\ 2} - t_2;$$

$$\left|t\right| - \left(at^2 + bt + c\right) \leftrightarrow t^2 - \left(at^2 + bt + c\right),$$

$$npu\ D \le 0;$$

$$a^{t_1} - a^{t_2} \leftrightarrow (t_1 - t_2)(a-1);$$

$$a^{t_1} - 1 \leftrightarrow t(a-1);$$

$$f - g \leftrightarrow f^2 - g^2 \; npu \; f \geq 0 \; u \; g \geq 0;$$

$$\log_a f \leftrightarrow (f-1)(a-1);$$

$$\log_a f - g \leftrightarrow \left(f - a^g\right)(a-1);$$

$$\log_a f - \log_a g \leftrightarrow (f-g)(a-1).$$

Литература:

Голубев В. И. Метод замены множителей, М: Архимед. Лекции и задачи. Вып. 4., 2006 г.

Голубев В. И., Шарыгин И.Ф. Эффективный путь решения неравенств М. Квантор 1993 г.