GeekBrains

Часть 3 Тема 1

Понятие о последовательности

Выборки из множеств, сходимость

В этом видео

1. Понятие о выборке
2. Выборка на $\mathbb{N}$
3. Понятие о последовательности
4. Предел последовательности

Выборка - результат последовательного выбора элементов множества.

Для множества

$$A = \{1; 3; 5\}$$

Тремя разными выборками будут:

$$a_1 = \{1; 3; 5\}$$

$$a_2 = \{1; 1; 1\}$$

$$a_3 = \{3; 5; 3; 5; 3; \ldots\}$$

Последовательность - бесконечная выборка на упорядоченном множестве натуральных чисел.

Примеры последовательностей

$$a_n = n \qquad (1; 2; 3; 4; 5; \dots)$$

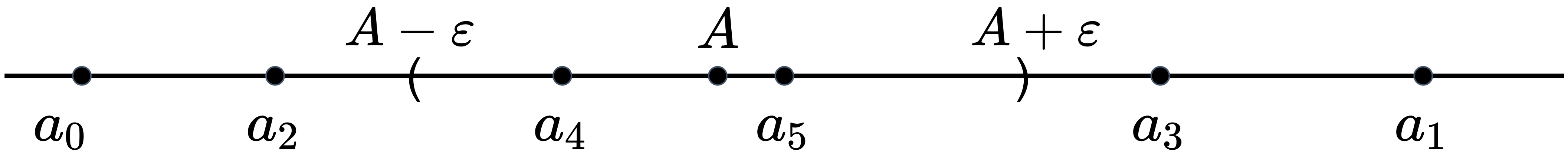
$$a_n = 2n \qquad (2; 4; 6; 8; 10; \dots)$$

$$a_n = 2^n \qquad (2; 4; 8; 16; 32; \dots)$$

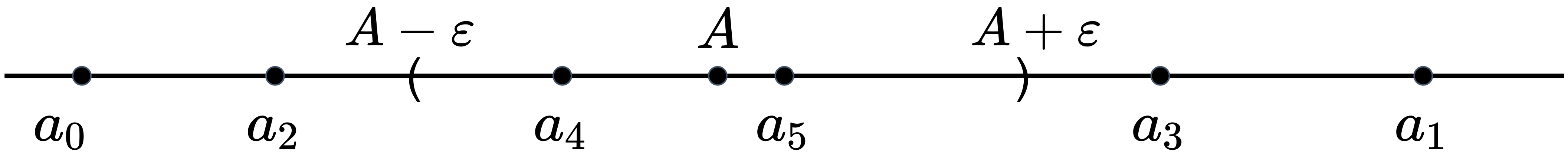
$$a_n = (-1)^n \qquad (-1; 1; -1; 1; -1; \dots)$$

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots\right)$$

Предельная точка



Предел последовательности



$$\lim_{n \to \infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon$$

Предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1$$

$$\lim_{n\to 0+} \frac{n}{n-1} = 0$$

Примеры последовательностей

$$a_n = n \qquad (1; 2; 3; 4; 5; \ldots)$$

$$a_n = 2n \qquad (2; 4; 6; 8; 10; \ldots)$$

$$a_n = 2^n \qquad (2; 4; 8; 16; 32; \ldots)$$

$$a_n = (-1)^n \qquad (-1; 1; -1; 1; -1; \ldots)$$

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots\right)$$

Сходимость последовательности по Коши

$$\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\exists N(\varepsilon)\forall n, m > N(\varepsilon) : |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Сходимость последовательности по Коши

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon_1 > 0 \exists N_1(\varepsilon_1) : \forall n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon_1$$

$$|x_n - x_m| = |x_n - a - (x_m - a)| \leq$$

$$\leq |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = 2\varepsilon_1$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2}, N(\varepsilon) = N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon \text{ при } n, m > N(\varepsilon)$$

Итоги

1. Выборки бывают конечные и бесконечные
2. Последовательность - отображение $\mathbb{N}$ в исходное множество.
3. Если последовательность имеет предел A, то она сходится к A.

GeekBrains

Часть 3 Тема 2

Свойства пределов последовательностей

Общие свойства последовательностей и их пределов

В этом видео

1. Общие свойства последовательностей
2. Свойства пределов

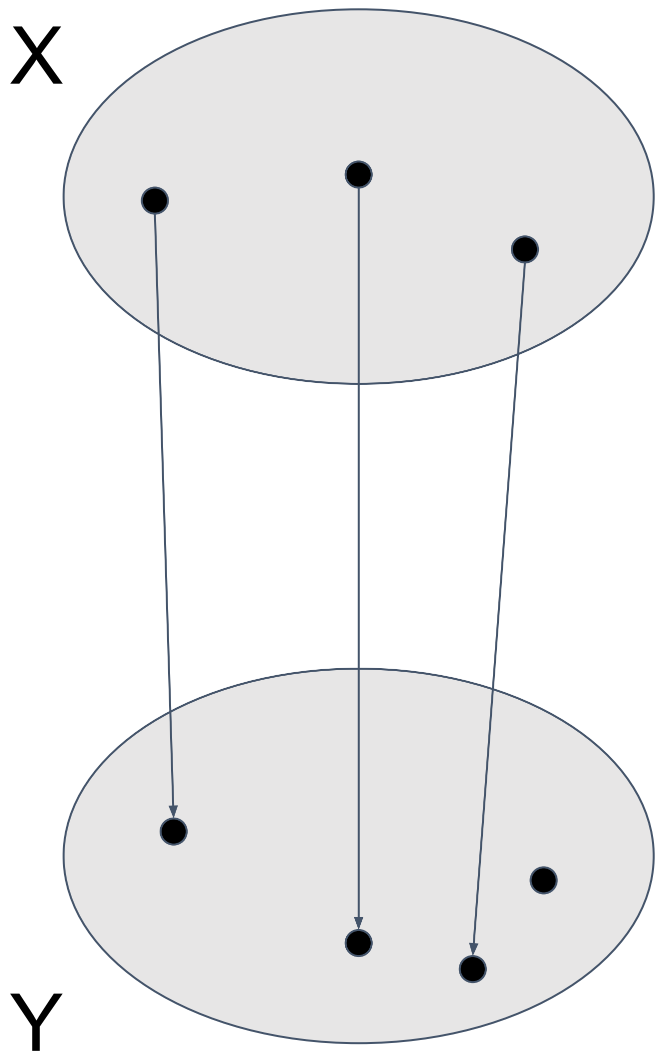
Общие свойства последовательностей

Понятие о биекции

1. Поскольку двум разным индексам соответствуют два разных элемента последовательности, можно говорить, что последовательности **инъективны**.
2. Поскольку одному индексу соответствует как минимум один член последовательности, можно говорить, что последовательности **сюръективны.**
3. Так как последовательности одновременно сюръективны и инъективны, то они **биективны**.

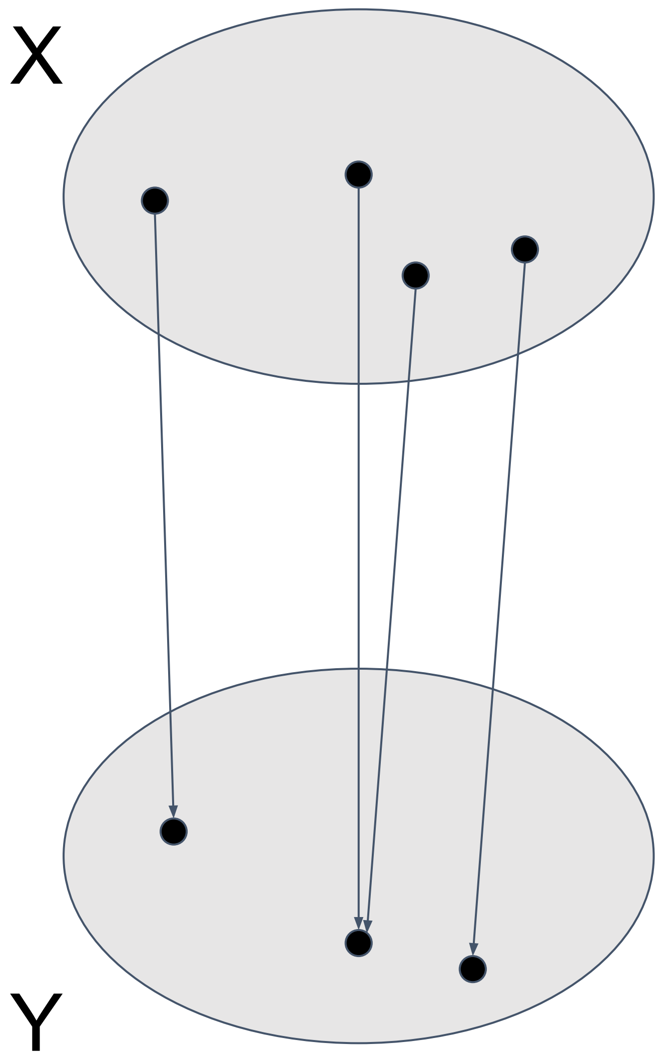
Инъекция -

отображение одного множества в другое, таким образом, чтоб разным элементам первого множества соответствовали разные элементы второго множества.



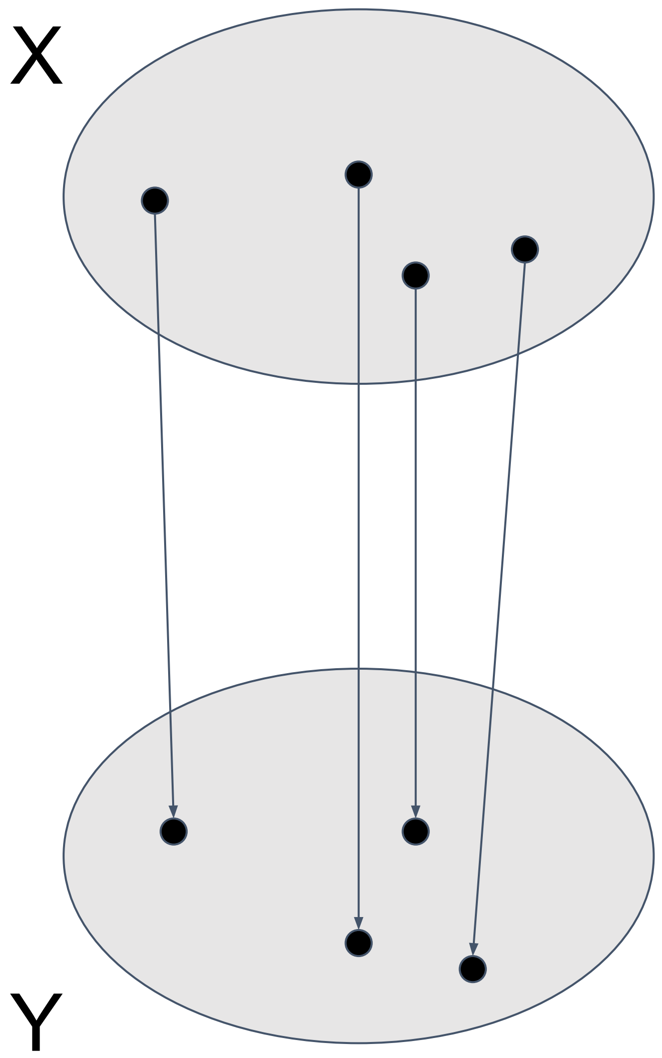
Сюръекция -

отображение одного множества в другое, таким образом, чтоб каждому элементу второго множества соответствовал хотя бы один элемент первого.



Биекция -

отображение одного множества в другое, таким образом, чтоб каждому элементу второго множества соответствовал ровно один элемент первого и наоборот.



Арифметические операции

1. Сумма: $a_n = b_n + c_n$
2. Произведение: $a_n = b_n \cdot c_n$
3. Разность: $a_n = b_n - c_n$
4. Частное: $a_n = \frac{b_n}{c_n}$

Бесконечно малые и бесконечно большие

1. $\{a_n\}$ - бесконечно малая, если предел члена последовательности на бесконечности равен нулю
2. $\{b_n\}$ - бесконечно большая, если предел члена последовательности на бесконечности равен бесконечности

Монотонность

1. Убывание $a_{n+1} < a_n$
2. Невозрастание $a_{n+1} \leq a_n$
3. Неубывание $a_{n+1} \geq a_n$
4. Возрастание $a_{n+1} > a_n$

Изоморфизм

Изоморфизм - свойство сущности сохранять форму и свойства при отображениях и преобразованиях.

Наличие подпоследовательностей

Подпоследовательность - последовательность, построенная на множестве элементов некоторой исходной последовательности.

Ограниченность

Ограниченность сверху: $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : a_n < M$

Ограниченность снизу: $\exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : a_n > m$

Свойства пределов последовательностей

GeekBrains

Арифметические свойства

1. $$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

2. $$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

3. $$\lim_{n\to\infty} Ca_n = C \lim_{n\to\infty} a_n$$

4. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}, \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

Теорема о сохранении порядка (теорема о двух милиционерах)

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : x_n \leq z_n \leq y_n \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n \leq \lim_{n \to \infty} z_n \leq \lim_{n \to \infty} y_n$$

Если есть порядок между членами разных последовательностей, то этот порядок сохраняется и между их пределами.

Свойства сходимости

1. Сходящаяся последовательность имеет единственный предел
2. Подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же числу
3. Если все подпоследовательности сходятся, то их пределы равны

Свойства сходимости

4. Если последовательность расположена на одном отрезке, то на этом отрезке расположен и ее предел
5. У монотонной, ограниченной со стороны стремления последовательности есть предел
6. Замена или удаление конечного числа элементов в сходящейся последовательности не влияет на предел

Теорема Штольца

Пусть a_n и b_n — две последовательности вещественных чисел, причём b_n положительна, неограничена и строго возрастает (хотя бы начиная с некоторого члена). Тогда, если существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}},$$

то существует и предел:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

Итоги

1. Изучены свойства последовательностей
2. Сформировано представление о свойствах переделов

GeekBrains

Свойства сходящихся последовательностей

Примеры нахождения пределов последовательностей

В этом видео

1. Свойства сходящихся последовательностей
2. Примеры нахождения пределов последовательностей

Свойства сходящихся последовательностей

Свойства

1. Любая бесконечно малая последовательность сходится.
2. Любая сходящаяся последовательность ограничена. Обратное неверно.
3. $\{a_n\}$ - сходится $\Leftrightarrow \inf\limits_{n\to\infty}(a_n) = \sup\limits_{n\to\infty}(a_n)$
4. Если последовательность $\{a_n\}$ сходится, но не бесконечно малая, то начиная с некоторого члена определена ограниченная последовательность $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$

Свойства

5. Сумма, разность, произведение и частное сходящихся последовательностей сходятся.
6. Если сходящаяся последовательность ограничена сверху, то ее предел не превышает ни одной из ее верхних граней.
7. Если сходящаяся последовательность ограничена снизу, то ни одна из ее нижних граней не превышает ее предела.

Свойства

8. Если для любого номера члены одной сходящейся последовательности не превышают членов другой сходящейся последовательности, то и предел первой последовательности также не превышает предела второй.
9. Если все элементы некоторой последовательности, начиная с некоторого номера, лежат на отрезке между соответствующими элементами двух других сходящихся к одному и тому же пределу последовательностей, то и эта последовательность также сходится к такому же пределу.

Свойства

10. Любую сходящуюся последовательность $\{x_n\}$ можно представить в виде $\{x_n\} = a + \{\alpha_n\}$, где a – предел последовательности $\{x_n\}$, а $\{\alpha_n\}$ – некоторая бесконечно малая последовательность.

10. Всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной. Обратное также верно.

Например

$$\left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\} \supset \left\{\frac{1}{n^2}\right\}, \left\{\frac{-1}{n^2}\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\} = \inf_{n\to\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\} = \sup_{n\to\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\} = 0$$

1.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2+3n+5n^2}{2n^2-6n+1}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n}+5}{2-\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}\right\} = \frac{5}{2}$$

2.

$$\left\{\frac{2+3n+5n^2}{2n^2-6n+1}\right\} = \frac{5}{2} + \{\alpha_n\} = \frac{5}{2} + \left\{\frac{18n-\frac{1}{2}}{2n^2-6n+1}\right\}$$

Например

4. $\{a_n\} = \left\{\frac{3}{n^2}\right\}$ $\{b_n\} = \left\{\frac{6}{n^5}\right\}$ $\{c_n\} = \left\{\frac{12}{n^5}\right\}$

$$\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = \lim_{n\to\infty}\{b_n\} = \lim_{n\to\infty}\{c_n\} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \lim_{n\to\infty}\{0{,}5n^2\} = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\{c_n\}}{\{b_n\}} = \lim_{n\to\infty}\{2\} = 2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\{b_n\}}{\{a_n\}} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{n^3}\right\} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\{b_n\}}{\{c_n\}} = \lim_{n\to\infty}\{0{,}5\} = 0{,}5$$

Итоги

1. Определены свойства сходящихся последовательностей
2. Разобраны примеры нахождения пределов с применением этих свойств.