

# Моделирование Теория игр.

Выигрышная стратегия.

СЗ

# Вопросы (для актуализации знаний).

- 1) Дайте определение модели.
- 2) Что такое моделирование?
- 3) Назовите виды моделей.
- 4) Какую теорию особо выделяют в моделировании?
- 5) Что такое теория игр?
- 6) Дайте определение дерева игры.
- 7) На какие игровые ситуации делятся все позиции?
- 8) Что называют выигрышной позицией?
- 9) В чем состоит стратегия игрока?



**Цель урока(сформулируйте самостоятельно)**

# Задача 1.

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 22. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 22 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 21$ . Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.

# Задача 1.

Выполните следующие задания. Во всех случаях обосновывайте свой ответ.

1. а) Укажите все такие значения числа  $S$ , при которых Петя может выиграть в один ход. Обоснуйте, что найдены все нужные значения  $S$ , и укажите выигрывающий ход для каждого указанного значения  $S$ .

б) Укажите такое значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Вани.

2. Укажите два таких значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причем

- Петя не может выиграть за один ход, и

- Петя может выиграть своим вторым ходом, независимо от того, как будет ходить Ваня. Для каждого указанного значения  $S$  опишите выигрышную стратегию Пети.

3. Укажите значение  $S$ , при котором:

а) у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть вторым ходом при любой игре Пети, и

б) у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети.

Для указанного значения  $S$  опишите выигрышную стратегию Вани.

# Задача 1.

Решим задачу математическим способом.

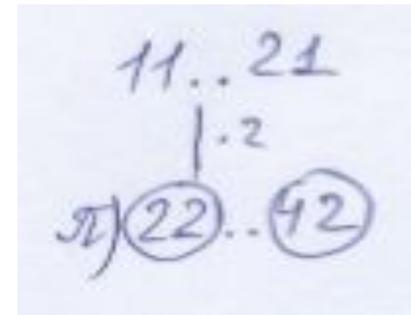
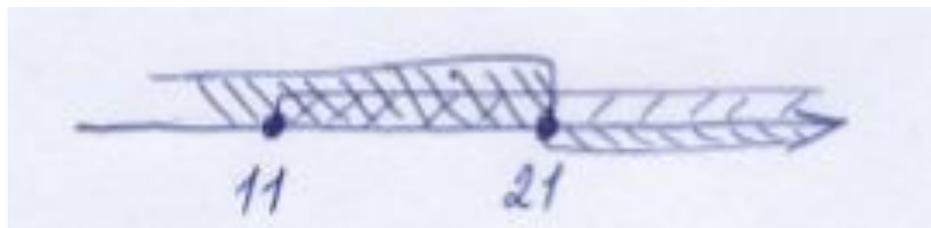
Запишем условие:

$$\begin{array}{l} \text{Команды} \quad 1) +1 \\ \quad \quad \quad 2) \cdot 2 \end{array} \quad \text{Выигрыш} \geq 22 \quad s \in [1;21]$$

1а) Петя выигрывает своим первым ходом, если выполняется совокупность неравенств при условии, что  $s \in [1;21]$

$$\left[ \begin{array}{l} s + 1 \geq 22 \\ s \cdot 2 \geq 22 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} s \geq 21 \\ s \geq 11 \end{array} \right] \quad s \in [11..21]$$

Изобразим это графически (совокупность неравенств – это объединение промежутков) и построим дерево решений (выигрышной стратегии):



Таким образом, при  $s \in [11..21]$  Петя выигрывает своим первым ходом, его выигрышная стратегия – увеличить количество камней в куче в 2 раза

# Задача 1.

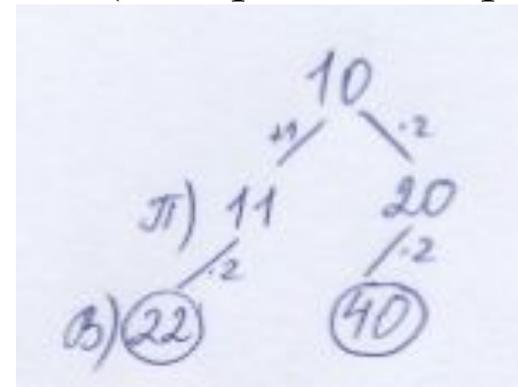
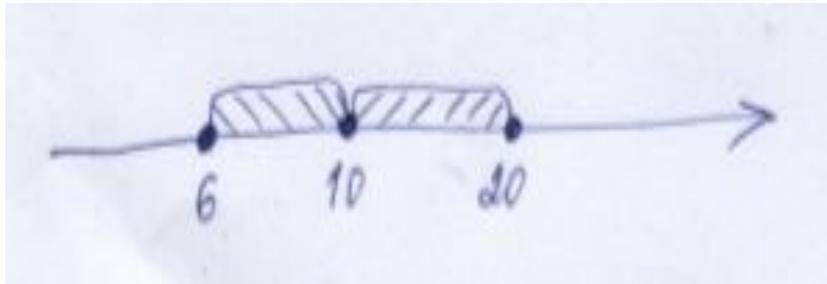
Команды 1) +1  
2)  $\cdot 2$

Выигрыш  $\geq 22$   $s \in [1; 21]$

1б) Ваня выигрывает своим первым ходом, если выполняется система неравенств

$$\begin{cases} s + 1 \in [11..21] \\ s \cdot 2 \in [11..21] \end{cases} \quad \begin{cases} s \in [10..20] \\ s \in [6..10] \end{cases} \quad s \in [10]$$

Изобразим это графически (система неравенств – это пересечение промежутков) и построим дерево решений (выигрышной стратегии):



Таким образом, при  $s \in [10]$  Ваня выигрывает своим первым ходом, его выигрышная стратегия – увеличить количество камней в куче в 2 раза

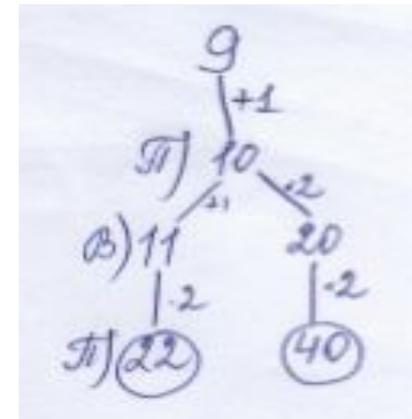
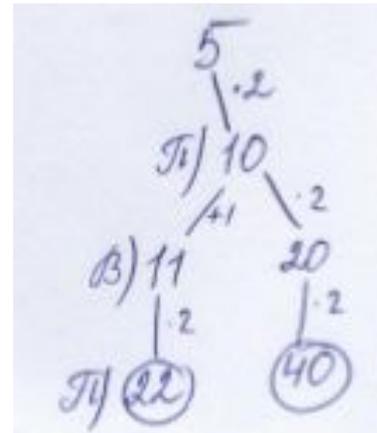
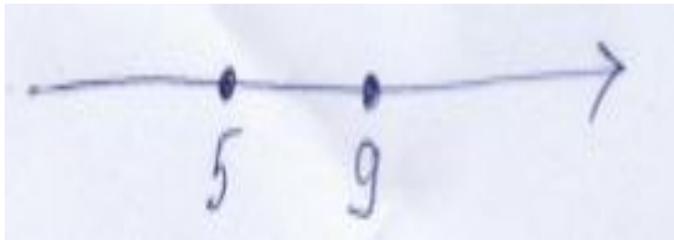
# Задача 1.

Команды 1) +1                      Выигрыш  $\geq 22$                        $s \in [1;21]$   
          2)  $\cdot 2$

2) Петя выигрывает своим вторым ходом, если выполняется совокупность неравенств

$$\begin{cases} s + 1 \in [10] \\ s \cdot 2 \in [10] \end{cases} \quad \begin{cases} s \in [9] \\ s \in [5] \end{cases} \quad s \in [5;9]$$

Изобразим это графически (совокупность неравенств – это объединение промежутков) и построим дерево решений (выигрышной стратегии):



Таким образом, при  $s \in [5;9]$  Петя выигрывает своим вторым ходом, его выигрышная стратегия – 1 ход – сделать кучу из 10 камней, 2 ход – увеличить количество камней в куче в 2 раза

# Задача 1.

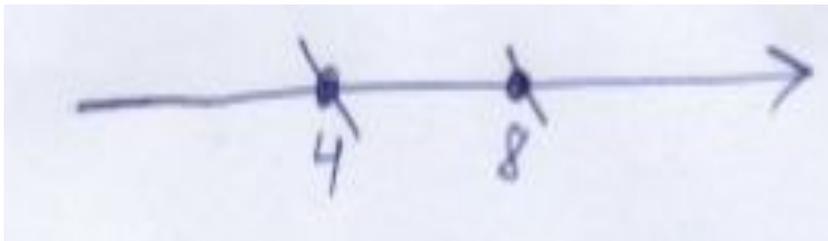
Команды 1) +1  
2) •2

Выигрыш  $\geq 22$   $s \in [1;21]$

3а) Ваня выигрывает своим вторым ходом, если выполняется система неравенств

$$\begin{cases} s + 1 \in [5;9] \\ s \cdot 2 \in [5;9] \end{cases} \quad \begin{cases} s \in [4;8] \\ s \in \emptyset \end{cases} \quad s \in \emptyset$$

Изобразим это графически (система неравенств – это пересечение промежутков):



Таким образом, нет таких  $s$ , при которых Ваня выигрывает своим вторым ходом

# Задача 1.

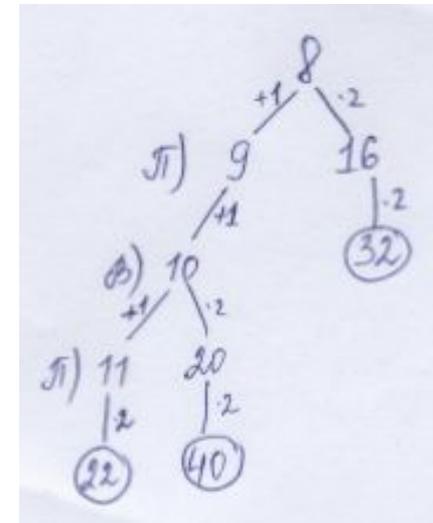
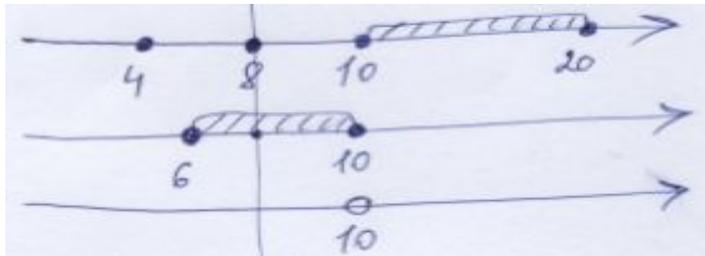
Команды 1) +1  
2) •2

Выигрыш  $\geq 22$   $s \in [1;21]$

3б) Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом, если выполняется система неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} s+1 \in [5;9] \\ s+1 \in [11..21] \\ s \cdot 2 \in [5;9] \\ s \cdot 2 \in [11..21] \\ s \notin [10] \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} s \in [4;8] \\ s \in [10..20] \\ s \in [6..10] \\ s \notin [10] \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} s \in [4;8;10..20] \\ s \in [6..10] \\ s \notin [10] \end{array} \right. \quad s \in [8]$$

Изобразим это графически (система неравенств – это пересечение промежутков) и дерево решений:



Таким образом, при  $s \in [8]$  Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом

# Задача 1.

Команды 1) +1  
2) •2

Выигрыш  $\geq 22$   $s \in [1;21]$

**Ответ:**

1а)  $s \in [11..21]$

1б)  $s \in [10]$

2)  $s \in [5;9]$

3а) нет таких  $s$

3б)  $s \in [8]$

# Задача 2.

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой из которых 4, а во второй - 3 камня. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. Ход состоит в том, что игрок или утраивает число камней в какой-то куче, или добавляет 1 камень в какую-то кучу. Игра завершается в тот момент, когда общее количество камней в двух кучах становится не менее 20. Если в момент завершения игры общее число камней в двух кучах не менее 35, то выиграл Ваня, в противном случае - Петя.

Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков?

Укажите, стратегию выигрывающего игрока - какой ход он должен сделать в каждой из позиций, которые могут ему встретиться при правильной игре. Докажите, что описанная стратегия - выигрышная.

# Задача 2.

$$\text{Исх. поз. } (4;3) \quad \left. \begin{array}{l} 1) \cdot 3 \\ 2) + 1 \end{array} \right\}$$

Конец игры:  $\geq 20$

Выигрыш:  $\geq 35$  (Ваня),  $< 35$  (Петя)

Запишем условие и построим полное дерево игры в виде таблицы

Исх. поз.	1 ход (П)	2 ход (В)	3 ход (П)			
(4;3)	(12;3)	(36;3)В				
		(12;9)П				
		(13;3)				
		(12;4)				
	(4;9)	(12;9)П				
		(4;27)П				
		(5;9)	(15;9)П	(5;27)П	(6;9)	(5;10)
		(4;10)	(12;10)П	(4;30)П	(5;10)	(4;11)
	(5;3)	(15;3)	(45;3)В	(15;9)П	(16;3)	(15;4)
		(5;9)	(15;9)П	(5;27)П	(6;9)	(5;10)
		(6;3)	(18;3)П	(6;9)	(7;3)	(6;4)
		(5;4)	(15;4)	(5;12)	(6;4)	(5;5)
	(4;4)	(12;4)	(36;4)В	(12;12)П	(13;4)	(12;5)
		(4;12)	(12;12)П	(4;36)В	(5;12)	(4;13)
		(5;4)	(15;4)	(5;12)	(6;4)	(5;5)
		(4;5)	(12;5)	(4;15)	(5;5)	(4;6)

ИНФОРМАТИК

# Задача 2.

Уск. поз. (4;3)  $\left. \begin{array}{l} 1) \cdot 3 \\ 2) +1 \end{array} \right\}$   
 Конеч. шаг:  $\geq 20$   
 Выигрыш:  $\geq 35$  (Ваня),  $< 35$  (Петя)

1 ход	2 ход	3 ход	
Петя (выигрышный ход)	Ваня (все варианты)	Петя (выигрышный ход)	
4,9	12,9	Петя выиграл	
	4,27	Петя выиграл	
	5,9	15,9	Петя выиграл
		5,27	выиграл
	4;10	12;10	Петя выиграл
		4;30	выиграл

Ответ: Выигрывает Петя (1 игрок), его выигрышная стратегия – своим первым ходом сделать кучу (4;9), при увеличении Ваней количества камней в куче в 3 раза Петя сразу выигрывает, а при увеличении Ваней количества камней в куче на 1, следующим ходом Пете необходимо увеличить количество камней в куче в 3 раза и Петя выигрывает после своего второго хода.

# Самостоятельная работа.

Выберите одну задачу из двух и решите ее.

## Задача 1.

Два игрока играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучи камней, в первой из которых 3 камня, а во второй – 2 камня. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок или увеличивает в 3 раза число камней в какой-то куче, или добавляет 1 камень в какую-то кучу. Выигрывает игрок, после хода которого общее число камней в двух кучах становится не менее 16. Кто выигрывает при безошибочной игре – игрок, делающий первый ход, или игрок, делающий второй ход? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока? Ответ обоснуйте.

## Задача 2.

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу два камня или увеличить количество камней в куче в три раза и затем добавить в кучу 2 камня.

Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 12 или 32 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 60. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 60 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 59$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите все значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?
3. Назовите все значения  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

## Домашнее задание.

№16 (стр.86 учебник) – игра Баше