# Cap. 2 Sisteme determinate de ecuaţii algebrice liniare

## 2.3 Rezolvarea sistemelor prin triangularizare cu pivotare parţială

☞ se consideră sistemul de *n* ecuaţii algebrice liniare cu *n* necunoscute:

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \underline{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

☞ <u>problema de calcul</u> → determinarea unei soluţii $\underline{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ care să verifice sistemul dat

☞ <u>principiu</u>: la pasul k se caută pivotul printre elementele din coloana k, pornind de la elementul de pe diagonala principală în jos, alegându-se elementul care are cea mai mare valoare în modul: $|a^{[k]}_{i_k,k}| = \max\limits_{k\le i\le n}\{|a^{[k]}_{i,k}|\} = \xi_k$

☞ dacă $i_k \neq k$ → se permută liniile *k* şi $i_k$ cu ajutorul matricii de permutare de linii $P_k$

$$P_k \cdot A_k \longrightarrow A_{k+1} = M_k \cdot (P_k \cdot A_k)$$

$$\Downarrow$$

$$|\mu_{i,k}| \le 1, i = k+1, \ldots, n$$

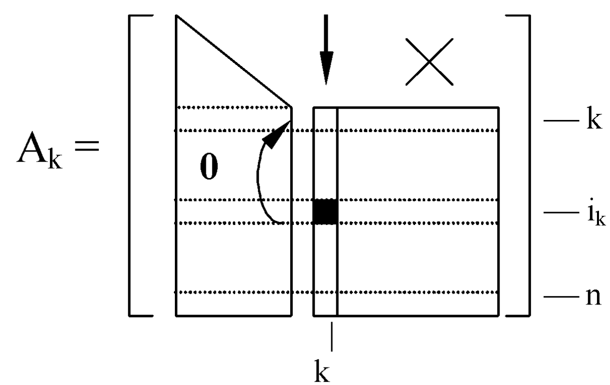


**Fig. 2.1** Principiul triangularizării cu pivotare parţială a unei matrice: pivotul se găseşte în coloana k, liniile k ÷ n; k = 1, …, n - 1

☞ proprietăţi matrice de permutare de linii, $P_k$:

$$\det(P_k) = -1; \quad P_k = P_k^{-1}$$

**Teoremă:**

*Dacă matricea este nesingulară, atunci există o matrice numită* ***matrice generală de permutare de linii***, *astfel încât:*

$$P \cdot A = L' \cdot U$$

*în care* U *este o matrice superior triunghiulară* şi L' *este o matrice inferior triunghiulară unitate cu elementele* $|l_{i,j}| \le 1, \quad i > j$

☞ Demonstraţia constructivă, constituind însuşi algoritmul de triangularizare cu pivotare parţială a unei matrici

☞ *algoritmul de triangularizare cu pivotare parţială*:

atribuie $A_1 \longleftarrow A$

pentru $k = 1, n-1$ execute

- determinare $\xi_k \leftarrow a_{i_k,k}^{[k]}$ unde $a_{i_k,k}^{[k]} = \max_{i=\overline{k,n}}\left\{\left|a_{i,k}^{[k]}\right|\right\}$

dacă $(i_k \neq k)$ atunci

- determină $P_k$

altfel

- atribuie $P_k \leftarrow I_n$

¤

- calcul $P_k \cdot A_k$
- determinare matrice $M_k$ astfel încât $A_{k+1} = M_k \cdot (P_k \cdot A_k)$ să aibă elementele:

$a_{i,k}^{[k+1]} = 0, i = k+1, \dots, n$ şi $a_{i,j}^{[k+1]} = a_{i,j}^{[k]}, i = 1, \dots, n;\ \ j = 1, \dots, k-1$

atribuie $A_{k+1} \longleftarrow M_k \cdot (P_k \cdot A_k)$

¤

atribuie $U \longleftarrow A_n$

☞ *tabloul general al transformărilor*:

$$M_{n-1} \cdot P_{n-1} \cdot \cdots \cdot M_2 \cdot P_2 \cdot M_1 \cdot P_1 \cdot A = U$$

- folosind $P_k = P_k^{-1}$

$$\underbrace{(M_{n-1} \cdot P_{n-1} \cdot \cdots \cdot M_1 \cdot P_1 \cdot \overbrace{P_1 \cdot P_2 \cdot \cdots \cdot P_{n-1})}^{I_n}}_{(L')^{-1}} \cdot \underbrace{(P_{n-1} \cdot \cdots \cdot P_2 \cdot P_1)}_{P} \cdot A = U$$

P

*matrice generală de permutare de linii*

$$\boxed{P \cdot A = L' \cdot U}$$

$$\boxed{L' = P_{n-1} \cdot \cdots \cdot P_2 \cdot M_1^{-1} \cdot P_2 \cdot M_2^{-1} \cdot \cdots \cdot P_{n-1} \cdot M_{n-1}^{-1}}$$

matrice inferior triunghiulară unitate având în fiecare coloană, sub diagonala principală, subvectori Gauss cu liniile permutate

☞ *etapele rezolvării sistemului* $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \underline{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$:

a) factorizarea L_U a matricii A prin triangularizare cu pivotare parţială:

$$P \cdot A = L' \cdot U$$

b) calculul vectorului: $\underline{c} = P \cdot \underline{b}$

c) rezolvare sistem $L' \cdot \underline{y} = \underline{c}$ prin substituţie înainte

d) Rezolvare sistem $U \cdot \underline{x} = \underline{y}$ prin substituţie inversă

$$\left.\begin{array}{l} P \cdot A \cdot \underline{x} = P \cdot \underline{b} \\ \\ P \cdot A = L' \cdot U \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} L' \cdot U \cdot \underline{x} = P \cdot \underline{b} \\ \underline{c} = P \cdot \underline{b} \\ \underline{y} = U \cdot \underline{x} \end{array}\right\} \longrightarrow L' \cdot \underline{y} = \underline{c}$$

☞ <u>Observaţie</u>:

Dacă algoritmul de <u>triangularizare cu pivotare parţială eşuează</u>, în sensul că pivotul găsit la o anumită etapă [k] este nul sau foarte mic în modul, aceasta corespunde situaţiei când în aritmetica reală primele k coloane ale matricei A sunt liniar dependente.

# 2.4 Aplicaţii ale descompunerilor L-U

## *2.4.1 Calculul determinantului*

☞ fie o matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ → $\det(A) = ?$

a) <u>calcul bazat pe factorizarea L-U prin triangularizare directă</u>: $A = L \cdot U$

$$\det(A) = \det(L \cdot U) = \det(L) \cdot \det(U)$$

L – inferior triunghiulară unitate ⇒ $\det(L) = 1$

U – superior triunghiulară ⇒ $\det(U) = \prod_{i=1}^{n} u_{i,i}$, $U = \left[u_{i,i}\right]_{i=1,\dots,n}$

$$\boxed{\det(A) = \prod_{i=1}^{n} u_{i,i}}$$

b) calcul bazat pe factorizarea L-U prin triangularizare cu pivotare parţială: $P \cdot A = L' \cdot U$

$$A = P^{-1} \cdot L' \cdot U$$

$$\det(A) = \det(P^{-1} \cdot L' \cdot U) = \underbrace{\det(P^{-1})}_{(-1)^{np\ell}} \cdot \underbrace{\det(L')}_{1} \cdot \underbrace{\det(U)}_{\prod_{i=1}^{n} u_{i,i}}$$

$$\boxed{\det(A) = (-1)^{np\ell} \cdot \prod_{i=1}^{n} u_{i,i}}$$

## 2.4.2 *Calculul inversei unei matrici*

☞ fie o matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ → $A^{-1} = ?$

☞ acest tip de problemă se încadrează în problematica rezolvării ecuaţiilor matriciale de tipul:

$$A \cdot X = B, \quad \text{în care} \quad B = I_n$$

$$A^{-1} = X = \left[\underline{x}_1 \quad \cdots \quad \underline{x}_k \quad \cdots \quad \underline{x}_n\right]$$

a) <u>calcul bazat pe factorizarea L-U prin triangularizare directă</u>

a.1) factorizarea $A = L \cdot U$;

a.2) rezolvare sisteme: $A \cdot \underline{x}_k = \underline{e}_k, \quad \underline{e}_k = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad \overset{k}{1} \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T, \quad k = \overline{1,n}$

- substituţia înainte: $L \cdot \underline{y}_k = \underline{e}_k$
- substituţia inversă: $U \cdot \underline{x}_k = \underline{y}_k$

b) <u>calcul bazat pe triangularizarea cu pivotare parţială</u>:

b.1) factorizarea $P \cdot A = L' \cdot U$;

b.2) rezolvare sisteme: $A \cdot \underline{x}_k = \underline{e}_k, \quad \underline{e}_k = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad \overset{k}{1} \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T, \quad k = \overline{1,n}$

- calcul $\underline{c} = P \cdot \underline{e}_k$;
- substituţia înainte: $L' \cdot \underline{y}_k = \underline{c}$;
- substituţia inversă: $U \cdot \underline{x}_k = \underline{y}_k$

***Concluzie:***

Inversarea unei matrice necesită un număr mare de operaţii în virgulă mobile □ în practică, nu se recomandă rezolvarea sistemelor prin metoda bazată pe calculul explicit al inversei matricei sistemului.

# 2.4 Metode iterative

## *2.4.1 Principiul şi convergenţa metodelor iterative*

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}, \quad A \in \Re^{n\times n}, \underline{b} \in \Re^{n\times 1}$$

A - matrice nesingulară

□ Metodele iterative □ construcţia unui şir de vectori convergent la soluţia sistemului:

$$\underline{x}^{[k]}, \ k = 0,1,\ldots \qquad \lim_{k\to\infty} \underline{x}^{[k]} = \underline{x}, \quad \forall \underline{x}^{[0]}$$

□ Relaţia de recurenţă:

$$A = N - P$$

N - matrice nesingulară

$$(N - P)\cdot \underline{x} = \underline{b} \Leftrightarrow N \cdot \underline{x} = P \cdot \underline{x} + \underline{b}$$

□

$$N \cdot \underline{x}^{[k+1]} = P \cdot \underline{x}^{[k]} + \underline{b}, \quad k = 0,1,\ldots$$

$$\downarrow$$

$$\underline{x}^{[k+1]} = N^{-1} \cdot P \cdot \underline{x}^{[k]} + N^{-1} \cdot \underline{b}, \quad k = 0,1,\ldots$$

Notaţie: $G = N^{-1} \cdot P, \quad G \in \Re^{n\times n}$

 G are valori proprii în general complexe, care formează mulţimea numită *spectrul matricei* G

$$\rho(G) = \max_{1\le i\le n}\{|\lambda_i(G)|\}$$ - *rază spectrală a matricei* G

**Teoremă:**
*Condiţia necesară şi suficientă ca şirul de vectori să fie convergent către soluţia sistemului de ecuaţii este ca matricea G să aibă toate valorile proprii în modul subunitare sau, altfel spus, raza spectrală a matricei* G *să fie subunitară.*

 **Observaţii**:

❶ Cu cât raza spectrală subunitară a matricei G este mai mică, cu atât viteza de convergenţă a şirului de vectori este mai mare.

❷ În practică, de multe ori, condiţia necesară şi suficientă prezentată anterior se înlocuieşte printr-o ***condiţie suficientă***, dacă este posibil, şi anume:

*dacă* $\|G\|_\alpha < 1$ *atunci* $\rho(G) < 1$

↓ norma matricială infinit

$$\|G\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\{\sum_{j=1}^{n}|g_{i,j}|\} < 1$$

 Se consideră:

$$A = L + D + U$$

L - *inferior triunghiulară* cu diagonala principală nulă
D - *diagonală* având elementele de pe diagonala principală egale cu elementele de pe diagonala principală a matricei A (se presupune nesingulară)
U - *superior triunghiulară* cu diagonala principală nulă

## *2.4.2 Metoda Jacobi şi metoda Gauss-Seidel*

###  metoda Jacobi

$$N = D, \quad P = -(L+U) \quad \Rightarrow \quad D \cdot \underline{x}^{[k+1]} = -(L+U) \cdot \underline{x}^{[k]} + \underline{b}, \quad k = 0,1,\ldots$$

$$\Updownarrow$$

$$a_{i,i} \cdot x_i^{[k+1]} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{i,j} \cdot x_j^{[k]} + b_i, \quad i = 1,\ldots,n$$

$$a_{i,i} \neq 0 \quad \Downarrow$$

$$x_i^{[k+1]} = (b_i / a_{i,i}) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (a_{i,j} / a_{i,i}) \cdot x_j^{[k]}, \quad i = 1,\ldots,n$$

$$G_{Jacobi} = N^{-1} \cdot P = -D^{-1} \cdot (L + U) = [g_{i,j}]_{1 \le i,j \le n} \qquad g_{i,j} = \begin{cases} 0, & i = j \\ -a_{i,j}/a_{i,i}, & i \neq j \end{cases}$$

□ <u>Condiţia suficientă</u> care se impune pentru ca metoda Jacobi să fie <u>convergentă</u> este:

$$\max_{1 \le i \le n} \{ \sum_{j=1}^{n} | g_{i,j} | \} = \max_{1 \le i \le n} \{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} | a_{i,j} / a_{i,i} | \} < 1$$

□

$$\Downarrow$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} | a_{i,j} / a_{i,i} | < 1 \quad \Leftrightarrow \quad | a_{i,i} | > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} | a_{i,j} |$$

$$\downarrow$$

***A - matrice diagonal dominantă pe linii***

**Propoziţie:**

*Dacă matricea* A *este diagonal dominantă pe linii, atunci metoda Jacobi este convergentă, oricare ar fi estimaţia iniţială a soluţiei sistemului de ecuaţii.*

## METODE NUMERICE – curs 4

<u>Observaţie:</u>

$$| a_{i,j} / a_{i,i} | < 1 \qquad \forall i = 1,\dots,n, \; j = 1,\dots,n, \; i \neq j$$

sunt coeficienţii care multiplică componentele calculate la iteraţii anterioare, deci erorile ce le afectează sunt micşorate pe măsură ce procesul iterativ avansează

A - diagonal dominantă pe linii $\Rightarrow$ procedura este sigur stabilă numeric

### □ metoda Gauss-Seidel

$$N = L + D, \quad P = -U \;\Rightarrow\; (L + D) \cdot \underline{x}^{[k+1]} = -U \cdot \underline{x}^{[k]} + \underline{b}, \quad k = 0,1,\dots$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} \cdot x_j^{[k+1]} = -\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j^{[k]} + b_i, \quad i = 1,\dots,n$$

$a_{i,i} \neq 0$

$$x_i^{[k+1]} = \left(\frac{b_i}{a_{i,i}}\right) - \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{a_{i,j}}{a_{i,i}}\right) \cdot x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^{n} (a_{i,j}/a_{i,i}) \cdot x_j^{[k]}, \quad i = 1,\dots,n$$

**Observaţie:**

Şi în cazul metodei Gauss-Seidel, dacă matricea A este diagonal dominantă pe linii, atunci metoda este convergentă

- Între razele spectrale subunitare corespunzătoare celor două metode există relaţia:

$$\rho^2(G_{Jacobi}) \cong \rho(G_{Gauss-Seidel}) < 1$$

$$\Downarrow$$

metoda Gauss-Seidel are o viteză de convergenţă mai mare