

Подготовка к ЕГЭ - 2014

по математике.

Нахождение площади сечения  
через площадь его ортогональной  
проекции.

Задание C2

Учитель математики МБОУ СОШ № 143 г. Красноярск  
Князькина Т. В.

Рассмотрим решение такой задачи:

**В прямоугольном параллелепипеде**

*ABCD A<sub>1</sub> B<sub>1</sub> C<sub>1</sub> D<sub>1</sub>*

$$AB = BC = 10\sqrt{2}$$

**. Сечение**

**параллелепипеда проходит через**

**точки B и D и образует с плоскостью ABC**

**угол**

**. Найдите площадь сечения.**

$$\alpha = \arctg \frac{\sqrt{7}}{3}$$

- Часто бывает удобно находить площадь сечения через площадь его ортогональной проекции.

Нахождение площади треугольника через площадь его ортогональной проекции легко иллюстрируется таким рисунком:

$CH$  - высота треугольника  $ABC$ ,  $C'H$  - высота  
 треугольника  $ABC'$ , который является  
 ортогональной проекцией  
 треугольника  $ABC$ . Из прямоугольного  
 треугольника  $CHC'$ :

$$CH = \frac{C'H}{\cos \alpha}$$

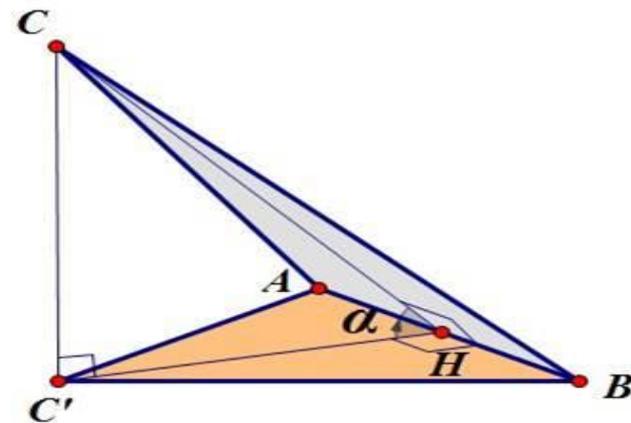
Площадь треугольника  $ABC'$  равна

$$\frac{AB \times C'H}{2}$$

Площадь треугольника  $ABC$  равна

$$\frac{AB \times CH}{2} = \frac{AB \times \frac{C'H}{\cos \alpha}}{2}$$

Следовательно, **площадь**  
**треугольника  $ABC$  равна площади**  
**треугольника  $ABC'$ ,**  
**деленной на косинус угла между**  
**плоскостями треугольника  $ABC$  и**  
**треугольника  $ABC'$ , который**  
**является ортогональной проекцией**  
**треугольника  $ABC$ .**



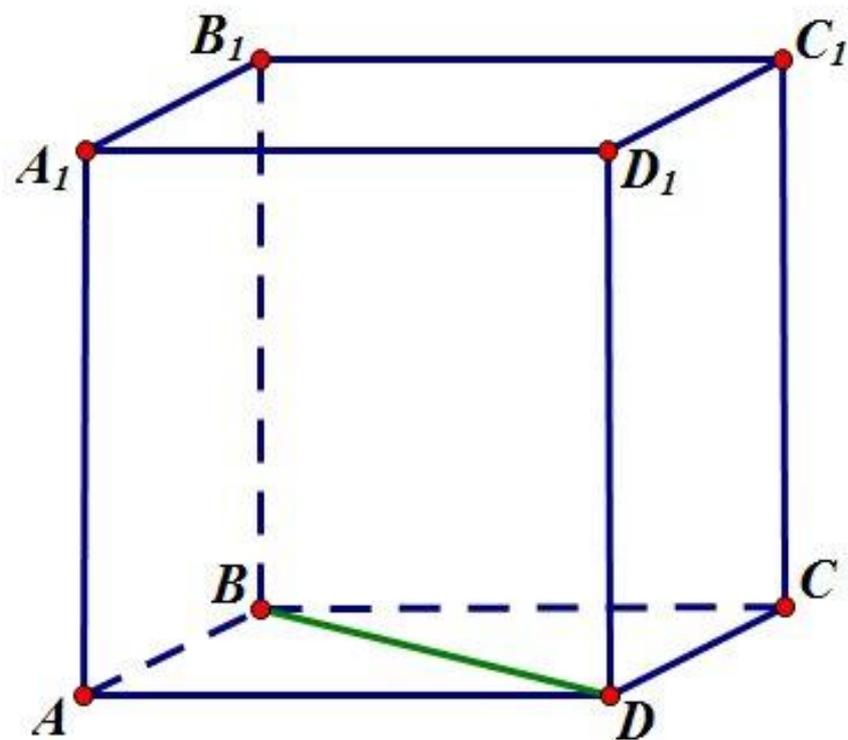
Поскольку площадь любого многоугольника можно представить в виде суммы площадей треугольников, **площадь многоугольника равна площади его ортогональной проекции на плоскость деленной на косинус угла между плоскостями многоугольника и его проекции.**

Используем этот факт для решения нашей задачи (см. слайд 2)

План решения такой:

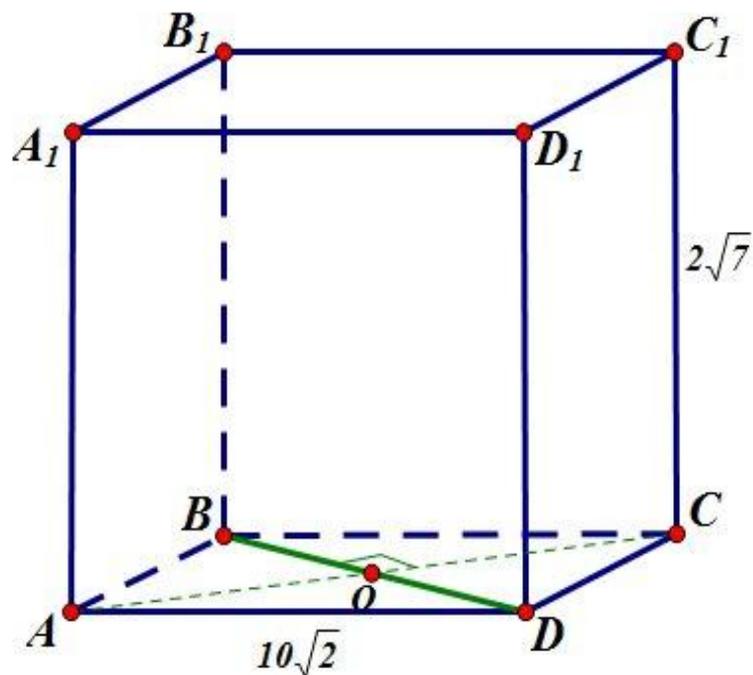
- А) Строим сечение.
- Б) Находим его ортогональную проекцию на плоскость основания.
- В) Находим площадь ортогональной проекции.
- Г) Находим площадь сечения.

1. Сначала нам нужно построить это сечение. Очевидно, что отрезок  $BD$  принадлежит плоскости сечения и плоскости основания, то есть принадлежит линии пересечения плоскостей:



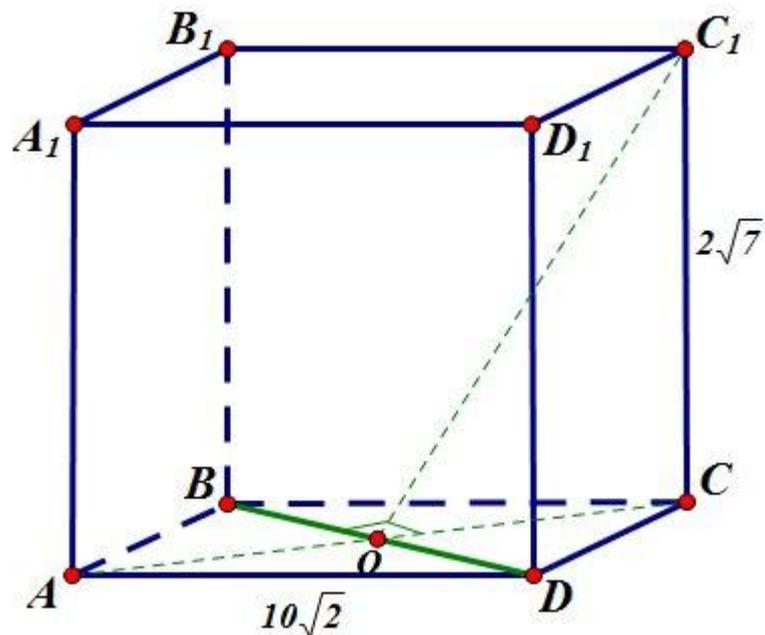
Угол между двумя плоскостями – это угол между двумя перпендикулярами, которые проведены к линии пересечения плоскостей и лежат в этих плоскостях.

$BD \perp AC$  Пусть точка  $O$  – точка пересечения диагоналей основания.  $OS$  – перпендикуляр к линии пересечения плоскостей, который лежит в плоскости основания:



2. Определим положение перпендикуляра, который лежит в плоскости сечения. (Помним, что если прямая перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна и самой наклонной. Ищем наклонную по ее проекции (  $OC$  ) и углу между проекцией и наклонной). Найдем тангенс угла  $\angle C_1OC$  между  $OC_1$  и  $OC$

$$\operatorname{tg} \angle C_1OC = \frac{C_1C}{OC}$$



$$OC = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{(10\sqrt{2})^2 + (10\sqrt{2})^2}}{2} = 10$$

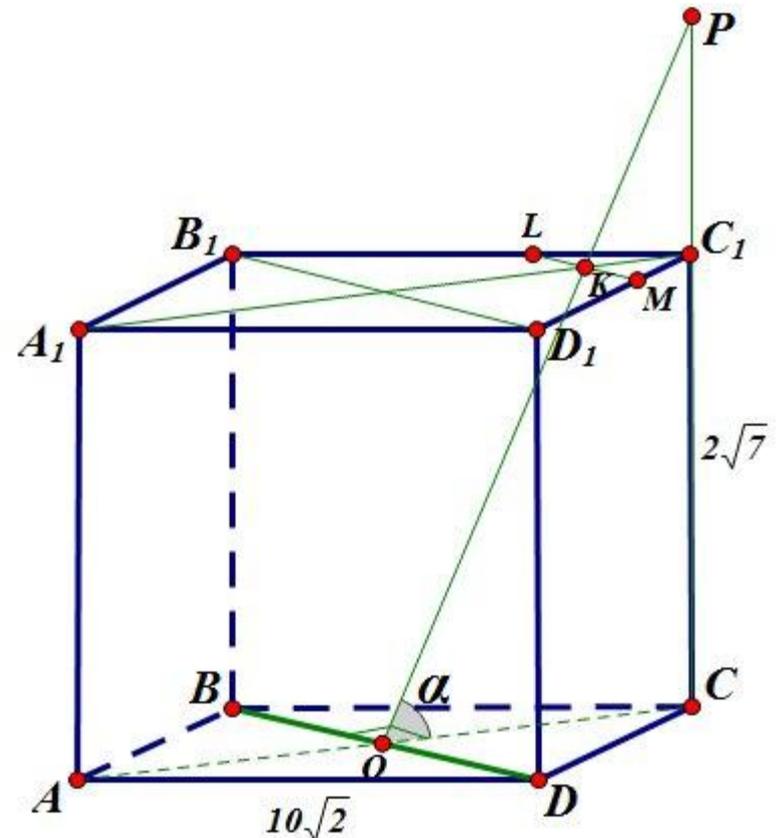
$$\operatorname{tg} \angle COC_1 = \frac{2\sqrt{7}}{10} = \frac{\sqrt{7}}{5} < \frac{\sqrt{7}}{3}$$

Следовательно, угол  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}}{3}$  между плоскостью сечения и плоскостью основания больше, чем между  $OC_1$  и  $OC$ .

То есть сечение расположено как-то так:

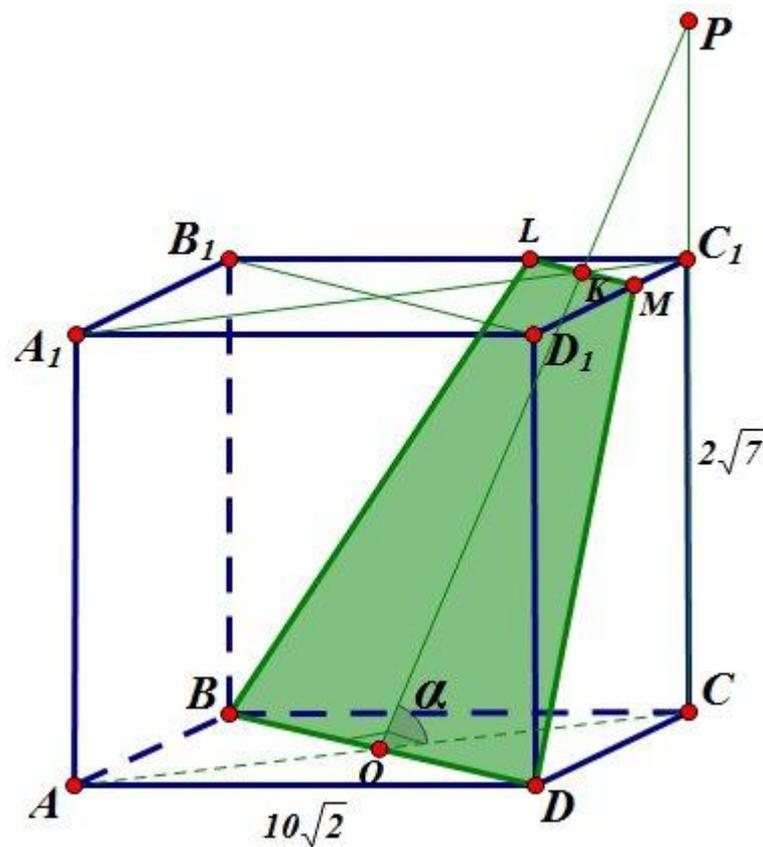
$$CP = OC \operatorname{tg} \alpha = \frac{10 \times \sqrt{7}}{3} = \frac{10}{3} \sqrt{7}$$

$K$  – точка пересечения  $OP$  и  $A_1C_1$ ,  $LM \parallel B_1D_1$



Итак, вот наше сечение:

**3.** Найдем проекцию сечения  $VLMD$  на плоскость основания. Для этого найдем проекции точек  $L$  и  $M$ .



- Четырехугольник  $BL_1M_1D$  – проекция сечения на плоскость основания.

4. Найдем площадь четырехугольника  $BL_1M_1D$ .  
Для этого из площади треугольника  $B_1C_1D_1$

вычтем площадь

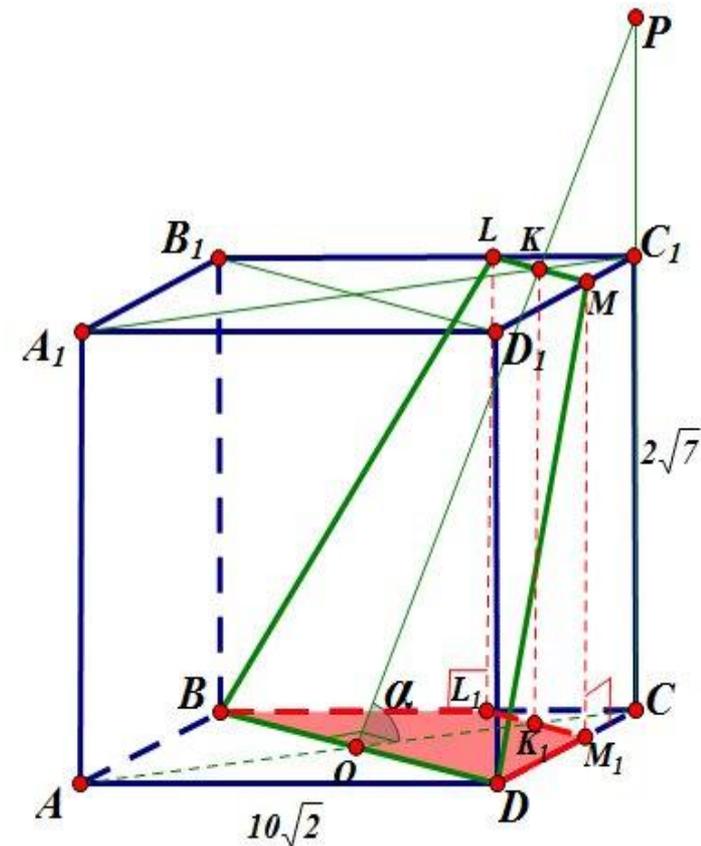
треугольника  $L_1C_1M_1$

Найдем площадь

треугольника  $L_1C_1M_1$ .

Треугольник  $L_1C_1M_1$  подобен  
треугольнику  $B_1C_1D_1$ .

Найдем коэффициент  
подобия.





5. Теперь найдем  $\cos \alpha$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}} = \frac{3}{4}$$

6. И, наконец, получаем:

$$S_{BLMD} = S_{BL_1 M_1 D} : \cos \alpha = 84 : \frac{3}{4} = 112$$

**Ответ: 112**