# Лекция

Исчисление предикатов

# Алгоритм получения (приведения) ПНФ.

- **Шаг 1.** Исключить связки эквивалентности ( ~ ) и импликации (→).
- $x \sim y \;=\; (x \to y)\ \&\ (y \to x)$,
- $A \to B = (\bar{A} \vee B)$.
- **Шаг 2.** Переименовать, если необходимо, связанные переменные таким образом, чтобы никакая переменная не имела бы одновременно свободных и связанных вхождений

- **Шаг 3.** Удалить те квантификации, область действия которых не содержит вхождений квантифицированной переменной.
- **Шаг 4.** Перенести отрицания внутри формулы в соответствия со следующими правилами:

$$\frac{A \to B,\ A}{B};\quad \overline{\forall x A} \sim \exists x \overline{A};\quad \overline{A \& B} \sim \overline{A} \& \overline{B};\quad \overline{\overline{A}} \sim A.$$

# Пример

**Пример.** Найти ПНФ формулы $x \to (y \to xy)$.

**Решение.**

**Шаг 1:** $\forall x(P(x) \& \forall y \exists x(\overline{\overline{Q}}(x,y) \vee \forall z R(a,x,y)))$

**Шаг 2:** $\forall x(P(x) \& \forall y \exists u(\overline{\overline{Q}}(u,y) \vee \forall z R(a,u,y)))$

**Шаг 3:** $\forall x(P(x) \& \forall y \exists x(\overline{\overline{Q}}(x,y) \vee R(a,x,y)))$

**Шаг 4:** $\forall x(P(x) \& \forall y \exists x(Q(x,y) \vee R(a,x,y)))$

**Шаг 5:** $\forall x \forall y(p(x) \& \exists u(Q(u,y) \vee R(a,u,y)))$.

$\forall x \forall y \exists u(P(x) \& (Q(u,y) \vee R(a,u,y)))$.

# Скулемовские функции

- Приведение формулы ЛП к сколемовской форме (сколемизация) призвано обеспечить дальнейшее упрощение логических представлений и облегчить введение процедур машинной обработки в ЛП.
- Отправной точкой сколемизации является предваренная нормальная форма, матрица которой приведена к конъюнктивной нормальной форме (КНФ).
- Цель сколемизации - исключение ∃-квантификаций.

# Алгоритм получения сколемовской формы

- 1) сопоставить каждой ∃-квантифицированной переменной список ∀- квантифицированных переменных, предшествующих ей,

- а также некоторую еще не использованную функциональную константу, число мест, у которой равно мощности списка.

- Данная константа будет представлять сколемовскую функцию;

- 2) в матрице формулы заменить каждое вхождение ∃-квантифицированной переменной на некоторый терм.

  Этот терм является функциональной константой, соответствующей данной переменной и снабженной списком аргументов, также соответствующим той же самой переменной;

- 3) устранить из формулы все ∃ - квантификации.

- **Каузальная** форма -сколемовская форма, матрица которой приведена к КНФ.
- Любая сколемовская форма допускает эквивалентную каузальную форму

# Пример

**Пример.**

$$\exists x\forall y P(x,y)\vee\overline{\forall x\exists y}Q(x,y)\equiv\exists x\forall y P(x,y)\vee\exists x\forall y\overline{Q(x,y)}\overset{36}{\equiv}\exists x[\forall y P(x,y)\vee\forall y\overline{Q(x,y)}]\equiv$$

обозначим в предикате Q переменную y через z

$$\equiv\exists x[\forall y P(x,y)\vee\forall z\overline{Q(x,z)}]\overset{53}{\equiv}\exists x\forall y\forall z(P(x,y)\vee\overline{Q(x,z)})$$

## *Общезначимость и выполнимость формул логики предикатов.*

- **Определение** Формула А логики предикатов называется **выполнимой** в области М, если существуют значения переменных входящих в эту формулу и отнесенных к области М (иначе – существует модель), при которых формула А принимает истинные значения.

- **Определение** Формула А логики предикатов называется **общезначимой**, если она тождественна истинна на всякой области (на любой модели).

- Все логические законы, представленный в ЛВ формулами являются общезначимыми формулами логики предикатов .

- Общезначимость формулы логики предикатов, например, F обозначается ├F

Все общезначимые формулы могут быть источниками новых ├ формул.

- **Определение** Формула А логики предикатов называется **тождественно ложной** в области М, если она принимает ложные значения для всех значений переменных, входящих в эту формулу ( на данной модели).

**Пример** формула $\forall x[P(x) \wedge \bar{P}(x)]$ является тождественно ложной (невыполнимой) формулой логики предикатов.

# Теорема Черча

- **Теорема** (Теорема Черча).

  Не существует алгоритма, который для любой формулы логики предикатов устанавливает, общезначима она или нет.

# Пример

- Из тождественно истинной формулы логики высказываний

$$x \vee y \equiv y \vee x$$

- Получаем общезначимую формулу

$$P(x,y) \vee Q(x,y) \equiv Q(x,y) \vee P(x,y)$$

# Проблема разрешимости

- Существуют ли алгоритмы, позволяющие для любой формулы А логики предикатов установить, к какому типу (классу) она относится, т.е. является ли она
- общезначимой,
- выполнимой
- или тождественно ложной (невыполнимой).

- Если бы такой алгоритм существовал, то он сводился бы к критерию тождественной истинности любой формулы логики предикатов.

- Отметим, что, в отличие от алгебры логики, в логике предикатов не применим метод перебора всех вариантов значений переменных, входящих в формулу, так как таких вариантов может быть бесконечное множество

# Прямая, обратная и противоположная теоремы

- **Определение** Пара теорем, у которых условие одной является заключением второй, а условие второй является заключением первой, называются **взаимно обратными** **друг другу.**

Так, теоремы $\forall x \in E(P(x) \to Q(x))$ и $\forall x \in E(Q(x) \to P(x))$, а также $\forall x \in E(\bar{P}(x) \to \bar{Q}(x))$ и $\forall x \in E(\bar{Q}(x) \to \bar{P}(x))$ - взаимно обратные теоремы. При этом если одну из них называют *прямой* теоремой, то вторая называется *обратной*.

- **Определение** Пара теорем, у которых условие и заключение одной являются отрицанием соответственно условия и заключения другой, называются **взаимно противоположными**

Так, теоремы $\forall x \in E(P(x) \to Q(x))$ и $\forall x \in E(\overline{P}(x) \to \overline{Q}(x))$, а также $\forall x \in E(Q(x) \to P(x))$ и $\forall x \in E(\overline{Q}(x) \to \overline{P}(x))$ являются взаимно противоположными теоремами.

# Пример

- **Теорема** “Если в четырехугольнике диагонали равны, то четырехугольник является прямоугольником ” (1)
- **обратной** является
- Теорема “Если четырехугольник является прямоугольником, то его диагонали равны” (2).
- **противоположной** является
- Теорема «Если в четырехугольнике диагонали не равны, то четырехугольник не является прямоугольником ” (3), а для теоремы (2) противоположной является
- Теорема “Если четырехугольник не является прямоугольником, то его диагонали не равны ” (4).

- теоремы (1) и (4) являются одновременно ложными, а теоремы (2) и (3) одновременно истинными.

- Вывод: **прямая и обратная теоремы,** вообще говоря**, не равносильны,**
- т. е. одна из них может быть истинной, а другая – ложной.
- Однако легко показать, что теоремы (1) и (4), а также (2) и (3) всегда равносильны

# Необходимые и достаточные условия

- Некоторые теоремы существования сформулированы в виде « … для того, чтобы…, необходимо и достаточно, что …»,
- или « … тогда и только тогда, когда …», а это конструкция

$$\forall x \in E(P(x) \to Q(x))$$

- предикат является истинным для всех x в том и только в том случае,
- когда множество истинности предиката P(x) содержится в множестве истинности предиката Q(x).

$$P(x) \rightarrow Q(x)$$

- При этом говорят, что предикат Q(x) логически следует из предиката P(x), и предикат Q(x) называют необходимым условием для предиката P(x), а предикат P(x) – достаточным условием для Q(x

$$P(x) \to Q(x)$$

# *Неполнота математики*

- Класс всех теорем исчисления предикатов совпадает с классом общезначимых формул .

- В 1889 г. Пеано предложил свои аксиомы для аксиоматизации понятия натурального числа и, после этого была создана формальная теория, известная под названием *формальная арифметика*. Это теория является расширением исчисления предикатов

# Аксиомы Пеано

- 1) 1 есть натуральное число;
- 2) следующее за натуральным числом есть натуральное число;
- 3) 1 не следует ни за каким натуральным числом;
- 4) если натуральное число a следует за натуральным числом b и за натуральным числом c, то натуральные числа b и c тождественны;
- 5) если какое-либо предложение доказано для 1 и если из допущения, что оно верно для натурального числа n, вытекает, что оно верно для следующего за n натурального числа, то это предложение верно для всех натуральных чисел (принцип математической индукции).

# Теорема Геделя о неполноте

- **Теорема**.
- Всякая естественная непротиворечивая аксиоматическая теория Т (формализация) арифметики или любой другой математической теории, содержащей арифметику (например, теория множеств), неполна и непополнима в том смысле, что
- а) в Т имеются содержательно истинные неразрешимые формулы, т. е. такие формулы А, что ни А, ни отрицание А не выводимы (не доказуемы) в Т;
- б) каким бы конечным множеством дополнительных аксиом не расширить систему Т, в новой, усиленной таким образом формальной системе неизбежно появятся свои неразрешимые формулы.

- Вывод : в сложной аксиоматической
- системе
- существуют формулы, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть.

- Может в этом причина, что не все задачки имеют решения?!

# Аксиомы и основные правила вывода исчисления предикатов

- Аксиомами ИП являются все 4 группы аксиом ИВ и
- 5 группа :
-

1. $\forall x F(x) \rightarrow F(y)$ ; аксиома Р1;
2. $F(y) \rightarrow \exists x F(x)$ ; аксиома Р2.

# Правила вывода ИП

- 1) правила вывода ИВ (подстановка ПП и заключение ( МР));

2) **правило обобщения (правило $\forall$ - введения)**:

Если $F \to G(x)$ - выводимая формула в ИП и $F$ - не содержит переменной $x$, то формула $F \to \forall x\, G(x)$ также выводима в ИП

$$\frac{F \to G(x)}{F \to \forall x G(x)}$$ правило ПР 1,

3) **правило** $\exists$**- введения**:

Если $G(x) \to F$ - выводимая формула в ИП и $F$ - не содержит переменной $x$, то формула $\exists x\, G(x) \to F$ также выводима в ИП

причем $G(x)$ содержит свободные вхождения $x$, а $F$ - не содержит;

$$\frac{G(x) \to F}{\exists x G(x) \to F}$$

правило ПР2.

# Пример

- Даны два предиката:
- $B(x)$ = "$x$ делится на 6";
- $A(x)$ = "$x$ делится на 3".
- применение правила П2 неправомерно, если $B$ зависит от $x$

Тогда $B(x) \rightarrow A(x)$ = "Если $x$ делится на 6, то $x$ делится на 3" = И для всех $x$.

Однако $B(x) \rightarrow \forall x\, A(x)$ = "Если $x$ делится на 6, то все $x$ делятся на 3" не всегда истинно.

Если же к формуле $B(x) \to A(x)$ применить правило П3,

то получим $\exists x B(x) \to A(x)$.

После применения правила П2 получим $\exists x B(x) \to \forall x A(x)$ или

"Если некоторые $x$ делится на 6, то все $x$ делятся на 3" = Л.

Таким образом, применение правила П3 также неправомерно, если $B$ зависит от $x$.

# Дополнительные правила вывода для исчисления предикатов

1. **Введение квантора общности**: $\frac{A(y)}{\forall x A(x)}$, где $A(y)$ – результат правильной подстановки переменной $y$ вместо $x$ в $A(x)$.

2. **Удаление квантора общности**: $\frac{\forall x A(x)}{A(y)}$, где $A(y)$ – результат правильной подстановки терма $y$ вместо $x$ в $A(x)$.

3. **Отрицание квантора общности:** $\dfrac{\neg\forall x A(x)}{\exists x \neg A(x)}$.

4. **Введение квантора существования:** $\dfrac{A(y)}{\exists x A(x)}$, где $A(y)$ – результат правильной подстановки терма $y$ вместо $x$ в $A(x)$.

5. **Удаление квантора существования:** $\dfrac{\exists y A(y)}{A(x)}$, где $A(x)$ – результат правильной подстановки переменной $x$ вместо $y$ в $A(y)$.

6. **Отрицание квантора существования:** $\dfrac{\neg\exists x A(x)}{\forall x \neg A(x)}$.

# Пример

- Всякое нечетное натуральное число есть разностью квадратов двух натуральных чисел.
- 5 – натуральное число. Следовательно, 5 – разность квадратов двух натуральных чисел
- Решение
- $A(x)$ = “$x$ – нечетное число”.
- $B(x)$ – “$x$ – разность квадратов двух чисел”.

$\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), A(5) \vdash B(5).$

Построим вывод.

(1) $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ – гипотеза;

(2) $A(5)$ – гипотеза;

(3) $A(5) \rightarrow B(5)$ – из (1) и удаления $\forall$;

(4) $B(5)$ – из (2) и (3) по *т. р.*

# *Метод резолюций в ИП*

- Главная идея метода резолюций
- если одна и та же формула появляется в одном дизъюнкте без отрицания, а в другом - с отрицанием,
- то дизъюнкт, называемый резольвентой и получаемый в результате соединения этих двух дизъюнктов, из которых вычеркнута упоминавшаяся повторяющаяся формула является следствием указанных дизъюнктов