

Модуль 2. Тема 1. Лекция 1.

**Решение дифференциальных
уравнений в частных
производных методом
конечных разностей**

План

1. Постановка задач для ДУЧП параболического типа
2. Постановка задач для ДУЧП гиперболического типа
3. Постановка задач для ДУЧП эллиптического типа
4. Конечно-разностные схемы. Основные определения: сеточная функция, временной слой, шаблон. Явные и неявные схемы для ДУЧП параболического типа
5. Конечно-разностная аппроксимация задач для ДУЧП гиперболического типа
6. Конечно-разностная аппроксимация задач для ДУЧП эллиптического типа
7. Интегро-интерполяционный метод (метод конечных объемов)
8. Основные понятия для разностных схем: аппроксимация и порядок аппроксимации, сходимость и порядок сходимости, устойчивость, консервативность и корректность. Анализ порядка аппроксимации.

План

9. Исследование устойчивости методом гармонического анализа. Условия устойчивости явных схем для основных уравнений матфизики.
10. Неявно-явная конечно-разностная схема с весами. Схема Кранка-Николсона
11. Многомерные ДУЧП. Явные и неявные методы. Понятие об экономичных конечно-разностных схемах
12. Методы расщепления для многомерных уравнений параболического типа. Расщепление по пространственным переменным. Расщепление по физическим процессам.
13. Метод переменных направлений
14. Метод дробных шагов

Дифференциальные уравнения в частных производных

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_k, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_k^{p_k}}\right) = 0$$

$$u(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

$$n = p_1 + p_2 + \dots + p_k$$

Линейные ДУЧП второго порядка

$$A(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + 2B(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t\partial x} + C(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + D(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \\ + E(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + F(x,t)u(x,t) = G(x,t), \quad (x,t) \in D$$

$$|A(x,t)| + |B(x,t)| + |C(x,t)| \neq 0$$

$$u_x \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

$$u_t \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

$$u_y \equiv \frac{\partial u(x,y)}{\partial y},$$

$$u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u_{tt} \equiv \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},$$

$$u_{xt} \equiv \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t\partial x}, \dots$$

Линейные ДУЧП второго порядка

$$Au_{xx} + 2Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + Fu = G$$

$$B^2 - AC = 0$$

параболический тип

$$B^2 - AC > 0$$

гиперболический тип

$$B^2 - AC < 0$$

эллиптический тип

Линейные ДУЧП первого порядка

$$A(x, t)u_x + B(x, t)u_t + C(x, t)u = G(x, t)$$

Примеры ДУЧП

$$1) u_t + u_x = 0;$$

$$2) u_t - uu_{xxx} = \sin x;$$

$$3) u_{xx} + xu_{tt} = 0;$$

$$4) u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0;$$

$$5) u_t - a^2 u_{xx} = 0;$$

$$6) u_{xx} + u_{yy} = 0;$$

$$7) xu_x + tu_t + u^2 = 0;$$

$$8) u_{xy} = 0;$$

$$9) 3u_{xx} + 7u_{xt} + 2u_{tt} = 0;$$

$$10) u_t u_{xx} - 3x^2 u u_{xt} + 3u_x - u = 0$$

Постановка задач для уравнений параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

Уравнение теплопроводности (диффузии)

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0$$

Начальное условие

$$u(0, t) = \varphi_1(t), \quad x = 0, \quad t > 0$$

$$u(l, t) = \varphi_2(t), \quad x = l, \quad t > 0$$

Граничные условия первого рода

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \varphi_1(t), \quad x = 0, \quad t > 0$$

Граничные условия второго рода

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \varphi_2(t), \quad x = l, \quad t > 0$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \alpha u(0, t) = \varphi_1(t), \quad x = 0, \quad t > 0$$

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \beta u(l, t) = \varphi_2(t), \quad x = l, \quad t > 0$$

Граничные условия третьего рода

Постановка задач для уравнений гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

Волновое уравнение

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0$$

Начальные условия

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0$$

$$u(0, t) = \varphi_1(t), \quad x = 0, \quad t > 0$$

Граничные условия первого рода

$$u(l, t) = \varphi_2(t), \quad x = l, \quad t > 0$$

Постановка задач для уравнений гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

Волновое уравнение

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0$$

Начальные условия

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \varphi_1(t), \quad x = 0, \quad t > 0,$$

Граничные условия второго рода

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \varphi_2(t), \quad x = l, \quad t > 0$$

Постановка задач для уравнений гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

Волновое уравнение

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0$$

Начальные условия

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \alpha u(0, t) = \varphi_1(t), \quad x = 0, \quad t > 0,$$

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \beta u(l, t) = \varphi_2(t), \quad x = l, \quad t > 0$$

Граничные условия третьего рода

Постановка задач для уравнений эллиптического типа

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y), & (x, y) \in \Gamma \end{cases}$$

Первая краевая задача -
задача Дирихле

Постановка задач для уравнений эллиптического типа

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \varphi(x, y), & (x, y) \in \Gamma \end{cases}$$

Вторая краевая задача -
задача Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\overline{n, i}) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\overline{n, j}) = \varphi(x, y)$$

Эквивалентное представление
граничного условия

Постановка задач для уравнений эллиптического типа

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + \alpha u \Big|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma \end{array} \right.$$

Третья краевая задача

Основные определения

Конечно-разностный метод (метод сеток): исходная область пространства независимых переменных заменяется дискретным множеством точек – сеткой, а производные аппроксимируются на этой сетке разностными соотношениями. В результате исходная задача для ДУЧП заменяется конечным числом алгебраических (разностных) уравнений, которые решаются.

Сетка – конечное множество точек (**узлов сетки**), принадлежащих области определения дифференциальной задачи, включая границу, на которой определяются начальные и граничные условия. Узлы, принадлежащие внутренней области, называются **внутренними**, узлы, принадлежащие границе, называются **граничными**

Шаг сетки – количественная характеристика плотности размещения узлов сетки. При стремлении шага сетки к нулю, сетка стремится заполнить область определения дифференциальной задачи.

Сеточная функция – функция, определенная в узлах сетки

Сеточное представление непрерывной функции – множество значений функции в узлах сетки

Разностная схема (задача) - совокупность разностных уравнений, аппроксимирующих ДУЧП во всех внутренних узлах сетки, а также начальные и краевые условия в граничных узлах сетки.

Основные определения

$Lu = f$ Дифференциальная задача с независимыми переменными x и t
Обычно x – пространственная координата, t – время

$0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T$ Прямоугольная область

$\omega_{h,\tau} = \{x_j = jh, \quad j = 0 \boxtimes N, \quad t^k = k\tau, \quad k = 0 \boxtimes K\}$ Прямоугольная сетка

$h = l / N, \quad \tau = T / K$ Пространственный и временной шага сетки

Равномерная (регулярная сетка) – сетка с постоянным шагом по каждой независимой переменной

Временной слой - множество всех узлов сетки, имеющих одну и ту же временную координату

$u_h = \{u_j^k = u(x_j, t^k), \quad j = 0 \boxtimes N, \quad k = 0 \boxtimes K\}$ Сеточное представление точного решения дифференциальной задачи

Как правило, вычислить точное решение u_h не удастся

$L_h \hat{u}_h = f_h$ - разностная схема; $\hat{u}_h \approx u_h$ - решение разностной схемы

Разностные схемы для уравнений параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

Уравнение теплопроводности (диффузии)

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} + O(\tau),$$

Аппроксимация производной по времени

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^k = \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O(h^2)$$

Явная аппроксимация пространственной производной (используются известные значения на k -м временном слое)

Одно неизвестное значение может быть **явно** рассчитано через известные

$$\boxed{u_j^{k+1}} - u_j^k = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O(\tau + h^2),$$

Явная разностная схема для первой начально-краевой задачи

$$j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{0, K-1}$$

$$u_0^{k+1} = \varphi_1(t^{k+1}), \quad u_N^{k+1} = \varphi_2(t^{k+1}), \quad k = \overline{0, K};$$

$$u_j^0 = \psi(x_j), \quad j = \overline{0, N}$$

Схема называется **явной**, если аппроксимирующее уравнение содержит только одно неизвестное значение функции на $(k+1)$ -м слое, которое может быть выражено явно через известные значения на k -м слое.

Разностные схемы для уравнений параболического типа

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^{k+1} = \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + O(h^2)$$

Неявная аппроксимация пространственной производной (используются неизвестные значения на $(k+1)$ -м временном слое)

Неизвестные значения

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + O(\tau + h^2),$$

$$j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{0, K-1}$$

Неявная разностная схема для первой начально-краевой задачи

$$u_0^{k+1} = \varphi_1(t^{k+1}), \quad u_N^{k+1} = \varphi_2(t^{k+1}), \quad k = \overline{0, K-1};$$

$$u_j^0 = \psi(x_j), \quad j = \overline{0, N}$$

Схема называется **неявной**, если оператор аппроксимируется с использованием нескольких неизвестных значений функции на $(k+1)$ -м слое.

Разностные схемы для уравнений параболического типа

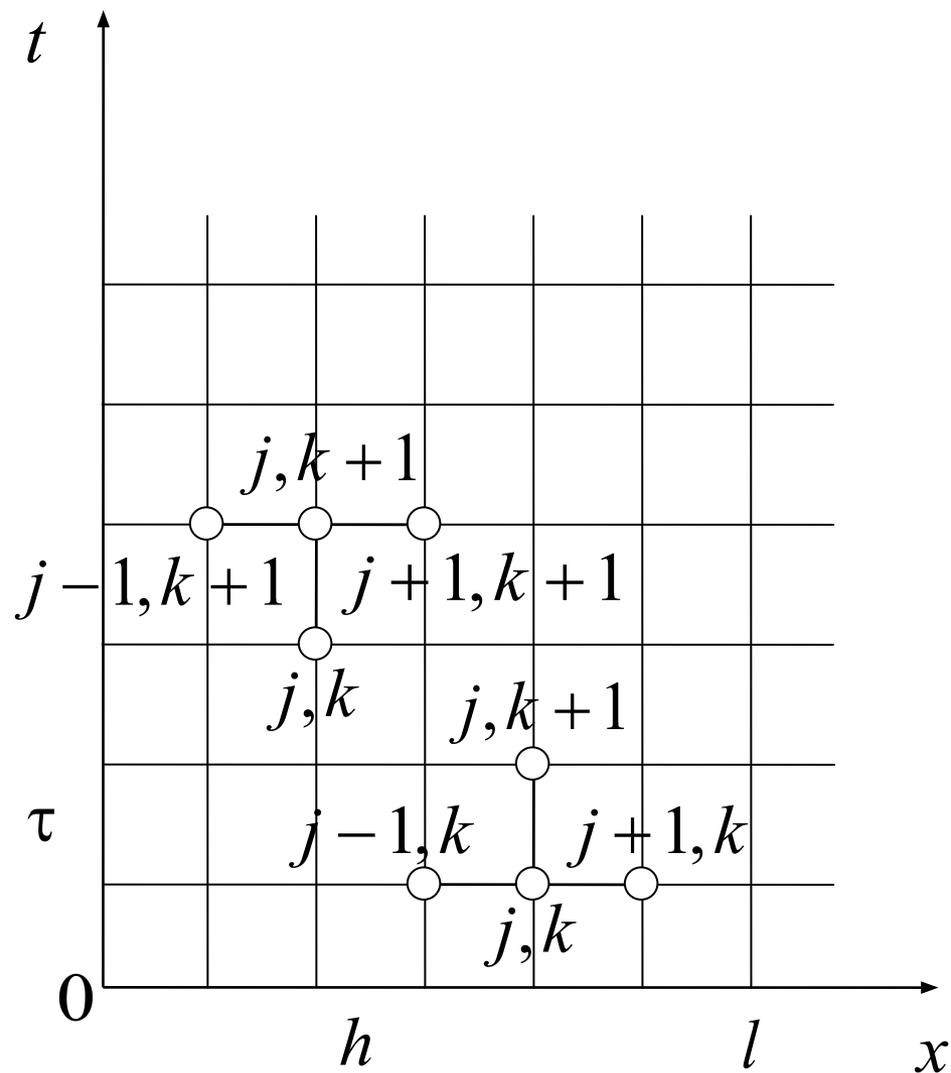
$$\begin{cases} a_1 = 0; \\ c_{N-1} = 0; \end{cases} \begin{cases} b_1 u_1^{k+1} + c_1 u_2^{k+1} = d_1, & j = 1, \\ a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j, & j = \overline{2, N-2}, \\ a_{N-1} u_{N-2}^{k+1} + b_{N-1} u_{N-1}^{k+1} = d_{N-1}, & j = N-1, \end{cases}$$

где $a_j = \sigma$, $j = \overline{2, N-1}$; $b_j = -(1 + 2\sigma)$, $j = \overline{1, N-1}$; $c_j = \sigma$,
 $j = \overline{1, N-2}$; $d_j = -u_j^k$, $j = \overline{2, N-2}$; $d_1 = -(u_1^k + \sigma\varphi_1(t^{k+1}))$;

$$d_{N-1} = -(u_{N-1}^k + \sigma\varphi_2(t^{k+1})); \quad \sigma = \frac{a^2 \tau}{h^2}.$$

Система линейных алгебраических уравнений,
полученная по неявной разностной схеме,
может быть решена *методом прогонки*

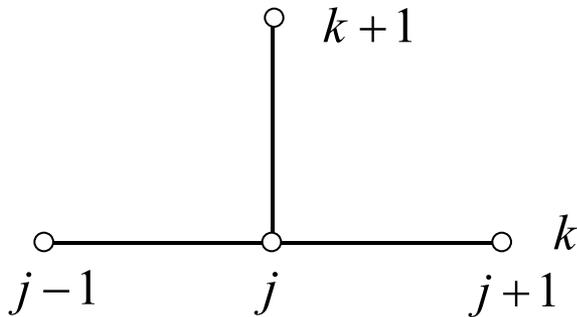
Разностные схемы для уравнений параболического типа



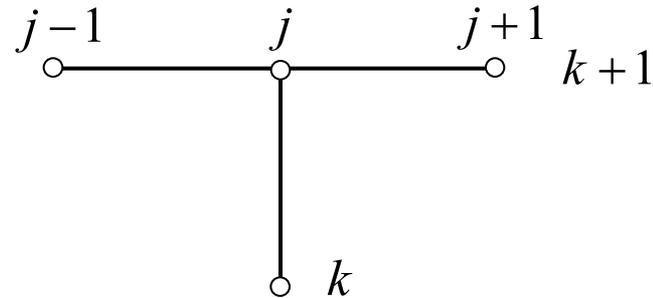
Шаблоны разностных схем для уравнения теплопроводности

Шаблон – совокупность узлов сетки, значения в которых используются при аппроксимации дифференциального оператора.

Шаблон, содержащий p узлов называется *p -точечным*.



Шаблон явной схемы



Шаблон неявной схемы

Постановка задач для уравнений гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

Волновое уравнение

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0$$

Начальные условия

$$u(0, t) = \varphi_1(t), \quad x = 0, \quad t > 0$$

$$u(l, t) = \varphi_2(t), \quad x = l, \quad t > 0$$

Граничные условия первого рода

Разностные схемы для уравнений гиперболического типа на примере волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

Явная схема для волнового уравнения

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} \quad \begin{array}{l} j = 1 \dots N - 1; \\ k = 1, 2, \dots \end{array}$$

Неявная схема для волнового уравнения

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} \quad \begin{array}{l} j = 1 \dots N - 1; \\ k = 1, 2, \dots \end{array}$$

Разностные схемы для уравнений гиперболического типа на примере волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

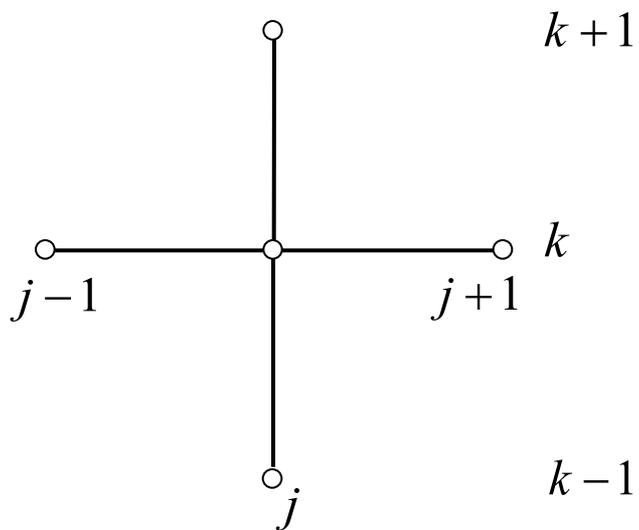
Явная схема для волнового уравнения

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + \boxed{O(\tau^2 + h^2)} \quad \begin{array}{l} j = 1 \dots N - 1; \\ k = 1, 2, \dots \end{array}$$

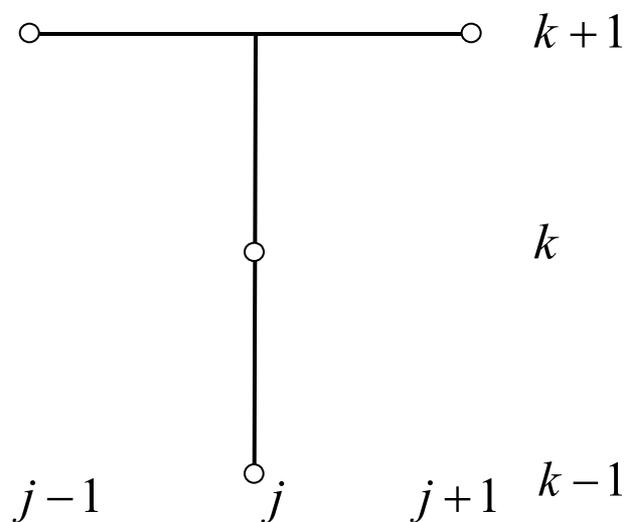
Неявная схема для волнового уравнения

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + \boxed{O(\tau + h^2)} \quad \begin{array}{l} j = 1 \dots N - 1; \\ k = 1, 2, \dots \end{array}$$

Шаблоны разностных схем для волнового уравнения



Шаблон явной схемы



Шаблон неявной схемы

Разностные схемы для уравнений гиперболического типа на примере волнового уравнения

$$u(x,0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0$$

Начальные условия

$$u_j^0 = \psi_1(x_j), \quad j = 0 \dots N$$

$$\frac{u_j^1 - u_j^0}{\tau} = \psi_2(x_j) + O(\tau), \quad j = 0 \dots N$$

Аппроксимация
начальных условий

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau + O(\tau^2)$$

Разностные схемы для уравнений гиперболического типа на примере волнового уравнения

$$u(x,0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0$$

Начальные условия

$$u_j^1 = u(x_j, 0 + \tau) = u_j^0 + \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^0 \tau + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_j^0 \frac{\tau^2}{2} + \boxed{O(\tau^3)}$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_j^0 = a^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^0 = a^2 \psi_1''(x_j)$$

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau + a^2 \psi_1''(x_j) \frac{\tau^2}{2} + \boxed{O(\tau^3)}$$

$$\frac{u_j^1 - u_j^0}{\tau} = \psi_2(x_j) + a^2 \psi_1''(x_j) \frac{\tau}{2} + O(\tau^2)$$

Аппроксимация
начальных условий
со вторым порядком
аппроксимации
по времени

Разностные схемы для уравнений эллиптического типа

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \\ u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y) \end{cases}$$

Задача Дирихле

$$\omega_{h_1, h_2} = \{x_i = ih_1, i = 0 \dots N_1; y_j = jh_2, j = 0 \dots N_2\}$$

Сетка для
прямоугольной
области

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} + O(h_1^2 + h_2^2) = f(x_i, y_j),$$

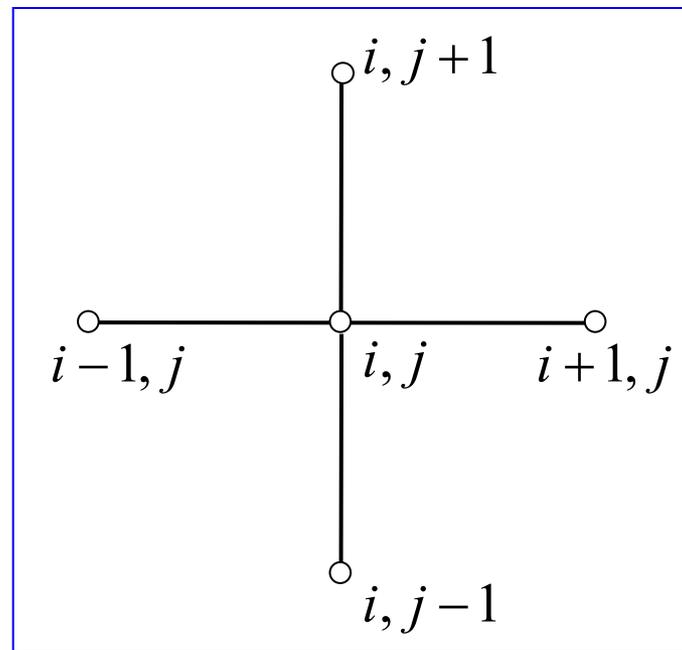
$$i = 1 \dots N_1 - 1; j = 1 \dots N_2 - 1$$

Разностная схема
для внутренних точек

Шаблон разностной схемы

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} + O(h_1^2 + h_2^2) = f(x_i, y_j),$$

$$i = 1 \dots N_1 - 1; \quad j = 1 \dots N_2 - 1$$



Метод простых итераций для ДУЧП эллиптического типа

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} + O(h_1^2 + h_2^2) = f(x_i, y_j)$$

$$h_1 = h_2 = h$$

$$u_{i,j} = \frac{1}{4} [u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - h^2 f_{i,j}], \quad i = 1 \dots N_1 - 1, \quad j = 1 \dots N_2 - 1$$

Итерационный процесс Либмана

$$u_{i,j}^{(n+1)} = \frac{1}{4} [u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} - h^2 f_{i,j}], \quad i = 1 \dots N_1 - 1, \quad j = 1 \dots N_2 - 1$$

Итерации сходятся при $n \rightarrow \infty$

Сходимость может быть медленной

Итерационные методы решения ДУЧП эллиптического типа

Метод Зейделя

$$u_{i,j}^{(n+1)} = \frac{1}{4} \left[u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n+1)} + u_{i,j-1}^{(n+1)} + u_{i,j+1}^{(n)} - h^2 f_{i,j} \right],$$

$$i = 1 \dots N_1 - 1, \quad j = 1 \dots N_2 - 1$$

Метод релаксации

$$u_{i,j}^{(n+1)} = \omega u_{i,j}^{(n)} + (1 - \omega) \frac{1}{4} \left[u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n+1)} + u_{i,j-1}^{(n+1)} + u_{i,j+1}^{(n)} - h^2 f_{i,j} \right],$$

$$i = 1 \dots N_1 - 1, \quad j = 1 \dots N_2 - 1$$

$0 < \omega < 1$ метод нижней релаксации

$\omega > 1$ метод верхней релаксации

Операторное представление дифференциальной задачи

$$LU = f$$

Дифференциальная задача для ДУЧП

Все, связанное с неизвестной функцией U , помещено в оператор L :

- Область пространства независимых переменных
- Дифференциальный оператор
- Тип дифференциальной задачи

Все, связанное с конкретизацией задачи, помещено в функцию f :

- Правая часть
- Начальные условия
- Граничные условия

Пример: начально-краевая задача для уравнения переноса

$$LU = \begin{cases} u_t + u_x, & 0 < x < l, \quad 0 < t < T \\ u(x, 0), & 0 \leq x \leq l \\ u(0, t), & 0 < t \leq T \end{cases}$$

$$f = \begin{cases} 0, & 0 < x < l, \quad 0 < t < T \\ \psi(x), & 0 \leq x \leq l \\ \phi(x), & 0 < t \leq T \end{cases}$$

Операторное представление дифференциальной и конечно-разностной задач

$$LU = f$$

дифференциальная задача для ДУЧП

L

дифференциальный оператор

$$U(x, t)$$

неизвестная искомая функция

f

входные данные

$$(LU)_h = f_h$$

дифференциальная задача в узлах сетки

$$L_h U_h = f_h$$

конечно-разностная схема на точном
(неизвестном) решении

$$L_h u_h = f_h$$

конечно-разностная схема

u_h

сеточная функция, которую мы находим в
процессе решения по конечно-разностной схеме

Аппроксимация и порядок аппроксимации

Определение. Конечно-разностная схема *аппроксимирует* дифференциальную задачу на точном решении, если какая-либо норма разности $\| (LU)_h - L_h U_h \|$ стремится к нулю при $\tau, h \rightarrow 0$:

$$\| (LU)_h - L_h U_h \| \xrightarrow{\tau, h \rightarrow 0} 0.$$

Определение. Конечно-разностная схема *аппроксимирует* дифференциальную задачу на точном решении с порядком p по времени и порядком q по пространственной переменной, если какая-либо норма разности $\| (LU)_h - L_h U_h \|$ удовлетворяет равенству

$$\| (LU)_h - L_h U_h \| = O(\tau^p + h^q).$$

Пример нормы сеточной функции:

$$\| u^k \| = \max_j |u_j^k|, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Устойчивость

Пусть входные данные получили возмущения: $f \rightarrow \tilde{f}_h$.

Тогда сеточная функция также получит возмущение: $u \rightarrow \tilde{u}_h$.

Определение. Конечно-разностная схема *устойчива по входным данным*, если найдется такая ограниченная константа $K > 0$, не зависящая от сеточных характеристик τ , h и входных данных f_h , что выполняется неравенство

$$\|u_h - \tilde{u}_h\| \leq K \|f_h - \tilde{f}_h\|.$$

Если в f_h входят только начальные или только краевые условия, или только правые части, то говорят об устойчивости соответственно *по начальным условиям*, *по краевым условиям* или *по правым частям*.

Устойчивость

Определение. Конечно-разностная схема *абсолютно (безусловно) устойчива*, если неравенство $\|u_h - \tilde{u}_h\| \leq K \|f_h - \tilde{f}_h\|$ выполняется при любых значениях сеточных характеристик τ и h .

Определение. Конечно-разностная схема *условно устойчива*, если неравенство $\|u_h - \tilde{u}_h\| \leq K \|f_h - \tilde{f}_h\|$ выполняется для сеточных характеристик τ и h , на которые накладываются определенные ограничения.

Сходимость и порядок сходимости

Определение. Решение u_h , полученное с помощью конечно-разностной схемы, сходится к точному решению U , если какая-либо норма разности $\|U - u_h\|$ стремится к нулю при стремлении к нулю сеточных характеристик τ, h :

$$\|U - u_h\| \xrightarrow{\tau, h \rightarrow 0} 0.$$

Определение. Конечно-разностная схема имеет p -й порядок сходимости (порядок точности) по времени и q -й порядок сходимости по пространственной переменной, если какая-либо норма разности $\|U - u_h\|$ удовлетворяет равенству

$$\|U - u_h\| = O(\tau^p + h^q).$$

Порядок сходимости (порядок точности) характеризует близость конечно-разностного и точного (неизвестного) решения.

Теорема эквивалентности

Теорема. Если конечно-разностная схема аппроксимирует на точном решении дифференциальную задачу с p -м порядком по времени и q -м порядком по пространственной переменной и эта схема устойчива, то разностное решение сходится к решению дифференциальной задачи с p -м порядком по времени и q -м порядком по пространственной переменной

Доказательство:

Действительно, $L_h u_h = f_h$ и $(LU)_h = f_h$, поэтому $L_h u_h = (LU)_h$, и следующая цепочка доказывает теорему:

$$\|u_h - U_h\| \leq K \|L_h u_h - L_h U_h\| = K \|(LU)_h - L_h U_h\| = O(\tau^p + h^q),$$

где первое неравенство записано по условию устойчивости, а последнее равенство – по условию аппроксимации.

Консервативность

Все ДУЧП выведены на основе физических законов сохранения какой-либо субстанции (массы, энергии, импульса и т.п.). Заменяя дифференциальную задачу конечно-разностной схемой, можно нарушить эти законы сохранения.

Определение. Конечно-разностная схема *консервативна*, если для нее выполняются законы сохранения, на основе которых поставлена дифференциальная задача.

В противном случае конечно-разностная схема является *неконсервативной*, т.е. решение, полученное на ее основе, не соответствует решению дифференциальной задачи - решается другая задача. Поэтому неконсервативными схемами пользоваться не рекомендуется.

Корректность

Определение. Дифференциальная задача *поставлена корректно*, если выполнены следующие два условия:

- 1) задача однозначно разрешима при любых входных данных;
- 2) решение задачи непрерывно зависит от входных данных.

Определение. Конечно-разностная задача *поставлена корректно*, если при любых достаточно малых шагах τ и h сетки выполнены условия:

- 1) решение u_h существует и единственно при всех входных данных из некоторого допустимого семейства;
- 2) решение u_h непрерывно зависит от входных данных f_h , причем эта зависимость *равномерна* относительно величины шагов сетки, т.е. конечно-разностная схема устойчива.

Анализ устойчивости разностных схем для уравнения переноса

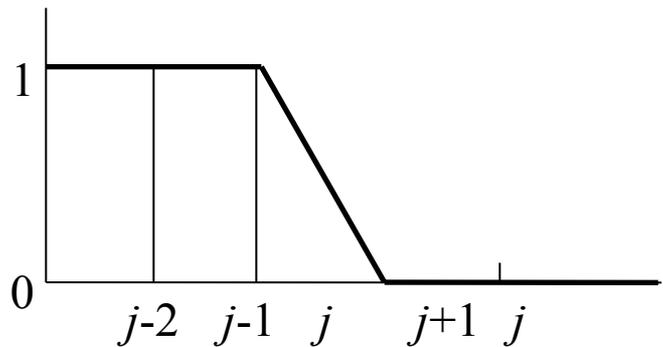
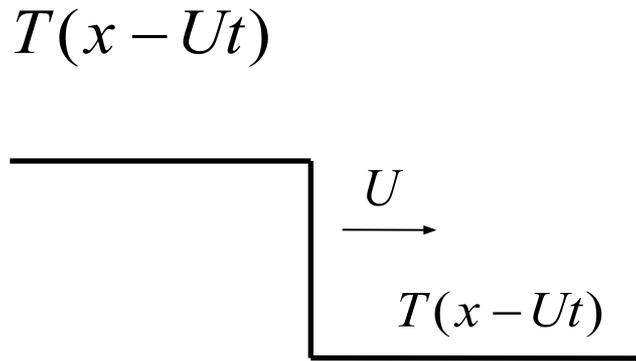
$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

уравнение переноса – ДУЧП первого порядка

общее решение: начальный профиль сдвигается вправо со скоростью U

начальный профиль в виде “ступеньки”

представление начального профиля на сетке



Анализ устойчивости разностных схем для уравнения переноса

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

уравнение переноса

$$\omega_{\Delta x, \Delta t} = \left\{ x_j = j\Delta x, j = 0 \boxtimes J; t^k = k\Delta t, k = 0 \boxtimes N \right\}$$

сетка

$$\frac{\partial T_j^k}{\partial t} = \frac{T_j^{k+1} - T_j^k}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

аппроксимация производной по времени

$$\frac{\partial T_j^k}{\partial x} = \frac{T_j^k - T_{j-1}^k}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

варианты аппроксимации
пространственной производной

$$\frac{\partial T_j^k}{\partial x} = \frac{T_{j+1}^k - T_j^k}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

Явная схема “против” потока

$$\frac{T_j^{k+1} - T_j^k}{\Delta t} + U \frac{T_j^k - T_{j-1}^k}{\Delta x} = 0$$

$$T_j^{k+1} = T_j^k - S[T_j^k - T_{j-1}^k] = (1 - S)T_j^k + ST_{j-1}^k$$

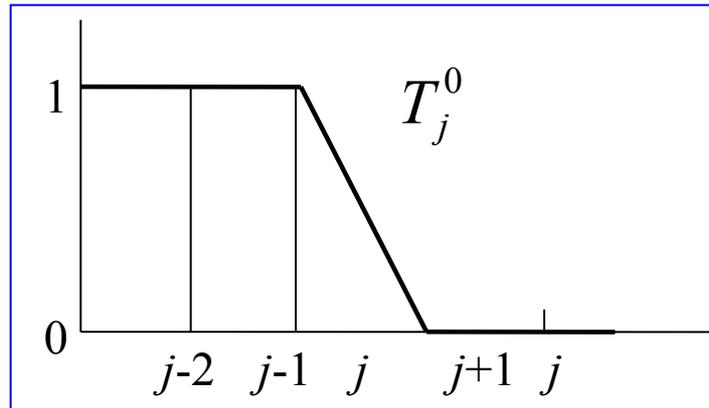
$$S = \frac{U\Delta t}{\Delta x}$$

$$T_j^1 = (1 - S)T_j^0 + ST_{j-1}^0$$

$$T_j^2 = (1 - S)T_j^1 + ST_{j-1}^1 =$$

$$= (1 - S)[(1 - S)T_j^0 + ST_{j-1}^0] + S[(1 - S)T_{j-1}^0 + ST_{j-2}^0] =$$

$$= (1 - S)^2 T_j^0 + 2S(1 - S)T_{j-1}^0 + S^2 T_{j-2}^0$$



Анализ устойчивости схемы “против” потока

$$S = \frac{U\Delta t}{\Delta x} = 1$$

$$T_j^{k+1} = (1 - S)T_j^k + ST_{j-1}^k = T_{j-1}^k$$

$$S < 1$$

$$T_{j-1}^1 = (1 - S)T_{j-1}^0 + ST_{j-2}^0 = 1,$$

$$T_j^1 = (1 - S)T_j^0 + ST_{j-1}^0 = S < 1,$$

$$T_{j+1}^1 = 0$$

$$S > 1$$

$$T_j^1 = S > 1$$

$$T_j^2 = 2S(1 - S) + S^2 = S[2 - 2S + S] = S[2 - S],$$

$$T_{j+1}^2 = S^2$$

$$0 \leq S \leq 1$$

условие устойчивости схемы “против” потока

Анализ устойчивости схемы “против” потока

$$S = \frac{U\Delta t}{\Delta x}$$

$$0 \leq S \leq 1$$

условие устойчивости схемы “против” потока

$$U_h = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

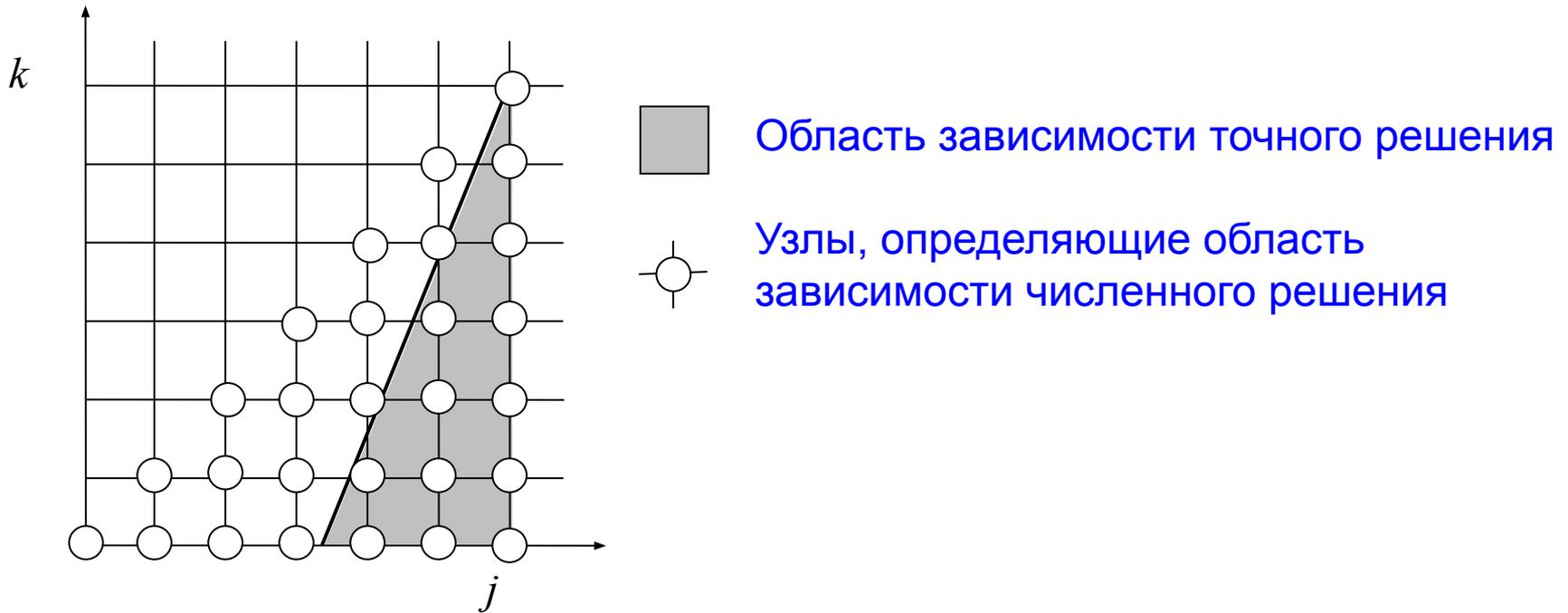
скорость распространения возмущения в конечно-разностной схеме

$$S = \frac{U}{U_h}$$

$$U_h \geq U$$

другая формулировка условия устойчивости:
скорость распространения схемного возмущения должна быть не меньше скорости распространения возмущения, определяемого физикой процессов

Критерий Куранта-Фридрихса-Леви



Критерий Куранта-Фридрихса-Леви:

Разностная схема устойчива, если область зависимости разностного решения содержит в себе область зависимости физического решения

Анализ устойчивости схемы “по потоку”

$$\frac{T_j^{k+1} - T_j^k}{\Delta t} + U \frac{T_{j+1}^k - T_j^k}{\Delta x} = 0$$

$$T_j^{k+1} = \left(1 + U \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) T_j^k - U \frac{\Delta t}{\Delta x} T_{j+1}^k = (1 + S) T_j^k - S T_{j+1}^k.$$

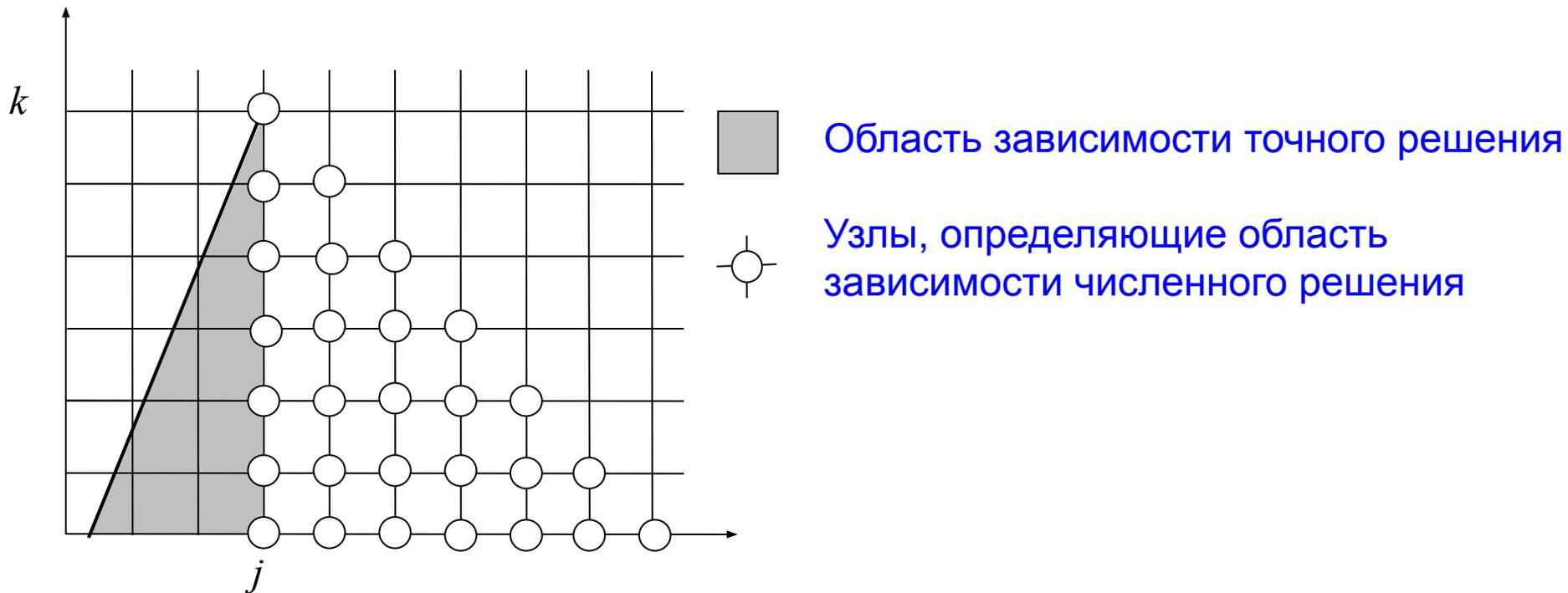


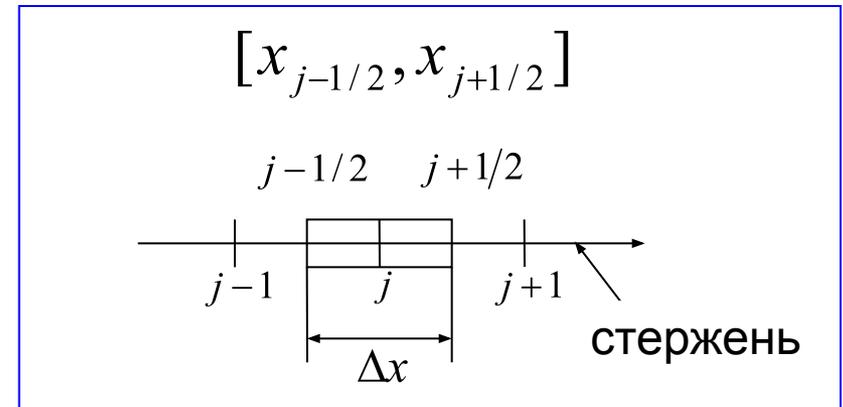
Схема “по потоку” является абсолютно неустойчивой

Интегро-интерполяционный метод

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} - a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \text{уравнение теплопроводности с конвекцией}$$

$$[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \quad x_{j-1/2} = 0.5(x_{j-1} + x_j); \quad x_{j+1/2} = 0.5(x_j + x_{j+1})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} T dx = -v_x T \Big|_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} + a^2 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}}$$



$$\frac{\partial}{\partial t} T_j^k \Delta x = -v_x (T_{j+1/2}^k - T_{j-1/2}^k) + a^2 \left[\frac{\partial T^k}{\partial x} \Big|_{x_{j+1/2}} - \frac{\partial T^k}{\partial x} \Big|_{x_{j-1/2}} \right] + O(\Delta x^2)$$

$$T_{j+1/2}^k = \frac{1}{2} (T_j^k + T_{j+1}^k) + O(\Delta x^2)$$

$$T_{j-1/2}^k = \frac{1}{2} (T_{j-1}^k + T_j^k) + O(\Delta x^2)$$

Интегро-интерполяционный метод

$$\left. \frac{\partial T^k}{\partial x} \right|_{x_{j+1/2}} = \frac{T_{j+1}^k - T_j^k}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$\left. \frac{\partial T^k}{\partial x} \right|_{x_{j-1/2}} = \frac{T_j^k - T_{j-1}^k}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T_j^k \approx \frac{T_j^{k+1} - T_j^k}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$\frac{T_j^{k+1} - T_j^k}{\Delta t} = -v_x \frac{T_{j+1}^k - T_{j-1}^k}{2\Delta x} + a^2 \frac{T_{j+1}^k - 2T_j^k + T_{j-1}^k}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2 + \Delta t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{j+1}^k - T_{j-1}^k}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{j+1}^k - 2T_j^k + T_{j-1}^k}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

Метод Неймана гармонического анализа устойчивости

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = Q$$

Неоднородное уравнение:

уравнение переноса с источником Q

точное решение

возмущение точного решения

подстановка решения с возмущением
в уравнение

Однородное уравнение
для возмущения

u

u'

$$\frac{\partial}{\partial t}(u + u') + a \frac{\partial}{\partial x}(u + u') = Q$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + a \frac{\partial u'}{\partial x} = 0$$

**При анализе устойчивости рассматривают
однородные уравнения для возмущений**

Метод Неймана гармонического анализа устойчивости

Гармоника: $e^{qt} e^{i\gamma x}$

Подставим гармонику в схему для однородного уравнения и потребуем, чтобы малые возмущения u' не возрастали для любых собственных чисел γ

Конечно-разностный аналог гармоники на сетке:

$$e^{qt} e^{i\gamma x} = e^{qk\Delta t} e^{ij\gamma\Delta x} = \left(e^{q\Delta t}\right)^k e^{ij\gamma\Delta x} = \boxed{\lambda^k e^{ij\alpha}}, \quad \alpha = \gamma\Delta x, \quad \lambda = e^{q\Delta t}$$

$$\boxed{u_j'^k = \lambda^k e^{ij\alpha}}$$

Необходимое условие устойчивости – отсутствие возрастания малых возмущений для всех собственных чисел:

$$\boxed{|\lambda| \leq 1 \quad \forall \alpha}$$

Анализ устойчивости разностных схем для уравнения переноса методом Неймана. Схема “против потока”

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + a \frac{\partial u'}{\partial x} = 0$$

уравнение переноса

$$\omega_{\Delta x, \Delta t} = \left\{ x_j = j\Delta x, j = 0 \boxtimes J; t^k = k\Delta t, k = 0 \boxtimes N \right\}$$

сетка

$$\frac{u_j'^{k+1} - u_j'^k}{\Delta t} + a \frac{u_j'^k - u_{j-1}'^k}{\Delta x} = 0$$

схема “против потока”

$$u_j'^{k+1} = u_j'^k - \sigma [u_j'^k - u_{j-1}'^k] = (1 - \sigma)u_j'^k + \sigma u_{j-1}'^k, \quad \sigma = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$$

$$u_j'^k = \lambda^k e^{ij\alpha}$$

гармоника

Анализ устойчивости разностных схем для уравнения переноса методом Неймана. Схема “против потока”

$$u_j'^{k+1} = (1 - \sigma)u_j'^k + \sigma u_{j-1}'^k \quad \text{схема “против потока”}$$

$$u_j'^k = \lambda^k e^{ij\alpha} \quad \text{гармоника}$$

$$\lambda^{k+1} e^{ij\alpha} = (1 - \sigma)\lambda^k e^{ij\alpha} + \sigma\lambda^k e^{i[j-1]\alpha}$$

$$\lambda e^{i\alpha} = (1 - \sigma)e^{i\alpha} + \sigma$$

$$\lambda = (1 - \sigma) + \sigma e^{-i\alpha} = 1 - \sigma + \sigma \cos \alpha - i\sigma \sin \alpha$$

Анализ устойчивости разностных схем для уравнения переноса методом Неймана. Схема “против потока”

$$\lambda = 1 - \sigma + \sigma \cos \alpha - i\sigma \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 &= (1 - \sigma + \sigma \cos \alpha)^2 + (\sigma \sin \alpha)^2 = \\ &= (1 - \sigma)^2 + 2(1 - \sigma)\sigma \cos \alpha + (\sigma \cos \alpha)^2 + (\sigma \sin \alpha)^2 = \\ &= (1 - \sigma)^2 + 2(1 - \sigma)\sigma \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) + \sigma^2 = 1 - 4\sigma(1 - \sigma) \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq 1 \quad \forall \alpha \end{aligned}$$

$$1 - 4\sigma(1 - \sigma) \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq 1$$

$$4\sigma(1 - \sigma) \geq 0$$

$$0 \leq \sigma \leq 1$$

условие устойчивости схемы “против потока”

Анализ устойчивости разностных схем для уравнения переноса методом Неймана. Схема “по потоку”

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + a \frac{\partial u'}{\partial x} = 0$$

уравнение переноса

$$\omega_{\Delta x, \Delta t} = \{x_j = j\Delta x, j = 0 \boxtimes J; t^k = k\Delta t, k = 0 \boxtimes N\}$$

сетка

$$\frac{u_j'^{k+1} - u_j'^k}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}'^k - u_j'^k}{\Delta x} = 0.$$

схема “по потоку”

$$u_j'^{k+1} = \left(1 + a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) u_j'^k - a \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{j+1}'^k = (1 + \sigma) u_j'^k - \sigma u_{j+1}'^k, \quad \sigma = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$$

$$u_j'^k = \lambda^k e^{ij\alpha}$$

гармоника

Анализ устойчивости разностных схем для уравнения переноса методом Неймана. Схема “по потоку”

$$u_j^{\prime k+1} = (1 + \sigma)u_j^{\prime k} - \sigma u_{j+1}^{\prime k}$$

схема “по потоку”

$$u_j^{\prime k} = \lambda^k e^{ij\alpha}$$

гармоника

Анализ устойчивости разностных схем для уравнения переноса методом Неймана. Схема “по потоку”

$$u_j^{\prime k+1} = (1 + \sigma)u_j^{\prime k} - \sigma u_{j+1}^{\prime k} \quad \text{схема “по потоку”}$$

$$u_j^{\prime k} = \lambda^k e^{ij\alpha} \quad \text{гармоника}$$

$$\lambda^{k+1} e^{ij\alpha} = (1 + \sigma)\lambda^k e^{ij\alpha} - \sigma\lambda^k e^{i[j+1]\alpha}$$

$$\lambda = (1 + \sigma) - \sigma e^{i\alpha} = (1 + \sigma - \sigma \cos \alpha) - i\sigma \sin \alpha$$

Анализ устойчивости разностных схем для уравнения переноса методом Неймана. Схема “по потоку”

$$\lambda = (1 + \sigma - \sigma \cos \alpha) - i\sigma \sin \alpha$$

$$|\lambda|^2 = (1 + \sigma)^2 - 2(1 + \sigma)\sigma \cos \alpha + \sigma^2 =$$

$$= (1 + \sigma)^2 - 2(1 + \sigma)\sigma \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) + \sigma^2 = 1 + 4\sigma(1 + \sigma) \sin^2 \frac{\alpha}{2} > 1$$

Условие устойчивости всегда не выполнено

Схема “по потоку” абсолютно неустойчивая

Анализ устойчивости разностных схем для уравнения переноса методом Неймана. Неявная схема

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + a \frac{\partial u'}{\partial x} = 0$$

уравнение переноса

$$\omega_{\Delta x, \Delta t} = \left\{ x_j = j\Delta x, j = 0 \boxtimes J; t^k = k\Delta t, k = 0 \boxtimes N \right\}$$

сетка

$$\frac{u_j'^{k+1} - u_j'^k}{\Delta t} = -a \frac{u_j'^{k+1} - u_{j-1}'^{k+1}}{\Delta x}$$

неявная схема “против потока”

$$(1 + \sigma)u_j'^{k+1} - \sigma u_{j-1}'^{k+1} = u_j'^k, \quad \sigma = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$$

$$u_j'^k = \lambda^k e^{ij\alpha}$$

гармоника

Анализ устойчивости разностных схем для уравнения переноса методом Неймана. Неявная схема

$$(1 + \sigma)u_j^{\prime k+1} - \sigma u_{j-1}^{\prime k+1} = u_j^{\prime k}$$

неявная схема
“против потока”

$$u_j^{\prime k} = \lambda^k e^{ij\alpha}$$

гармоника

Анализ устойчивости разностных схем для уравнения переноса методом Неймана. Неявная схема

$$(1 + \sigma)u_j^{\prime k+1} - \sigma u_{j-1}^{\prime k+1} = u_j^{\prime k}$$

неявная схема
“против потока”

$$u_j^{\prime k} = \lambda^k e^{ija}$$

гармоника

$$(1 + \sigma)\lambda^{k+1} e^{ija} - \sigma\lambda^{k+1} e^{i[j-1]\alpha} = \lambda^k e^{ija}$$

$$\lambda(1 + \sigma - \sigma e^{-i\alpha}) = 1$$

$$|\lambda|^2 = \frac{1}{1 + 4\sigma(1 + \sigma)\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \leq 1 \quad \forall \sigma$$

условие
устойчивости
всегда выполнено

Анализ устойчивости разностных схем для уравнения теплопроводности методом Неймана. Явная схема

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}$$

$$\omega_{h,\tau} = \{x_j = jh, j = 0 \dots N; t^k = k\tau, k = 0 \dots K\},$$

$$\frac{u_j'^{k+1} - u_j'^k}{\tau} = a^2 \frac{u_{j+1}'^k - 2u_j'^k + u_{j-1}'^k}{h^2} + O(\tau + h^2)$$

$$u_j'^{k+1} = \sigma u_{j-1}'^k + (1 - 2\sigma)u_j'^k + \sigma u_{j+1}'^k, \quad \sigma = \frac{a^2 \tau}{h^2}$$

$$u_j'^k = \lambda^k e^{ij\alpha}$$

Анализ устойчивости разностных схем для уравнения теплопроводности методом Неймана. Явная схема

$$u_j'^{k+1} = \sigma u_{j-1}'^k + (1 - 2\sigma)u_j'^k + \sigma u_{j+1}'^k$$

$$u_j'^k = \lambda^k e^{ij\alpha}$$

Анализ устойчивости разностных схем для уравнения теплопроводности методом Неймана. Явная схема

$$u_j'^{k+1} = \sigma u_{j-1}'^k + (1 - 2\sigma)u_j'^k + \sigma u_{j+1}'^k$$

$$u_j'^k = \lambda^k e^{ij\alpha}$$

$$\lambda^{k+1} e^{ij\alpha} = \sigma \lambda^k e^{i[j-1]\alpha} + (1 - 2\sigma)\lambda^k e^{ij\alpha} + \sigma \lambda^k e^{i[j+1]\alpha}$$

$$\lambda = \sigma(e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}) + (1 - 2\sigma) = 2\sigma \cos \alpha + 1 - 2\sigma =$$

$$= 1 - 4\sigma \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$-1 \leq 1 - 4\sigma \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq 1 \Rightarrow \sigma = \frac{a^2 \tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

Условие
устойчивости
явной
схемы

Анализ устойчивости разностных схем для уравнения теплопроводности методом Неймана. Неявная схема

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}$$

$$\omega_{h,\tau} = \{x_j = jh, j = 0 \dots N; t^k = k\tau, k = 0 \dots K\},$$

$$\frac{u_j'^{k+1} - u_j'^k}{\tau} = a^2 \frac{u_{j+1}'^{k+1} - 2u_j'^{k+1} + u_{j-1}'^{k+1}}{h^2} + O(\tau + h^2)$$

$$-\sigma u_{j-1}'^{k+1} + (1 + 2\sigma)u_j'^{k+1} - \sigma u_{j+1}'^{k+1} = u_j'^k, \quad \sigma = \frac{a^2 \tau}{h^2}$$

$$u_j'^k = \lambda^k e^{ij\alpha}$$

Анализ устойчивости разностных схем для уравнения теплопроводности методом Неймана. Неявная схема

$$-\sigma u'_{j-1}{}^{k+1} + (1 + 2\sigma)u'_j{}^{k+1} - \sigma u'_{j+1}{}^{k+1} = u'_j{}^k$$

$$u'_j{}^k = \lambda^k e^{ija}$$

Анализ устойчивости разностных схем для уравнения теплопроводности методом Неймана. Неявная схема

$$-\sigma u'_{j-1}{}^{k+1} + (1 + 2\sigma)u'_j{}^{k+1} - \sigma u'_{j+1}{}^{k+1} = u'_j{}^k$$

$$u'_j{}^k = \lambda^k e^{ij\alpha}$$

$$-\sigma \lambda^{k+1} e^{i[j-1]\alpha} + (1 + 2\sigma) \lambda^{k+1} e^{ij\alpha} - \sigma \lambda^{k+1} e^{i[j+1]\alpha} = \lambda^k e^{ij\alpha}$$

$$\lambda = \frac{1}{-\sigma(e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}) + (1 + 2\sigma)} =$$

$$= \frac{1}{-2\sigma \cos \alpha + 1 + 2\sigma} = \frac{1}{1 + 4\sigma \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \leq 1$$

Неявная
схема
абсолютно
устойчива

Анализ устойчивости разностных схем для волнового уравнения методом Неймана. Явная схема

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}$$

$$\omega_{h,\tau} = \{x_j = jh, j = 0 \dots N; t^k = k\tau, k = 0 \dots K\},$$

$$\frac{u_j'^{k+1} - 2u_j'^k + u_j'^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}'^k - 2u_j'^k + u_{j-1}'^k}{h^2} + O(\tau^2 + h^2)$$

$$u_j'^k = \lambda^k e^{ij\alpha}$$

Анализ устойчивости разностных схем для волнового уравнения методом Неймана. Явная схема

$$\lambda^2 - 2(1 - 2\sigma m) + 1 = 0, \quad \sigma = \frac{a^2 \tau^2}{h^2}, \quad m = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = (1 - 2\sigma m) \pm \sqrt{(1 - 2\sigma m)^2 - 1}$$

$$\left| (1 - 2\sigma m) \pm \sqrt{(1 - 2\sigma m)^2 - 1} \right| \leq 1$$

$$-1 \leq (1 - 2\sigma m) \pm \sqrt{(1 - 2\sigma m)^2 - 1} \leq 1$$

Правое неравенство
выполнено всегда

$$\pm \sqrt{(\sigma m - 1)\sigma m} \geq \sigma m - 1$$

$$\sigma = \frac{a^2 \tau^2}{h^2} \leq 1$$

Условие устойчивости явной схемы

Анализ устойчивости разностных схем для волнового уравнения методом Неймана. Неявная схема

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}$$

$$\omega_{h,\tau} = \{x_j = jh, j = 0 \dots N; t^k = k\tau, k = 0 \dots K\},$$

$$\frac{u_j'^{k+1} - 2u_j'^k + u_j'^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}'^{k+1} - 2u_j'^{k+1} + u_{j-1}'^{k+1}}{h^2} + O(\tau + h^2)$$

$$u_j'^k = \lambda^k e^{ij\alpha}$$

Анализ устойчивости разностных схем для волнового уравнения методом Неймана. Неявная схема

$$\lambda^2(1 + 4\sigma m) - 2\lambda + 1 = 0, \quad \sigma = \frac{a^2 \tau^2}{h^2}, \quad m = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{1 + 4\sigma m} \pm i \frac{2\sqrt{\sigma m}}{1 + 4\sigma m}$$

$$|\lambda_{1,2}| = \frac{\sqrt{1 + 4\sigma m}}{1 + 4\sigma m} \leq 1$$

Неявная схема абсолютно устойчива

Неявно-явные схемы с весами. Схема Кранка-Николсона

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_x u + f$$

ДУЧП параболического типа
(эволюционное уравнение)

L_x

оператор, содержащий
пространственные производные

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} = L_x u^k + f^k + O(\tau)$$

явная схема

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} = L_x u^{k+1} + f^{k+1} + O(\tau)$$

неявная схема

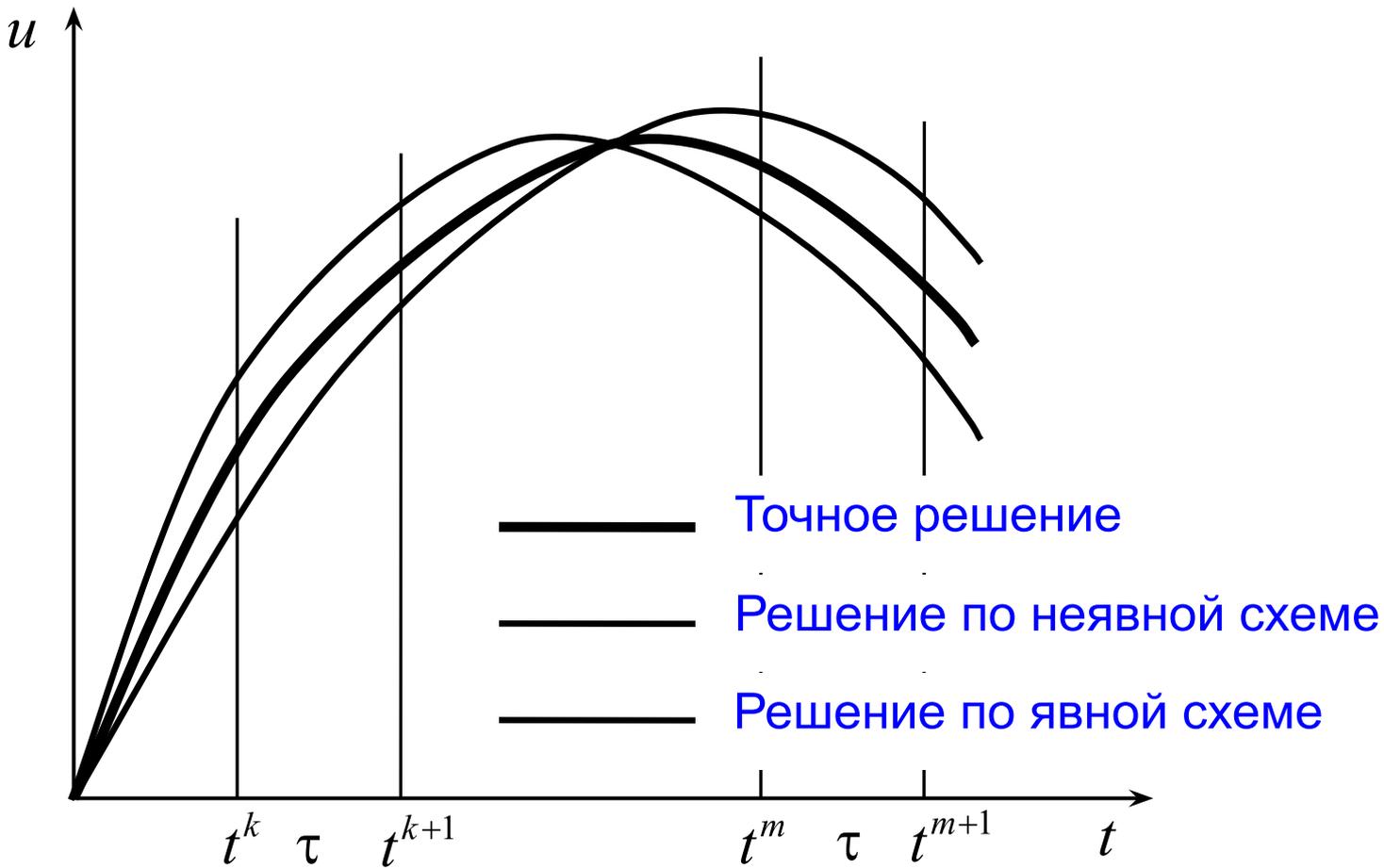
$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} = \theta (L_x u^{k+1} + f^{k+1}) + (1 - \theta) (L_x u^k + f^k)$$

неявно-явная
схема с весами

$$\theta, (1 - \theta); \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

веса

Неявно-явные схемы с весами. Схема Кранка-Николсона



Неявно-явные схемы с весами. Схема Кранка-Николсона

$$\theta \neq 1/2$$

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} = \theta (L_x u^{k+1} + f^{k+1}) + (1 - \theta) (L_x u^k + f^k) + O(\tau)$$

НЕЯВНО-ЯВНАЯ
СХЕМА С ВЕСАМИ

$$\theta = 1/2$$

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} = \frac{1}{2} (L_x u^{k+1} + f^{k+1}) + \frac{1}{2} (L_x u^k + f^k) + O(\tau^2)$$

Схема
Кранка-
Николсона



$$\frac{\partial u}{\partial t} (t^{k+1/2})$$

$$\frac{1}{2} (RHS^{k+1} + RHS^k)$$

Схема с весами для уравнения теплопроводности

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \theta a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + (1 - \theta) a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}$$

$$|\lambda| < \left| \frac{1 - 4\sigma(1 - \theta)}{1 + 4\sigma\theta} \right| \leq 1$$

условие устойчивости

$$1/2 \leq \theta \leq 1$$

абсолютная устойчивость

$$0 \leq \theta < 1/2$$

условная устойчивость

$$\theta \neq 1/2 : O(\tau + h^2)$$

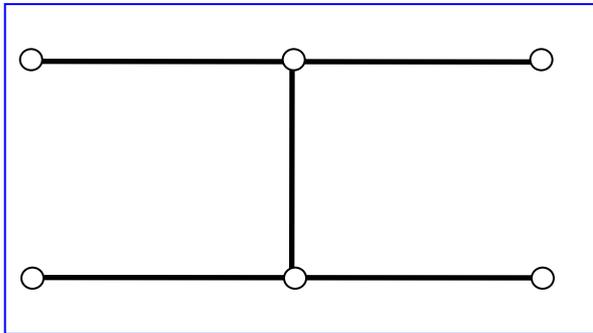
точность схемы

$$\theta = 1/2 : O(\tau^2 + h^2)$$

Схема Кранка-Николсона для уравнения теплопроводности

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \frac{1}{2} a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + \frac{1}{2} a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O(\tau^2 + h^2)$$

$\theta = 1/2$  $\left\{ \begin{array}{l} \text{схема является абсолютно устойчивой} \\ \text{точность схемы } O(\tau^2 + h^2) \end{array} \right.$



шаблон схемы

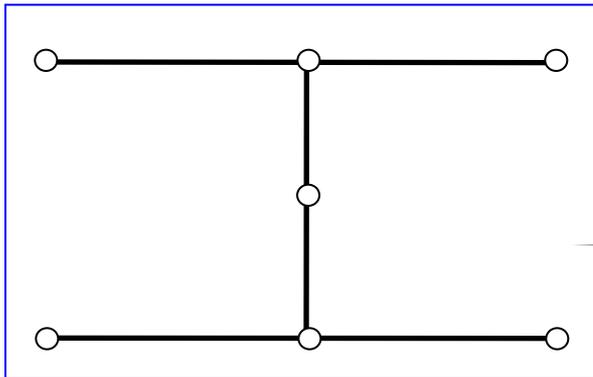
Получение решения по схеме Кранка-Николсона не сложнее, чем по обычной неявной схеме. Применяется метод прогонки.

Схема Кранка-Николсона для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

$$\frac{u_j^{k+1} + 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = \frac{1}{2} \left[a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + b \frac{u_{j+1}^{k+1} - u_{j-1}^{k+1}}{2h} + cu_j^{k+1} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[a^2 \frac{u_{j+1}^{k-1} - 2u_j^{k-1} + u_{j-1}^{k-1}}{h^2} + b \frac{u_{j+1}^{k-1} - u_{j-1}^{k-1}}{2h} + cu_j^{k-1} \right] + O(\tau^2 + h^2)$$



шаблон схемы

$$\theta = 1/2 \quad \Rightarrow$$

схема является абсолютно устойчивой

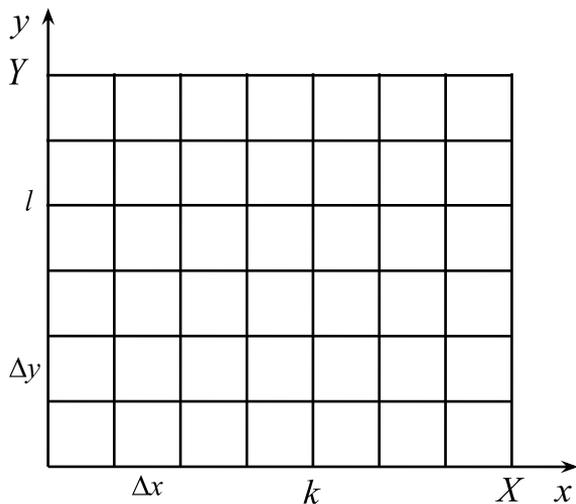
точность схемы $O(\tau^2 + h^2)$

Многомерные задачи. Явные и неявные схемы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad 0 < x < X, \quad 0 < y < Y, \quad 0 \leq t \leq T$$

двумерное
уравнение
теплопроводности

$$\omega_{\Delta x, \Delta y, \Delta t} = \left\{ x_k = k\Delta x, k = 0 \boxtimes K; y_l = l\Delta y, l = 0 \boxtimes L; t^n = n\Delta t, n = 0 \boxtimes N \right\}$$



сетка по пространственным переменным
в прямоугольной области

$$\mathbf{u}^{n+1} = \left(u_{0,0}^{n+1}, u_{1,0}^{n+1}, \boxtimes, u_{K,0}^{n+1}, u_{0,1}^{n+1}, u_{1,1}^{n+1}, \boxtimes, u_{K,1}^{n+1}, \boxtimes, u_{0,L}^{n+1}, u_{1,L}^{n+1}, \boxtimes, u_{K,L}^{n+1} \right)^T \text{ вектор}$$

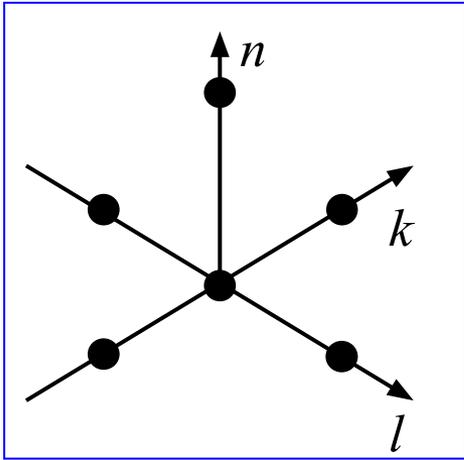
НЕИЗВЕСТНЫХ

Явная схема

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t L_h(u^n) u^n$$

явная схема, операторное представление

$$L_h(u_{k,l}^n) u_{k,l}^n = a^2 \left[\frac{u_{k-1,l}^n - 2u_{k,l}^n + u_{k+1,l}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{k,l-1}^n - 2u_{k,l}^n + u_{k,l+1}^n}{\Delta y^2} \right]$$



шаблон
явной схемы

$$u'^n = \lambda^n \exp[i(\alpha_x k + \alpha_y l)]$$

гармоника для
анализа устойчивости

$$a^2 \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \leq \frac{1}{2}$$

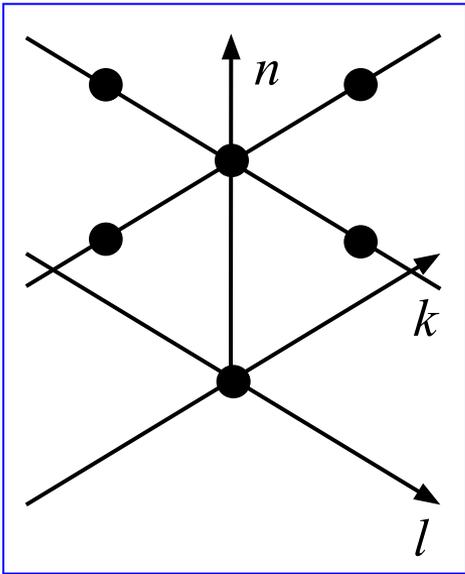
условие устойчивости

Неявная схема

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t L_h(u^{n+1}) u^{n+1} \quad \text{неявная схема, операторное представление}$$

$$L_h(u_{k,l}^{n+1}) u_{k,l}^{n+1} = a^2 \left[\frac{u_{k-1,l}^{n+1} - 2u_{k,l}^{n+1} + u_{k+1,l}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{k,l-1}^{n+1} - 2u_{k,l}^{n+1} + u_{k,l+1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right]$$

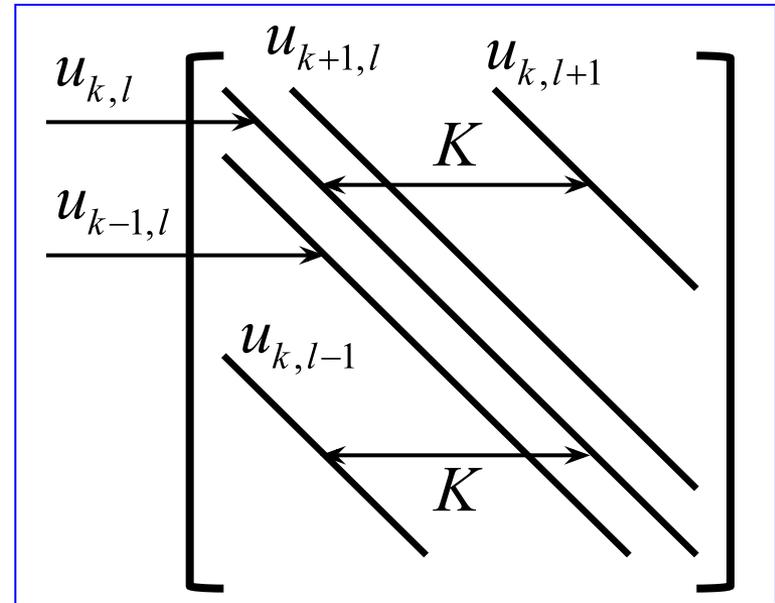
$$u^{n+1} = \left(u_{0,0}^{n+1}, u_{1,0}^{n+1}, \dots, u_{K,0}^{n+1}, u_{0,1}^{n+1}, u_{1,1}^{n+1}, \dots, u_{K,1}^{n+1}, \dots, u_{0,L}^{n+1}, u_{1,L}^{n+1}, \dots, u_{K,L}^{n+1} \right)^T \quad \text{вектор НЕИЗВЕСТНЫХ}$$



шаблон
неявной схемы

Неявная схема
абсолютно
устойчива,
но получение
решения -
трудоемко

Схема не является
экономичной



структура
матрицы системы

Экономичность разностных схем. Методы расщепления

Определение. Конечно-разностную схему будем называть *экономичной*, если число длинных операций (типа умножения) пропорционально числу узлов сетки.

Явные схемы для многомерных задач – экономичные, но условно устойчивые

Неявные схемы для многомерных задач - абсолютно устойчивые, но не экономичные

Для обеспечения экономичности неявных схем применяют методы расщепления.

В методах расщепления неэкономичный оператор переписывают в виде произведения более простых экономичных операторов, т.е. факторизуют.

Методы расщепления

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t L_h(u^{n+1}) u^{n+1}$$

ПОЛНОСТЬЮ НЕЯВНАЯ СХЕМА

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = L_{hx} u^{n+1} + L_{hy} u^{n+1} + O(\Delta t)$$

$$L_{hx} u_{k,l}^{n+1} = a^2 \frac{u_{k-1,l}^{n+1} - 2u_{k,l}^{n+1} + u_{k+1,l}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

$$L_{hy} u_{k,l}^{n+1} = a^2 \frac{u_{k,l-1}^{n+1} - 2u_{k,l}^{n+1} + u_{k,l+1}^{n+1}}{\Delta y^2}$$

$$\frac{\Delta u^{n+1}}{\Delta t} = L_{hx} (u^n + \Delta u^{n+1}) + L_{hy} (u^n + \Delta u^{n+1}) + O(\Delta t), \quad \Delta u^{n+1} = u^{n+1} - u^n$$

$$(E - \Delta t(L_{hx} + L_{hy})) \frac{\Delta u^{n+1}}{\Delta t} = (L_{hx} + L_{hy}) u^n + O(\Delta t)$$

$$(E - \Delta t(L_{hx} + L_{hy})) \rightarrow (E - \Delta t L_{hx})(E - \Delta t L_{hy})$$

Методы расщепления

$$(E - \Delta t L_{hx})(E - \Delta t L_{hy}) = (E - \Delta t(L_{hx} + L_{hy})) + \boxed{\Delta t^2 L_{hx} L_{hy}}$$

← ошибка расщепления

$$(E - \Delta t(L_{hx} + L_{hy})) \frac{\Delta u^{n+1}}{\Delta t} = (L_{hx} + L_{hy}) u^n + O(\Delta t)$$



$$(E - \Delta t L_{hx})(E - \Delta t L_{hy}) \frac{\Delta u^{n+1}}{\Delta t} = (L_{hx} + L_{hy}) u^n + \boxed{\Delta t^2 L_{hx} L_{hy} \frac{\Delta u^{n+1}}{\Delta t}} + O(\Delta t)$$

$$\Delta u^{n+1/2} = (E - \Delta t L_{hy}) \Delta u^{n+1}$$

$$\left[\begin{array}{l} (E - \Delta t L_{hx}) \frac{\Delta u^{n+1/2}}{\Delta t} = (L_{hx} + L_{hy}) u^n \\ (E - \Delta t L_{hy}) \frac{\Delta u^{n+1}}{\Delta t} = \frac{\Delta u^{n+1/2}}{\Delta t} \end{array} \right.$$

Методы расщепления

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = L_{hx} u^{n+1} + L_{hy} u^{n+1} \iff \boxed{\Delta u^{n+1}} = \boxed{\Delta t(L_{hx} + L_{hy})u^{n+1}}$$

исходная схема

$$\Delta u^{n+1/2} = \boxed{\Delta t(L_{hx} + L_{hy})u^n} + \Delta t L_{hx} \Delta u^{n+1/2}$$

$$\Delta u^{n+1} = \Delta u^{n+1/2} + \Delta t L_{hy} \Delta u^{n+1}$$

$$\Delta u^{n+1/2} = \boxed{\Delta u^n} + \Delta t L_{hx} \Delta u^{n+1/2}$$

$$\Delta u^{n+1} = \Delta u^{n+1/2} + \Delta t L_{hy} \Delta u^{n+1}$$

оба этапа могут быть реализованы **методом прогонки**, что обеспечивает **экономичность** метода расщепления

$$n = 0: \quad \boxed{\Delta u^0} = \boxed{\Delta t(L_{hx} + L_{hy})u^0}$$

$n \geq 1$: Δu^n - результат с предыдущего временном слоя

На первом этапе - метод прогонки для каждого отсчета по переменной y (для всех l), на втором - для каждого отсчета по x (для всех k)

Методы расщепления

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = L_{hx} u^{n+1} + L_{hy} u^{n+1} \iff \boxed{\Delta u^{n+1}} = \boxed{\Delta t(L_{hx} + L_{hy})u^{n+1}}$$

ИСХОДНАЯ СХЕМА

$$\Delta u^{n+1/2} = \boxed{\Delta t(L_{hx} + L_{hy})u^n} + \Delta t L_{hx} \Delta u^{n+1/2}$$

$$\Delta u^{n+1} = \Delta u^{n+1/2} + \Delta t L_{hy} \Delta u^{n+1}$$

$$\Delta u^{n+1/2} = \boxed{\Delta u^n} + \Delta t L_{hx} \Delta u^{n+1/2}$$

$$\Delta u^{n+1} = \Delta u^{n+1/2} + \Delta t L_{hy} \Delta u^{n+1}$$

$$\begin{cases} (E - \Delta t L_{hx}) \frac{\Delta u^{n+1/2}}{\Delta t} = (L_{hx} + L_{hy}) u^n \\ (E - \Delta t L_{hy}) \frac{\Delta u^{n+1}}{\Delta t} = \frac{\Delta u^{n+1/2}}{\Delta t} \end{cases}$$

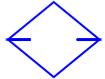
$$n = 0: \quad \boxed{\Delta u^0} = \boxed{\Delta t(L_{hx} + L_{hy})u^0}$$

$n \geq 1$: Δu^n - результат с предыдущего временном слоя

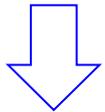
На первом этапе - метод прогонки для каждого отсчета по переменной y (для всех l), на втором - для каждого отсчета по x (для всех k)

Метод расщепления по физическим процессам

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = (L_1 + L_2 + \dots + L_M)u^{n+1}$$



$$[E - \Delta t(L_1 + L_2 + \dots + L_M)]\Delta u^{n+1} = \Delta t(L_1 + L_2 + \dots + L_M)u^n$$



Расщепление

Ошибка имеет второй порядок по шагу по времени

$$(E - \Delta tL_1)(E - \Delta tL_2)\dots(E - \Delta tL_M)\Delta u^{n+1} = \Delta t(L_1 + L_2 + \dots + L_M)u^n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (E - \Delta tL_1)\Delta u^{n+1/M} = \Delta t(L_1 + L_2 + \dots + L_M)u^n \\ (E - \Delta tL_2)\Delta u^{n+2/M} = \Delta u^{n+1/M} \\ (E - \Delta tL_3)\Delta u^{n+3/M} = \Delta u^{n+2/M} \\ \boxtimes \\ (E - \Delta tL_M)\Delta u^{n+1} = \Delta u^{n+(M-1)/M} \end{array} \right.$$

Метод реализуется
за M этапов

Метод переменных направлений

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\Delta t/2} = L_{hx} u^{n+1/2} + L_{hy} u^n \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\Delta t/2} = L_{hx} u^{n+1/2} + L_{hy} u^{n+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = L_{hx} u^{n+1/2} + \frac{1}{2} L_{hy} (u^n + u^{n+1}) \\ \frac{u^{n+1} + u^n - 2u^{n+1/2}}{\Delta t/2} = L_{hy} (u^{n+1} - u^n) \Rightarrow u^{n+1/2} = \frac{u^n + u^{n+1}}{2} - \frac{\Delta t^2}{2} L_{hy} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \end{cases}$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} L_{hx} (u^n + u^{n+1}) + \frac{1}{2} L_{hy} (u^n + u^{n+1}) - \frac{\Delta t^2}{2} L_{hx} L_{hy} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + O(\Delta t^2)$$

$$O(\Delta t^2)$$

Метод дробных шагов

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\Delta t} = L_{hx} u^{n+1/2} \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\Delta t} = L_{hy} u^{n+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (E - \Delta t L_{hx}) u^{n+1/2} = u^n \\ (E - \Delta t L_{hy}) u^{n+1} = u^{n+1/2} \end{cases}$$

$$(E - \Delta t L_{hx})(E - \Delta t L_{hy}) u^{n+1} = u^n$$

$$(E - \Delta t(L_{hx} + L_{hy}) + \Delta t^2 L_{hx} L_{hy}) u^{n+1} = u^n$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = (L_{hx} + L_{hy}) u^{n+1} - \Delta t L_{hx} L_{hy} u^{n+1}$$

Фурье-метод расщепления по физическим процессам

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\alpha}{2} A + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} = i\gamma \left[|A|^2 A - a_1 \frac{\partial}{\partial T} (|A|^2 A) - a_2 A \frac{\partial |A|^2}{\partial T} \right].$$

$$T = t - z/v_g = t - \beta_1 z$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = (\hat{D} + \hat{N})A$$

$$\hat{D} = -\frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial T^2} + \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3}{\partial T^3} - \frac{\alpha}{2}$$

$$\hat{N} = i\gamma \left[|A|^2 - \frac{a_1}{A} \frac{\partial}{\partial T} (|A|^2 A) - a_2 \frac{\partial |A|^2}{\partial T} \right]$$

Линейный шаг – применение преобразования Фурье

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \hat{D}A; \quad \hat{D} = -\frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2}{\partial T^2} + \frac{1}{6}\beta_3 \frac{\partial^3}{\partial T^3} - \frac{\alpha}{2}$$

$$A(z+h, T) = \exp(h\hat{D})A(z, T)$$

$$\exp(h\hat{D}) = \Phi^{-1} \exp[h\hat{D}(i\omega)]\Phi$$

$$G(z, \omega) = \Phi[A(z, T)] = \int_{-\infty}^{+\infty} A(z, T) \exp[i(\omega - \omega_0)T] dT$$

$$A(z, T) = \Phi^{-1}[G(z, \omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(z, \omega) \exp[-i(\omega - \omega_0)T] d\omega$$

$$\hat{D}(i\omega) = \frac{i}{2}\beta_2 (\omega - \omega_0)^2 + \frac{i}{6}\beta_3 (\omega - \omega_0)^3 - \frac{\alpha}{2}$$

Нелинейный шаг – схема Кранка-Николсона

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \hat{N}(A)A; \quad \hat{N} = i\gamma \left[|A|^2 - \frac{a_1}{A} \frac{\partial}{\partial T} (|A|^2 A) - a_2 \frac{\partial |A|^2}{\partial T} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{A(z+h, T) - A(z, T)}{h} &= \\ &= \frac{1}{2} \left[\hat{N}(A(z+h, T))A(z+h, T) + \hat{N}(A(z, T))A(z, T) \right] + O(h^2) \end{aligned}$$

$$A^{(1)}(z+h, T) = A(z, T) + h\hat{N}(A(z, T))A(z, T)$$

$$\begin{aligned} A^{(2)}(z+h, T) &= \\ &= A(z, T) + \frac{1}{2} h \left[\hat{N}(A^{(1)}(z+h, T))A^{(1)}(z+h, T) + \hat{N}(A(z, T))A(z, T) \right] \end{aligned}$$

Фурье-метод расщепления по физическим процессам

Только дисперсия

Только нелинейность

