Идеальные газы тождественных частиц. Распределение Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна

Частицы тождественные – физически неразличимые => Возможны только такие состояния системы тождественных частиц, которые не изменяются при перестановке местами двух частиц => при перестановке двух тождественных частиц волновая функция может изменяться только на несущественный фазовый множитель

$$\psi\left(\xi_1,\ldots,\xi_j,\ldots,\xi_i,\ldots\right)=\exp(i\alpha)\psi\left(\xi_1,\ldots,\xi_i,\ldots,\xi_j,\ldots\right)=$$
$$=\exp(2i\alpha)\psi\left(\xi_1,\ldots,\xi_j,\ldots,\xi_i,\ldots\right)\Rightarrow\exp(2i\alpha)=1\Rightarrow\exp(i\alpha)=\pm1$$

При перестановке местами координат двух частиц волновая функция системы тождественных частиц может либо менять знак, либо оставаться неизменной

$$\psi\left(\xi_1,\ldots,\xi_j,\ldots,\xi_i,\ldots\right)=\pm\psi\left(\xi_1,\ldots,\xi_i,\ldots,\xi_j,\ldots\right)$$

Симметрия волновой функции относительно перестановки координат тождественных частиц остается постоянной во времени

$$\hat{P}_{i,j}\psi\left(\xi_1,\ldots,\xi_j,\ldots,\xi_i,\ldots\right)=\psi\left(\xi_1,\ldots,\xi_i,\ldots,\xi_j,\ldots\right)$$

$$\hat{H}\left(\xi_1,\ldots,\xi_i,\ldots,\xi_j,\ldots\right)=\hat{H}\left(\xi_1,\ldots,\xi_j,\ldots,\xi_i,\ldots\right)\Rightarrow\left[\hat{H},\hat{P}_{i,j}\right]=\hat{H}\hat{P}_{i,j}-\hat{P}_{i,j}\hat{H}=0$$

$$\frac{d\hat{P}_{i,j}}{dt}=\frac{\partial\hat{P}_{i,j}}{\partial t}+\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{P}_{i,j}\right]=0$$

Перестановочная симметрия определется величиной спина частиц системы

1) **Фермионы** (частицы с полуцелым спином). Волновая функция обязательно является антисимметричной относительно перестановки координат двух частиц

$$\psi\left(\xi_1,\ldots,\xi_j,\ldots,\xi_i,\ldots\right)=-\psi\left(\xi_1,\ldots,\xi_i,\ldots,\xi_j,\ldots\right)$$

2) **Бозоны** (частицы с целым спином). Волновая функция обязательно является симметричной относительно перестановки координат двух частиц

$$\psi\left(\xi_1,\ldots,\xi_j,\ldots,\xi_i,\ldots\right)=\psi\left(\xi_1,\ldots,\xi_i,\ldots,\xi_j,\ldots\right)$$

Различие в перестановочной симметрии волновых функций фермионов и бозонов приводит к принципиальному различию системы тождественных фермионов и системы тождественных бозонов

$$\text{Газ идеальный} \Rightarrow \hat{H} = \sum_i \hat{H}_1(\xi_i)$$

$\hat{H}_1(\xi)$ - одночастичный Гамильтониан (гамильтониан одной отдельно взятой) частицы в тех же силовых полях, что и весь газ)

Переменные в УШ разделяются

$\hat{H}_1\varphi_{\square}(\xi) = \varepsilon_{\square}\varphi_{\square}(\xi) \Rightarrow \{\varepsilon_{\square}\}, \{\varphi_{\square}(\xi)\}$ - одночастичный энергетический спектр и волновые функции одночастичных стационарных состояний

Одночастичное стационарное состояние - (стационарных состояний одной отдельно взятой частицы в тех же силовых полях, что и весь газ)

$$E = \sum_{\square} \varepsilon_{\square} N_{\square};$$

$\psi\left(\xi_1, \ldots \xi_i, \ldots, \xi_N\right) = \varphi_{\square_1}(\xi_1)\varphi_{\square_1}(\xi_2)\ldots\varphi_{\square_N}(\xi_N)$ - решение УШ для газа.

Однако оно не удовлетворяет перестановочной симметрии, и, следовательно не является волновой функцией системы тождественных частиц. Следовательно, нужно брать линейные комбинации соответствующий произведений

$$\psi\left(\xi_1, \ldots \xi_i, \ldots, \xi_N\right) = \sum_p C_p \varphi_{\square_1}(\xi_1)\varphi_{\square_1}(\xi_2)\ldots\varphi_{\square_N}(\xi_N)$$

Коэффициенты C нужно подобрать так, чтобы волновая функция обладала соответствующей симметрией относительно перестановки координат двух частиц (для фермионов была антисимметричной для бозонов симметричной)

Фермионы

$$\psi_{\nu_1,\nu_2}(\xi_1,\xi_2)=C_1\varphi_{\nu_1}(\xi_1)\varphi_{\nu_2}(\xi_2)+C_2\varphi_{\nu_2}(\xi_1)\varphi_{\nu_1}(\xi_2)$$

$$\psi_{\nu_1,\nu_2}(\xi_1,\xi_2)=-\psi_{\nu_1,\nu_2}(\xi_2,\xi_1)$$

$$C_1\varphi_{\nu_1}(\xi_1)\varphi_{\nu_2}(\xi_2)+C_2\varphi_{\nu_2}(\xi_1)\varphi_{\nu_1}(\xi_2)\equiv C_1\varphi_{\nu_1}(\xi_2)\varphi_{\nu_2}(\xi_1)+C_2\varphi_{\nu_2}(\xi_2)\varphi_{\nu_1}(\xi_1)$$

$$C_2=-C_1$$

$$\psi_{\nu_1,\nu_2}(\xi_1,\xi_2)=C\cdot\left\{\varphi_{\nu_1}(\xi_1)\varphi_{\nu_2}(\xi_2)-\varphi_{\nu_2}(\xi_1)\varphi_{\nu_1}(\xi_2)\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\int d\xi_1 d\xi_2\left|\psi_{\nu_1,\nu_2}(\xi_1,\xi_2)\right|^2=1\\ \int d\xi\left|\varphi_{\nu}(\xi)\right|^2=1\end{array}\right|\Rightarrow C=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\psi(\xi_1,\ldots\xi_i,\ldots\xi_j,\ldots\xi_N)=\sum_p C_p\varphi_{\nu_1}(\xi_1)\varphi_{\nu_1}(\xi_2)\ldots\varphi_{\nu_N}(\xi_N)\rightarrow\psi(\xi_1,\ldots\xi_i,\ldots\xi_j,\ldots)=-\psi(\xi_1,\ldots\xi_j,\ldots\xi_i,\ldots)$$

$$\psi\left(\{\xi_i\}_{i=1}^N\right)=\frac{1}{\sqrt{N!}}\begin{Vmatrix}\varphi_{\nu_1}(\xi_1) & \varphi_{\nu_1}(\xi_2) & \cdots & \varphi_{\nu_1}(\xi_N)\\ \varphi_{\nu_2}(\xi_1) & \varphi_{\nu_2}(\xi_2) & \cdots & \varphi_{\nu_2}(\xi_N)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_{\nu_N}(\xi_1) & \varphi_{\nu_N}(\xi_2) & \cdots & \varphi_{\nu_N}(\xi_N)\end{Vmatrix};\quad E=\sum_{\nu}\varepsilon_{\nu}N_{\nu};\quad N=\sum_{\nu}N_{\nu}$$

В стационарном состоянии всего ферми-газа каждый фермион находится в одном из одночастичных стационарных состояний. Стационарное состояние всего ферми-газа (его микросостояние) можно задать, указав число фермионов в каждом из стационарных состояний (числа заполнения стационарных состояний)

<u>Возможно ли микросостояние ферми-газа, в котором оба фермиона находятся в одном и том же стационарном состоянии?</u>

$$\psi\left(\left\{\xi_i\right\}_{i=1}^{N}\right)=\frac{1}{\sqrt{N!}}\begin{Vmatrix}\varphi_{\square_1}(\xi_1) & \varphi_{\square_1}(\xi_2) & \cdots & \varphi_{\square_1}(\xi_N)\\ \varphi_{\square_2}(\xi_1) & \varphi_{\square_2}(\xi_2) & \cdots & \varphi_{\square_2}(\xi_N)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_{\square_N}(\xi_1) & \varphi_{\square_N}(\xi_2) & \cdots & \varphi_{\square_N}(\xi_N)\end{Vmatrix}$$

$\square_i=\square_j \Rightarrow \psi\left(\left\{\xi_i\right\}_{i=1}^{N}\right)\equiv 0 \Rightarrow$ Принцип запрета Паули (в одном и том же одночастичном стационарном состоянии одновременно не может находиться более одного фермиона)

В ферми-газе число заполнения одночастичного состояния может принимать только два значения

$N_{\square}=0$ - состояние пустое

$N_{\square}=1$ - в состоянии есть один фермион

Бозоны

$$\psi_{\square_1,\square_2}\left(\xi_1,\xi_2\right)=C_1\varphi_{\square_1}\left(\xi_1\right)\varphi_{\square_2}\left(\xi_2\right)+C_2\varphi_{\square_2}\left(\xi_1\right)\varphi_{\square_1}\left(\xi_2\right)$$

$$\psi_{\square_1,\square_2}\left(\xi_1,\xi_2\right)=\psi_{\square_1,\square_2}\left(\xi_2,\xi_1\right)$$

$$C_1\varphi_{\square_1}\left(\xi_1\right)\varphi_{\square_2}\left(\xi_2\right)+C_2\varphi_{\square_2}\left(\xi_1\right)\varphi_{\square_1}\left(\xi_2\right)\equiv C_1\varphi_{\square_1}\left(\xi_2\right)\varphi_{\square_2}\left(\xi_1\right)+C_2\varphi_{\square_2}\left(\xi_2\right)\varphi_{\square_1}\left(\xi_1\right)$$

$$C_2=C_1$$

$$\psi_{\square_1,\square_2}\left(\xi_1,\xi_2\right)=C\cdot\left\{\varphi_{\square_1}\left(\xi_1\right)\varphi_{\square_2}\left(\xi_2\right)+\varphi_{\square_2}\left(\xi_1\right)\varphi_{\square_1}\left(\xi_2\right)\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\int d\xi_1 d\xi_2\left|\psi_{\square_1,\square_2}\left(\xi_1,\xi_2\right)\right|^2=1\\ \int d\xi\left|\varphi_{\square}\left(\xi\right)\right|^2=1\end{array}\right|\Rightarrow C=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\psi\left(\xi_1,\square\ \xi_i,\square\ \xi_j,\square\ \xi_N\right)=\sum_p C_p\varphi_{\square_1}(\xi_1)\varphi_{\square_1}(\xi_2)\square\ \varphi_{\square_N}(\xi_N)\rightarrow\psi\left(\xi_1,\square\ \xi_i,\square\ \xi_j,\square\ \right)=\psi\left(\xi_1,\square\ \xi_j,\square\ \xi_i,\square\ \right)$$

$$\psi\left(\left\{\xi_i\right\}_{i=1}^N\right)=\left(\frac{N_{\square_1}!N_{\square_2}!\square}{N!}\right)^{1/2}\sum_p\varphi_{\square_1}(\xi_1)\varphi_{\square_1}(\xi_2)\square\ \varphi_{\square_N}(\xi_N);\quad E=\sum_{\square}\varepsilon_{\square}N_{\square};\quad N=\sum_{\square}N_{\square}$$

В стационарном состоянии всего бозе-газа каждый бозон находится в одном из одночастичных стационарных состояний. Стационарное состояние бозе-газа (его микросостояние) можно задать, указав число фермионов в каждом из стационарных состояний (числа заполнения стационарных состояний) . В случае бозе-газа нет ограничения на числа заполнения одночастичного состояния.

В стационарном состоянии идеального газа из тождественных частиц каждая из частиц находится в одном из одночастичных стационарных состояний (стационарном состоянии одной отдельно взятой частицы в тех же самых силовых полях, что и весь газ). Микросостояние всего газа в целом можно задать, указав числа заполнения одночастичных стационарных состояний

$$E\left(\left\{N_{\lambda}\right\}\right)=\sum_{\lambda}\varepsilon_{\lambda}N_{\lambda}; \quad N\left(\left\{N_{\lambda}\right\}\right)=\sum_{\lambda}N_{\lambda}$$

В **ферми-газе** действует фундаментальное ограничение на значения чисел заполнения одночастичных стационарных состояний – **Принцип запрета Паули**, согласно которому в одном и томже одночастичном состоянии одновременно не может находиться более одного фермиона.

В бозе-газе такого ограничения на числа заполнения нет.

$$W\left(\{N_{\boxtimes}\}\right)=\frac{1}{Q}\exp\left\{-\frac{E\left(\{N_{\boxtimes}\}\right)-\mu N\left(\{N_{\boxtimes}\}\right)}{\theta}\right\}; \quad Q=\sum_{\{N_{\boxtimes}\}}\exp\left\{-\frac{E\left(\{N_{\boxtimes}\}\right)-\mu N\left(\{N_{\boxtimes}\}\right)}{\theta}\right\}$$

$$\exp\left\{-\frac{E\left(\{N_{\boxtimes}\}\right)-\mu N\left(\{N_{\boxtimes}\}\right)}{\theta}\right\}=\exp\left\{-\frac{\sum\limits_{\boxtimes}\varepsilon_{\boxtimes}N_{\boxtimes}-\mu\sum\limits_{\boxtimes}N_{\boxtimes}}{\theta}\right\}=$$

$$=\exp\left\{-\sum_{\boxtimes}\frac{\left(\varepsilon_{\boxtimes}-\mu\right)}{\theta}N_{\boxtimes}\right\}=\prod_{\boxtimes}\exp\left\{-\frac{\left(\varepsilon_{\boxtimes}-\mu\right)}{\theta}N_{\boxtimes}\right\}$$

$$Q=\sum_{\{N_{\boxtimes}\}}\prod_{\boxtimes}\exp\left\{-\frac{\left(\varepsilon_{\boxtimes}-\mu\right)}{\theta}N_{\boxtimes}\right\}=\sum_{N_{\boxtimes 1}}\sum_{N_{\boxtimes 2}}\boxtimes\sum_{N_{\boxtimes i}}\boxtimes\prod_{\boxtimes}\exp\left\{-\frac{\left(\varepsilon_{\boxtimes}-\mu\right)}{\theta}N_{\boxtimes}\right\}=$$

$$Q=\prod_{\boxtimes}q_{\boxtimes}; \quad q_{\boxtimes}=\sum_{N_{\boxtimes}}\exp\left\{\frac{(\mu-\varepsilon_{\boxtimes})}{\theta}N_{\boxtimes}\right\}$$

$$Q = \prod_{\ell} q_{\ell}; \quad q_{\ell} = \sum_{N_{\ell}} \exp\left\{ \frac{(\mu - \varepsilon_{\ell})}{\theta} N_{\ell} \right\}$$

$$W(\{N_{\ell}\}) = \frac{1}{Q} \exp\left\{ - \frac{E(\{N_{\ell}\}) - \mu N(\{N_{\ell}\})}{\theta} \right\} = \prod_{\ell} w_{\ell}(N_{\ell})$$

$$w_{\ell}(N_{\ell}) = \frac{\exp\left\{ \frac{(\mu - \varepsilon_{\ell})}{\theta} N_{\ell} \right\}}{q_{\ell}}$$ - вероятность того, что в состоянии ℓ есть N_{ℓ} частиц

<u>1) Фермионы</u> N_{ℓ} =0,1

$$q_{\ell} = \sum_{N_{\ell}=0}^{1} \exp\left\{ \frac{(\mu - \varepsilon_{\ell})}{\theta} N_{\ell} \right\} = 1 + \exp\left\{ \frac{\mu - \varepsilon_{\ell}}{\theta} \right\}$$

$$\Omega = -\theta \ln Q = -\theta \sum_{\ell} \ln\left(1 + \exp\left\{ \frac{\mu - \varepsilon_{\ell}}{\theta} \right\} \right)$$

$$w_{\ell}(N_{\ell} = 1) = \frac{\exp\left\{ \frac{(\mu - \varepsilon_{\ell})}{\theta} \right\}}{1 + \exp\left\{ \frac{\mu - \varepsilon_{\ell}}{\theta} \right\}} = \frac{1}{\exp\left\{ \frac{\varepsilon_{\ell} - \mu}{\theta} \right\} + 1}$$ - вероятность того, что состояние ℓ занято фермионом

$$w_{\ell}(N_{\ell} = 0) = \frac{1}{1 + \exp\left\{ \frac{\mu - \varepsilon_{\ell}}{\theta} \right\}} = 1 - w_{\ell}(N_{\ell} = 1)$$ - вероятность того, что состояние ℓ пустое

$$w_{\square}(N_{\square}) = \frac{1}{1+\exp\left\{\dfrac{\mu-\varepsilon_{\square}}{\theta}\right\}}\exp\left\{\frac{\mu-\varepsilon_{\square}}{\theta}\cdot N_{\square}\right\}$$

$$\langle N_{\square}\rangle = \sum_{N_{\square}=0}^{1} N_{\square} w_{\square}(N_{\square}) = w_{\square}(N_{\square}=1) = \frac{1}{\exp\left\{\dfrac{\varepsilon_{\square}-\mu}{\theta}\right\}+1}$$

$$\boxed{\langle N_{\square}\rangle = w_{\square}(N_{\square}=1) = \frac{1}{\exp\left\{\dfrac{\varepsilon_{\square}-\mu}{\theta}\right\}+1}}$$

- распределение Ферми-Дирака

$$\Omega = -\theta \ln Q = -\theta \sum_{\square} \ln\left(1+\exp\left\{\frac{\mu-\varepsilon_{\square}}{\theta}\right\}\right)$$

$$\langle N\rangle = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu} = \sum_{\square}\frac{1}{\exp\left\{\dfrac{\varepsilon_{\square}-\mu}{\theta}\right\}+1} = \sum_{\square}\langle N_{\square}\rangle = \sum_{\square} N_F(\varepsilon_{\square})$$

$$E = \Omega - \theta\frac{\partial\Omega}{\partial\theta} + \mu\langle N\rangle = \sum_{\square}\varepsilon_{\square}\frac{1}{\exp\left\{\dfrac{\varepsilon_{\square}-\mu}{\theta}\right\}+1} = \sum_{\square}\varepsilon_{\square}\langle N_{\square}\rangle = \sum_{\square}\varepsilon_{\square} N_F(\varepsilon_{\square})$$

$$N_F(\varepsilon) = \frac{1}{\exp\left\{\dfrac{\varepsilon-\mu}{\theta}\right\}+1} - \textit{функция Ферми} \Rightarrow \langle N_{\square}\rangle = N_F(\varepsilon_{\square})$$

$$Q = \prod_{\ell} q_{\ell}; \quad q_{\ell} = \sum_{N_{\ell}} \exp\left\{ \frac{(\mu - \varepsilon_{\ell})}{\theta} N_{\ell} \right\}$$

$$W(\{N_{\ell}\}) = \frac{1}{Q} \exp\left\{ -\frac{E(\{N_{\ell}\}) - \mu N(\{N_{\ell}\})}{\theta} \right\} = \prod_{\ell} w_{\ell}(N_{\ell})$$

$$w_{\ell}(N_{\ell}) = \frac{\exp\left\{ \frac{(\mu - \varepsilon_{\ell})}{\theta} N_{\ell} \right\}}{q_{\ell}}$$

- вероятность того, что в состоянии ℓ есть N_{ℓ} частиц

<u>2) Бозоны</u> $N_{\ell} = 0, 1, 2, \ldots$

$$q_{\ell} = \sum_{N_{\ell}=0}^{+\infty} \exp\left\{ \frac{(\mu - \varepsilon_{\ell})}{\theta} N_{\ell} \right\}$$

Еслс $\mu > \varepsilon_0$, *то для* $\varepsilon_{\ell} < \mu$ *ряд расходится* $\Rightarrow$ *в бозе* $-$ *газе* $\mu < \varepsilon_0$ $-$ *основной уровень энергии*

$$q_{\ell} = 1 + \exp\left\{ \frac{(\mu - \varepsilon_{\ell})}{\theta} \right\} + \exp\left\{ 2\frac{(\mu - \varepsilon_{\ell})}{\theta} \right\} + \ldots = \frac{1}{1 - \exp\left\{ \frac{(\mu - \varepsilon_{\ell})}{\theta} \right\}}$$

$$\Omega = \theta \ln Q = \theta \sum_{\ell} \ln\left(1 - \exp\left\{ \frac{\mu - \varepsilon_{\ell}}{\theta} \right\} \right)$$

Вероятность того, что в состоянии ℓ находится N_ℓ бозонов

$$w_\ell(N_\ell) = \frac{\exp\{-\gamma \cdot N_\ell\}}{q_\ell}; \qquad q_\ell = \frac{1}{1-\exp\{-\gamma\}}; \qquad \gamma = \frac{\varepsilon_\ell - \mu}{\theta}$$

$$\langle N_\ell \rangle = \sum_{N=0}^{+\infty} N w_\ell(N) = \frac{1}{q_\ell}\sum_{N=0}^{+\infty} N \exp\{-\gamma \cdot N\} = -\frac{1}{q_\ell}\sum_{N=0}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\gamma}\exp\{-\gamma \cdot N\} =$$

$$= -\frac{1}{q_\ell}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sum_{N=0}^{+\infty}\exp\{-\gamma \cdot N\} = -(1-\exp\{-\gamma\})\cdot\frac{\partial}{\partial\gamma}\frac{1}{1-\exp\{-\gamma\}}$$

$$\langle N_\ell \rangle = \frac{1}{\exp\left\{\dfrac{\varepsilon_\ell - \mu}{\theta}\right\} - 1}$$

$$\langle N \rangle = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu} = \sum_\ell \frac{1}{\exp\left\{\dfrac{\varepsilon_\ell - \mu}{\theta}\right\} - 1} = \sum_\ell \langle N_\ell \rangle = \sum_\ell N_B(\varepsilon_\ell)$$

$$E = \Omega - \theta\frac{\partial\Omega}{\partial\theta} + \mu\langle N \rangle = \sum_\ell \varepsilon_\ell \frac{1}{\exp\left\{\dfrac{\varepsilon_\ell - \mu}{\theta}\right\} - 1} = \sum_\ell \varepsilon_\ell \langle N_\ell \rangle = \sum_\ell \varepsilon_\ell N_F(\varepsilon_\ell)$$

$$N_B(\varepsilon) = \frac{1}{\exp\left\{\dfrac{\varepsilon - \mu}{\theta}\right\} - 1} - \textit{функция Бозе} - \textit{Эйнштейна} \Rightarrow \langle N_\ell \rangle = N_B(\varepsilon_\ell)$$

Идеальный газ из тождественных частиц

$$\langle N_{\square} \rangle = \frac{1}{\exp\left\{\dfrac{\varepsilon_{\square} - \mu}{\theta}\right\} \pm 1}; \begin{cases} + \textit{ для фермионов} \\ - \textit{ для бозонов} \end{cases}$$

$$\Omega = \square\,\theta \sum_{\square} \ln\left(1 \pm \exp\left\{\frac{\mu - \varepsilon_{\square}}{\theta}\right\}\right); \begin{cases} \textit{верхний знак} - \textit{фермионы} \\ \textit{нижний знак} - \textit{бозоны} \end{cases}$$

$$A_i = -\frac{\partial \Omega}{\partial a_i}$$

$$\langle N \rangle = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = \sum_{\square} N_{F/B}(\varepsilon_{\square})$$

$$E = \Omega - \theta \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} + \mu \langle N \rangle = \sum_{\square} \varepsilon_{\square} N_{F/B}(\varepsilon_{\square})$$

$$\textit{Нужно вычислять } \sum_{\square} f(\varepsilon_{\square})$$

Нужно вычислять $\sum_{\boxtimes} f(\varepsilon_{\boxtimes})$

Нужно перейти от суммирования по квантовым числам к интегрир. по энергии

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon\, f(\varepsilon)\delta\left(\varepsilon-\varepsilon_{\boxtimes}\right)=f(\varepsilon_{\boxtimes})$$

$$\sum_{\boxtimes} f(\varepsilon_{\boxtimes})=\sum_{\boxtimes}\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon\, f(\varepsilon)\delta\left(\varepsilon-\varepsilon_{\boxtimes}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon\left[\sum_{\boxtimes}\delta\left(\varepsilon-\varepsilon_{\boxtimes}\right)\right]f(\varepsilon)=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon g\left(\varepsilon\right)f(\varepsilon),\quad g\left(\varepsilon\right)=\left[\sum_{\boxtimes}\delta\left(\varepsilon-\varepsilon_{\boxtimes}\right)\right]$$

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_0+\Delta\varepsilon} d\varepsilon g\left(\varepsilon\right)=\sum_{\boxtimes}\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon\,\delta\left(\varepsilon-\varepsilon_{\boxtimes}\right)=\sum_{\boxtimes}\begin{cases}1, \varepsilon_0<\varepsilon<\varepsilon_0+\Delta\varepsilon\\ 0, \textit{иначе}\end{cases}$$

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_0+\Delta\varepsilon} d\varepsilon g\left(\varepsilon\right)=\sum_{\substack{\boxtimes\\ \varepsilon_0<\varepsilon<\varepsilon_0+\Delta\varepsilon}} 1$$ - число состояний с энергией в интервале ε_0-$\varepsilon_0+\Delta\,\varepsilon$

$g\left(\varepsilon\right)$ - плотность одночастичных стационарных состояний

$dN=g\left(\varepsilon\right)d\varepsilon$ - Число состояний с энергией в физ. беск. малом интерв

$$\sum_{\square} f(\varepsilon_{\square}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) f(\varepsilon), \quad g(\varepsilon) = \sum_{\square} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\square})$$

$$\overline{N} = \sum_{\square} N_{F/B}(\varepsilon_{\square}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) N_{F/B}(\varepsilon)$$

$$E = \sum_{\square} \varepsilon_{\square} N_{F/B}(\varepsilon_{\square}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) N_{F/B}(\varepsilon)\varepsilon$$

$$\Omega = \square\theta \sum_{\square} \ln\left[1 \pm \exp\left\{\frac{\mu - \varepsilon_{\square}}{\theta}\right\}\right] = \square\theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon\, g(\varepsilon) \ln\left[1 \pm \exp\left\{\frac{\mu - \varepsilon}{\theta}\right\}\right]$$

Через плотность состояний можно выразить любую макроскопическую характеристику. Особенности в плотности состояний проявляются в наблюдаемых величинах.

Идеальный ферми-газ можно описать, если известны плотность одночастичных стационарных состояний и химический потенциал

Конденсация бозе-Эйнштейна

$$\overline{N}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\exp\left(\dfrac{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu}{\theta}\right) - 1}; \varepsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$T = 0 \quad \overline{N}_{\mathbf{k}} = \begin{cases} N, & \mathbf{k} = 0 \\ 0, & \mathbf{k} \neq 0 \end{cases}$$

$$T \neq 0 \ \overline{N}_0 = \frac{1}{\exp\left(-\dfrac{\mu}{\theta}\right) - 1} \Rightarrow \mu = -\theta \ln\left(\frac{1}{\overline{N}_0} + 1\right)$$

При достаточно низких температурах, когда $\overline{N}_0 >> 1,$

$\mu = -\dfrac{\theta}{\overline{N}_0}$ *мал по сравнению с первым возбужденным состоянием.* $\Rightarrow \mu \to 0$

$$N-\bar{N}_0=\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{\theta}\right)-1}=\frac{V}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\,\frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m\theta}\right)-1}=$$

$$=\frac{V}{(2\pi)^3}\cdot 4\pi\cdot\int_0^{+\infty}dk\,\frac{k^2}{\exp\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m\theta}\right)-1}$$

$$\textit{Замена } x\equiv\frac{\hbar^2k^2}{2m\theta}$$

$$N-\bar{N}_0=\left[V\cdot\frac{m^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^2}\int_0^{+\infty}dx\,\frac{x^{1/2}}{\exp(x)-1}\cdot\frac{1}{N}\right]\cdot N\theta^{3/2}$$

$$\bar{N}_0=N\cdot\left[1-\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^{3/2}\right];\ \frac{1}{\theta_0}=\left[V\cdot\frac{m^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^2}\int_0^{+\infty}dx\,\frac{x^{1/2}}{\exp(x)-1}\cdot\frac{1}{N}\right]^{2/3}$$