4.3. Число измерений, необходимое для получения заданной точности

Ситуация: после проведения измерений при выбранной доверительной вероятности **p** , доверительный интервал для результата измерения слишком широк. Так как СКО среднего уменьшается с ростом числа измерений N

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

и, следовательно, уменьшается доверительный интервал $\Delta = t\, S_{\bar{x}}$

Таким образом, можно увеличить число измерений для получения заданного доверительного интервала. Это задача из раздела математической статистики, называемого планирование эксперимента.

$\varepsilon = \frac{\Delta}{S}$	p			
	0,9	0,95	0,99	0,999
1,0	5	7	11	17
0,5	13	18	31	50
0,4	19	27	46	74
0,3	32	46	78	130
0,2	70	100	170	280
0,1	270	390	700	1100
0,05	1100	1500	2700	4300
0,01	27000	38000	66000	110000

Алгоритм:

1). Задаются доверительным интервалом Δ;

2). Используя СКО наблюдений из предыдущих измерений

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

определяют относительный интервал

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{S}$$

3). Задаются доверительной вероятностью **p**
4). По **ε** и **p** из таблицы определяют числа измерений N для получения Заданного доверительного интервала.

$$n \geq \frac{t_{\alpha,m}^2 \cdot S_x^2}{\delta^2} = t_{\alpha,m}^2 \cdot \left(\frac{S_x}{\delta}\right)^2 = t_{\alpha,m}^2 \cdot \varepsilon^2$$

где $\varepsilon = S_x/\delta$.

4.4. Исключение промахов

Промахом называют грубую погрешность, т.е. погрешность результата отдельного измерения, входящего в ряд измерений, которая для данных условий резко отличается от остальных результатов.

Именно грубые погрешности и могут быть вызваны ошибками, которые допускает оператор: неправильный отсчет по шкале измерительного прибора или неправильная запись результата наблюдений. Также их причинами могут стать внезапные и кратковременные изменения условий измерения или незамеченные неисправности в аппаратуре.

Промахи могут возникать при однократных измерениях и могут быть выявлены и устранены при повторных измерениях.

Что же надо делать с измерениями, погрешность которых существенно выше погрешности остальных измерений? Надо их отбрасывать или можно оставить? Для ответа на данный вопрос существует ряд статистических критериев. Сама же процедура выявления слишком больших погрешностей, называется **цензурированием** выборки. Для того чтобы воспользоваться определенным критерием, необходимо знать закон распределения результата измерения.

Для проверки подозрительных результатов на промах используются статистические гипотезы. Гипотеза заключается в предположении, что некоторый результат наблюдения x_i не содержит грубой погрешности. Далее задаются уровнем значимости *q* – вероятностью того, что сомнительный результат (промах) действительно мог иметь место (q можно выбрать равным 0,01; 0,02; 0,05 или 0,1). Пользуясь статистическими критериями, пытаются опровергнуть выдвинутую гипотезу. Если это удается, то результат признается промахом, и его исключают.

В ГОСТ Р 8.736 – 2011 (Измерения прямые однократные. Методы обработки результатов наблюдений) рекомендуется использовать критерий Граббса. Данный статистический критерий **<u>используется для нормального распределения</u>** результатов наблюдений. Для наибольшего x_{max} *и наименьшего* x_{min} *результатов измерений вычисляют критерии Граббса, предполагая, что эти результаты вызваны грубыми погрешностями:*

$$G_1 = \frac{\left|x_{\max} - \bar{x}\right|}{S}, G_2 = \frac{\left|x_{\min} - \bar{x}\right|}{S}$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

S - СКО наблюдений:

Если $G1$ ($G2$) > G_T, то x_{max} (x_{min}) исключают, как маловероятное значение. *Далее вновь вычисляют среднее арифметическое и среднеквадратическое отклонения ряда результатов измерений и процедуру проверки наличия грубых погрешностей при необходимости повторяют.*

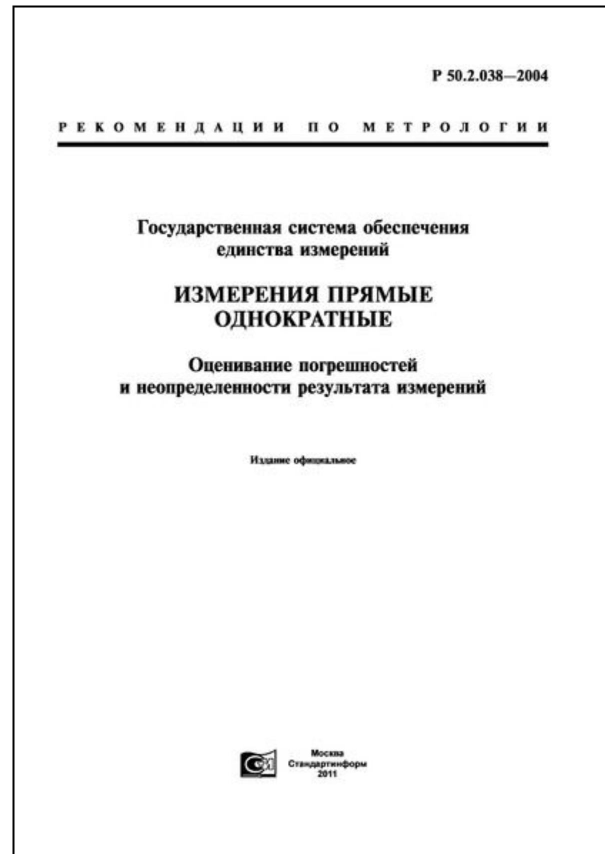
Оценка выскакивающих измерений на промах

N	β			N	β		
	0,1	0,05	0,01		0,1	0,05	0,01
3	1,41	1,41	1,41	13	2,26	2,43	2,71
4	1,65	1,69	1,72	14	2,30	2,46	2,76
5	1,79	1,87	1,96	15	2,33	2,49	2,80
6	1,89	2,00	2,13	16	2,35	2,52	2,84
7	1,97	2,09	2,27	17	2,38	2,55	2,87
8	2,04	2,17	2,37	18	2,40	2,58	2,90
9	2,10	2,24	2,46	19	2,43	2,60	2,93
10	2,15	2,29	2,54	20	2,45	2,62	2,96
11	2,19	2,34	2,61	22	2,49	2,66	3,01
12	2,23	2,39	2,66	25	2,54	2,72	3,07

4.5. Прямые однократные измерения

$$\Delta_{сл} << \Delta_{с}$$

Р 50.2.038-2004
Рекомендации по метрологии «Измерения прямые однократные. Оценивание погрешностей и неопределенности результата измерений»


Р 50.2.038—2004

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО МЕТРОЛОГИИ

Государственная система обеспечения единства измерений

ИЗМЕРЕНИЯ ПРЯМЫЕ ОДНОКРАТНЫЕ

Оценивание погрешностей и неопределенности результата измерений

Издание официальное

Москва
Стандартинформ
2011

Прямые однократные измерения

– производственная необходимость ;

– возможность пренебрежения случайными погрешностями;

– случайные погрешности существенны, но доверительная граница погрешности результата измерения не превышает допускаемой погрешности измерений.

За погрешность измерения принимают неисключенную систематических погрешностей, если она одна.

При наличии нескольких неисключенных систематических погрешностей Δ_i, они суммируются

$$\Delta_\Sigma = k\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^{\,2}},$$

где *k* – поправочный коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью и числом n составляющих Δ_i.

- Р=0,95 => *k* =1,1.
- Р=0,99 => *k* =1,45 при *n* > 4.

5. Полная погрешность измерений

5.1. Вычисление погрешностей косвенных измерений

Косвенные измерения: значение искомой физической величины определяют на основании результатов прямых измерений других величин, связанных с искомой функциональным соотношением.

На практике при вычислении погрешности косвенных измерений можно руководствоваться следующими правилами. Пусть *y = f (x1; x2;... xn)* есть косвенно измеряемая величина, являющаяся произвольной функцией непосредственно измеряемых и независимых величин *x1; x2; x3; ...xn.*
В таком случае **абсолютная погрешность** Δy

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta_n\right)^2} \qquad \text{или}$$

$$\Delta y = \sqrt{\sum_i^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta_i\right)^2} \qquad (1)$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ - частная производная

Δ - **абсолютная** систематическая Δ_C (или случайная Δ^o) погрешности

Частная производная от функции *f* (*x1*; *x2*;... *xn*) по переменной *xi*, т.е. производная, взятая при условии, что на момент взятия все остальные переменные *xj* (*j* ≠ *i*) есть постоянные величины; Δ стоящее перед *y* или со знаком *i*, в сумме означает суммарную погрешность величины *y* или xi, систематическую составляющую погрешности Δ *C* или случайную составляющую погрешности Δ xi

Погрешности Δ_i *должны быть взяты при одной и той же доверительной вероятности, например при р = 0,95*

В этом случае погрешность результата косвенного измерения Δ *y будет иметь ту же доверительную вероятность.*

Приведенной формулой можно пользоваться при <u>любом</u> виде функции *y* = *f* (*x1*; *x2*;... *xm*), однако формула (1) наиболее удобна, если независимые переменные или функции от них образуют сумму или разность, например,

$$y = ax_1 + bx_2^3 + c\sin x_3$$

Для $y = A x_1 + B x_2$ абсолютная погрешность y будет:

$$\Delta y = \sqrt{\left(A\Delta x_1\right)^2 + \left(B\Delta x_2\right)^2}$$

Если переменные *x_i или функции от них образуют произведение или частное, удобнее пользоваться следующей формулой для подсчета* *<u>относительной погрешности</u> результата косвенного измерения:*

$$\ln y = \ln f(x_1, x_2 \ldots x_n) \qquad \frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_1}\Delta_1\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_2}\Delta_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_n}\Delta_n\right)^2} \qquad (2)$$

Или что тоже самое

$$\delta = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\Delta x_1}{f}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\Delta x_2}{f}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\Delta x_n}{f}\right)^2}$$

Можно рассчитать абсолютную (относительную) погрешность косвенного измерения используя таблицу

Номер	Вид функции	Абсолютная или относительная погрешность
1	$y = A x_1 + B x_2$	$\Delta y = \sqrt{(A\Delta x_1)^2 + (B\Delta x_2)^2}$
2	$y = A x_1 - B x_2$	$\Delta y = \sqrt{(A\Delta x_1)^2 + (B\Delta x_2)^2}$
3	$y = A x_1 \times x_2$	$\Delta y = \sqrt{(Ax_2\Delta x_1)^2 + (Ax_1\Delta x_2)^2}$ или по (2) $\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2}$
4	$y = \frac{Ax_1}{x_2}$	Аналогично как и для произведения
5	$y = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma}$	

5.2. Оценка оптимальных требований к точности измерений

Задача: получить максимальную точность при проведении косвенных измерений и минимизировать затраты на их проведение и обработку результатов измерений

Определение плотности цилиндра

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi d^2 l}; \qquad \ln\rho = \ln 4 + \ln m - \ln\pi - 2\ln d - \ln l$$

Частные производные:

$$\frac{\partial\ln\rho}{\partial m} = \frac{1}{m}; \quad \frac{\partial\ln\rho}{\partial\pi} = -\frac{1}{\pi}; \quad \frac{\partial\ln\rho}{\partial d} = -\frac{2}{d}; \quad \frac{\partial\ln\rho}{\partial l} = -\frac{1}{l};$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial x_i}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\Delta_C m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_C \pi}{\pi}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta_C d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_C l}{l}\right)^2}$$

Пренебрегать составляющими погрешности

$$\frac{\Delta x_i}{x_i} \le 0.1\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)_{\max}$$

$$l \approx 11 см,\ \ d \approx 5 мм,\ \ m \approx 20 г$$

$\dfrac{\Delta_C m}{m} = \dfrac{0.0001\,г}{20\,г} = 5 \cdot 10^{-6}$; - аналитические весы, допустимая погрешность < 0.1 мг

$\dfrac{2\Delta_C d}{d} = \dfrac{2 \cdot 0.004\,мм}{5\,мм} = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$; -микрометр, допустимая погрешность ± 0.004 мм <u>играет основную роль</u>

$\dfrac{\Delta_C l}{l} = \dfrac{0.1\,мм}{100\,мм} = 1 \cdot 10^{-3}$ - штангенциркуль, допустимая погрешность ± 0.1 мм

π - можно взять с любой точностью, в зависимости от знаков

Пренебрегать составляющими погрешности

$$\frac{\Delta x_i}{x_i} \le 0.1 \left(\frac{\Delta x_i}{x_i} \right)_{\max}$$

Массу m с максимально возможной точностью измерять нет смысла, достаточно чтобы

$$\frac{\Delta_C m}{m} = 2 \cdot 10^{-4}$$

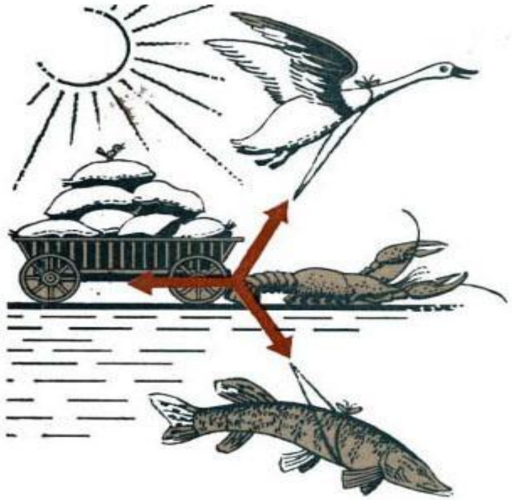
-- на порядок точнее d и l

Аналогично, $\dfrac{\Delta_C \pi}{\pi} = 2 \cdot 10^{-4}$, следовательно, можно брать до третьего знака

$\pi = 3.142$

$$\Delta_C \pi * \pi = 0.000628$$

5.3. Правила сложения систематической и случайной составляющих погрешности (ГОСТ 8.207-76)



Рассмотрим суммированние систематической и случайной составляющих погрешности, сложившийся в настоящий момент в метрологической практике.

Пусть:

Δ_C- неисключённая систематическая погрешность,

Δ^0- случайная погрешностью

Сл. 1. Если , $\Delta_C < 0.8\, S_{\bar{x}}$ то неисключенными систематическими погрешностями пренебрегают по сравнению со случайными и принимают, что граница погрешности измерений равна границе доверительного интервала случайной составляющей.

$\Delta = \Delta^0$;

Сл. 2. Если , $\Delta_C > 8\, S_{\bar{x}}$ то случайной погрешностью пренебрегают по сравнению с систематической и считают, что граница погрешности результата измерений равна границе неисключенной систематической погрешности.

$\Delta = \Delta_C$

Сл.3. Если $0.8\,S_{\bar{x}} \le \Delta_C \le 8\,S_{\bar{x}}$ то границу погрешности результата измерения находят путем построения композиции распределений случайной и неисключенной систематической погрешностей по формуле

- - $\Delta = k\,S_\Sigma$;

k - коэффициент, зависящий от соотношения случайной и систематической погрешностей, он вычисляется по эмпирической формуле,

-S_Σ - оценка суммарного квадратического отклонения результата измерения

$$k = \frac{\Delta^0 + \Delta_C}{S_{\bar{x}} + \frac{\Delta_C}{\sqrt{3}}}; \quad S_\Sigma = \sqrt{\frac{\Delta_C^2}{3} + S_{\bar{x}}^2}$$

для $N \ge 10$ и Pд = 0,95

$$k = \sqrt{3}; \qquad \Delta = \sqrt{\Delta_C^2 + \left(\Delta^0\right)^2}$$

На практике обычно применяют для суммарной погрешности

$$\Delta = \sqrt{\Delta_C^2 + \left(\Delta^0\right)^2}$$

Также на практике разумно использовать ***критерий ничтожно малой погрешности***, который можно сформулировать следующим образом: если одна величина меньше другой на порядок, то ею можно пренебречь.

5.4 Округление результата измерений.

Сколько значащих цифр оставлять в погрешности?

Для постоянного использования на практике можно сформулировать следующие правила:

Значение погрешности при пользовании современной вычислительной техникой может быть получено с большим числом знаков. Поскольку роль погрешности состоит в демонстрации того, каким значащим цифрам можно доверять в результате измерений, то часто приходится производить процедуру округления. Весь вопрос: сколько значащих цифр оставлять в погрешности?

В практике неметрологических (обычных) измерений сложилось следующее правило**: если полученное число начинается с цифры равной или большей трех**, то в нем **оставляют один знак**, а если оно **начинается с цифр 1 и 2**, то в нем **сохраняют два знака** (для представления точных, а также <u>промежуточных измерений сохраняют две и три значащих цифры</u> соответственно).

Округление результата измерения проводят после округления погрешности, т.е. числовое значение результата должно оканчиваться цифрой того ж разряда, что и значение погрешности. Для постоянного использования на практике можно сформулировать следующие правила:

Округление результата измерения проводят после округления погрешности, т.е. числовое значение результата должно оканчиваться цифрой того ж разряда, что и значение погрешности.

Для постоянного использования на практике можно сформулировать следующие правила:

1. **Погрешность** результата указывается двумя значащими цифрами, если первая из них равна 1 или 2, и одной – если первая 3 и более.

2**. Результат** измерения округляется до того же десятичного разряда, которым оканчивается округленное значение абсолютной погрешности.

3. **Округление проводится лишь в окончательном результате**, все предварительные вычисления проводятся с **одним-двумя лишними знаками**.

Цифры в числе могут быть значащими и незначащими. *Значащими цифрами числа являются все цифры данного числа, кроме нулей, стоящих слева. Нули, стоящие в середине или в конце числа* (справа) являются значащими цифрами, так как обозначают отсутствие единиц в соответствующем разряде. При этом цифры множителя 10^n *не учитываются. Примеры определения количества значащих* цифр в числах представлены в табл.

Примеры определения количества значащих цифр

Число	Количество значащих цифр
12	2
12,0	3
12,4	3
120	3
124	3
$1{,}24 \cdot 10^{-3}$	3
0,1240	4
0,1046	4
$0{,}526 \cdot 10^{6}$	3
$0{,}206 \cdot 10^{-3}$	3
$0{,}200 \cdot 10^{-3}$	3
$0{,}020 \cdot 10^{-3}$	2

Примеры ограничения числа значащих цифр и округления погрешности

Пример	Пояснения
$0,154 \approx 0,15$ $1,967 \approx 2,0$ $19,37 \approx 19$ $144,1 \approx 0,14 \cdot 10^3$	Первая значащая цифра погрешности “1”, поэтому оставляем две значащие цифры. Замечание. При необходимости число записывают с множителем 10^n *, где n – показатель степени.*
$0,294 \approx 0,29$ $2,94 \approx 2,9$	Первая значащая цифра погрешности “2”, поэтому оставляем две значащие цифры.
$0,297 \approx 0,3$ $2,97 \approx 3$	Первая значащая цифра погрешности “2”, поэтому оставляем две значащие цифры, но так как при округлении цифра “2” превращается в цифру “3”, то оставляем только одну значащую цифру.
$0,917 \approx 0,9$ $9,17 \approx 9$ $91,7 \approx 9 \cdot 10$ $9123 \approx 9 \cdot 103$	Первая значащая цифра погрешности “9”, поэтому оставляем одну значащую цифру.
$0,0977 \approx 0,10$ $0,956 \approx 1,0$ $956 \approx 1,0 \cdot 103$	Первая значащая цифра погрешности “9”, поэтому оставляем одну значащую цифру, но так как при округлении цифра “9” превращается в число “10”, т.е. первая значащая цифра “1”, то оставляем две значащие цифры.

Примеры ограничения количества значащих цифр в измеренном значении и его погрешности

Пример	Пояснения
43,234 ± 0,0417 ≈ 43,23 ± 0,04 32,3754 ± 0,0917 ≈ 32,38 ± 0,09	В погрешности оставляем одну значащую цифру, младший разряд – сотые. В измеренном значении оставляем также младший разряд – сотые.
4,3234 ± 0,0397 ≈ 4,32 ± 0,04 43,2364 ± 0,0522 ≈ 43,24 ± 0,05 432,37 ± 0,0917 ≈ 432,37 ± 0,09	В погрешности оставляем одну значащую цифру, младший разряд – сотые. В измеренном значении оставляем также младший разряд – сотые.
432,37 ± 0,956 ≈ 432,4 ±1,0 432,3477 ± 2,45 ≈ 432,3± 2,4 432,134 ± 2,86 ≈ 432,1± 2,9 43,234 ± 3,94 ≈ 43,2 ± 3,9	В погрешности оставляем две значащие цифры, последний разряд – десятые. В измеренном значении оставляем также младший разряд – десятые.
43,234 ± 3,97 ≈ 43 ± 4 432,364 ± 5,55 ≈ 432 ± 6 432,34 ± 39,4 ≈ 432 ± 39 432,34 ±19,37 ≈ 432 ±19	В погрешности оставляем одну значащую цифру, младший разряд – единицы. В измеренном значении оставляем также младший разряд – единицы.

Пример.

При измерении напряжения было получено значение U = 4,65 В, погрешность составила ±0,07245 В.

В результате округления результат должен быть записан в следующем виде *U = (4,65 ± 0,07) В.*

Если погрешность будет составлять ± 0,007245 В, то результат надо будет представлять так: U = (4,650 ± 0,007) В.

Правила округления погрешности такие же, как и в математике: если цифра отбрасываемого разряда меньше пяти, то оставляемую цифру не изменяют, а если больше пяти, то увеличивают на единицу. Как же быть в случае, если отбрасываемая цифра равна 5? С 2012 года в России при обработке результатов прямых многократных измерений необходимо руководствоваться ГОСТ Р 8.736 - 2011.

В приложении Е к этому ГОСТу идет речь о правилах округления результатов измерений. Наряду с основными требованиям к округлению, там рассмотрен вопрос, как надо поступать в случае, если отбрасываемая при округлении цифра равна пяти: если отбрасываемая цифра неуказываемого младшего разряда равна пяти, то сохраняемую значащую цифру в погрешности оценки измеряемой величины **увеличивают на единицу**.

U = 4,65 В, погрешность составила ±0,075 В, ***U = (4,65 ± 0,08) В***