

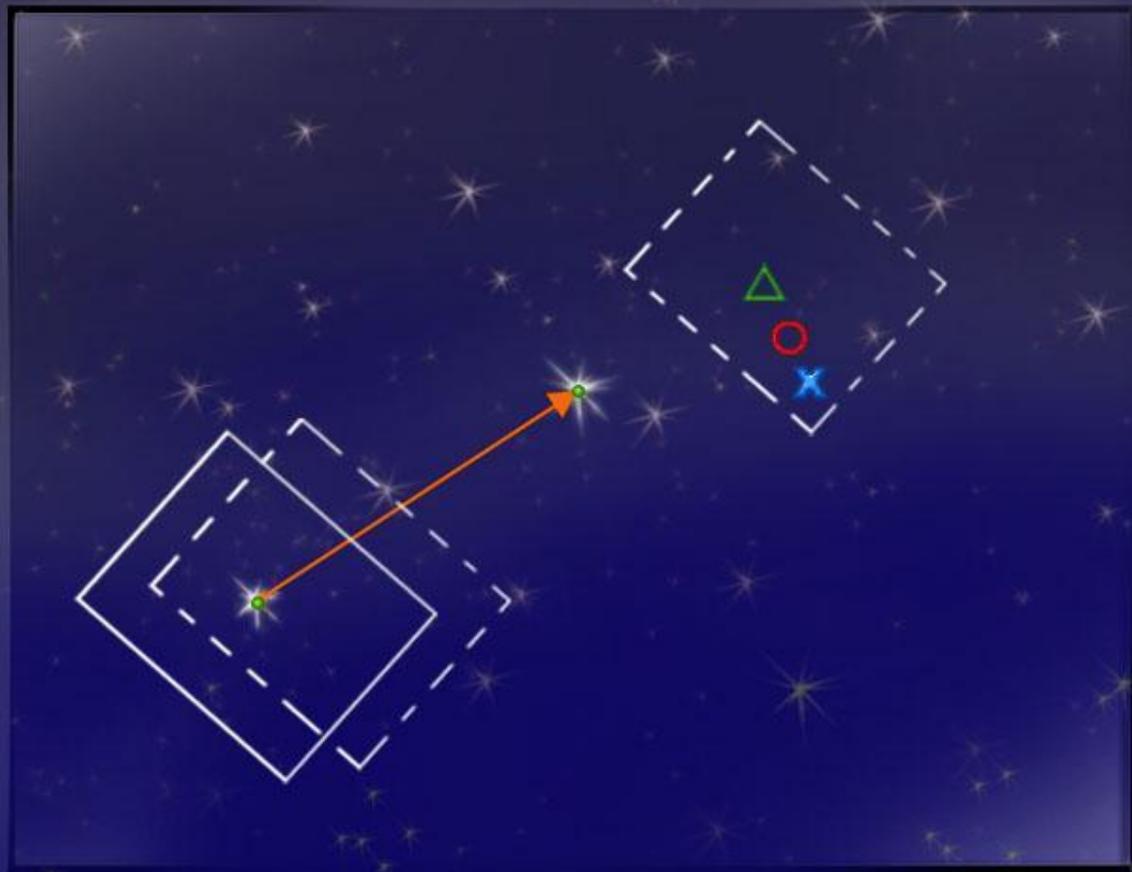
# Динамическое описание систем

## Фильтрация Калмана

# Содержание

<u>1. Фильтрация Калмана. Введение</u>	3
<u>2. Анализ свойств Фильтра Калмана</u>	9
• <u>2.1 Фильтрация медленных процессов</u>	
<u>3. Модель нормального функционирования системы передачи информации</u>	
<u>4. Модель системы управления</u>	11
<u>5. Основные особенности фильтра Калмана</u>	15
<u>6. Вычислительная схема Фильтра Калмана</u>	16
<u>7. Динамика обработки информации</u> <u>+Пример реализации фильтра Калмана</u>	17





**Схема обработки  
фильтром**

**ИСХ. ДАННЫЕ:**

2 исходные оценки  
(зеленые точки)

МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ –  
вектор скорости  
позволяет указать  
центр строга

□      Δ

**РЕКУРРЕНТНАЯ  
ОБРАБОТКА:**

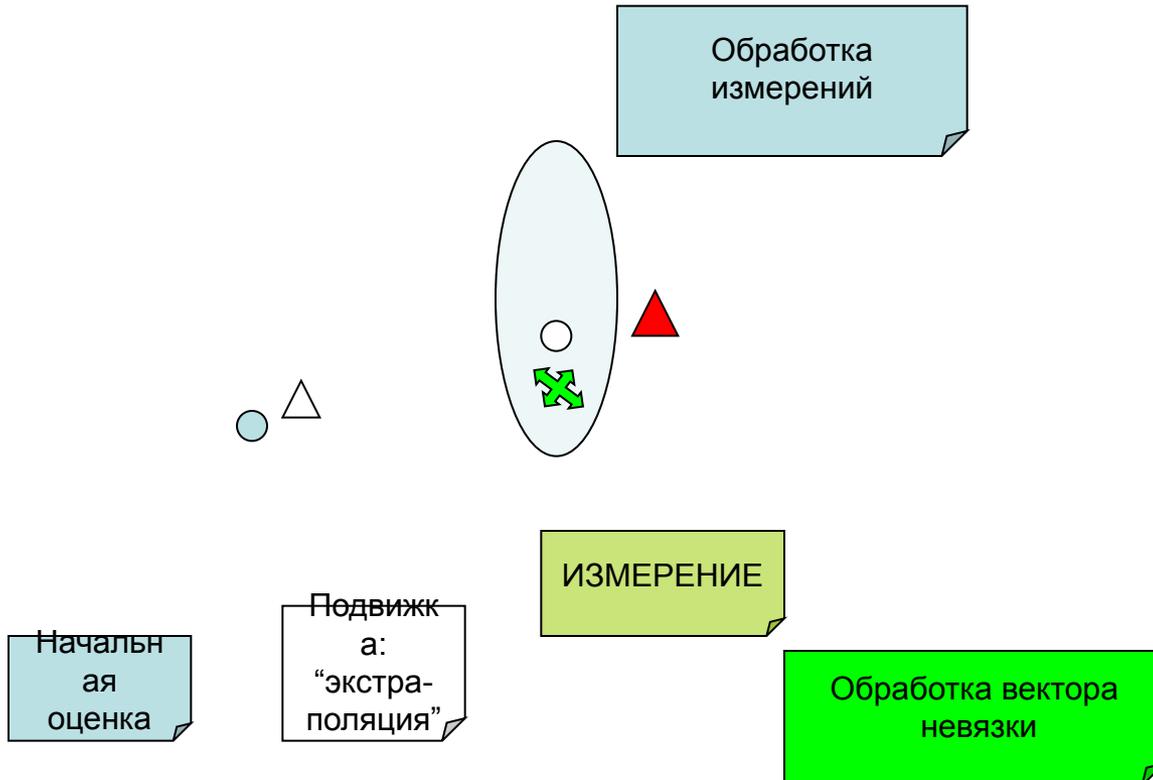
Очередная оценка;  
Улучшенная экст-  
раполяция,

Обработка невязки

**ЗАДАЧИ: уметь  
дать** графические  
интерпретации

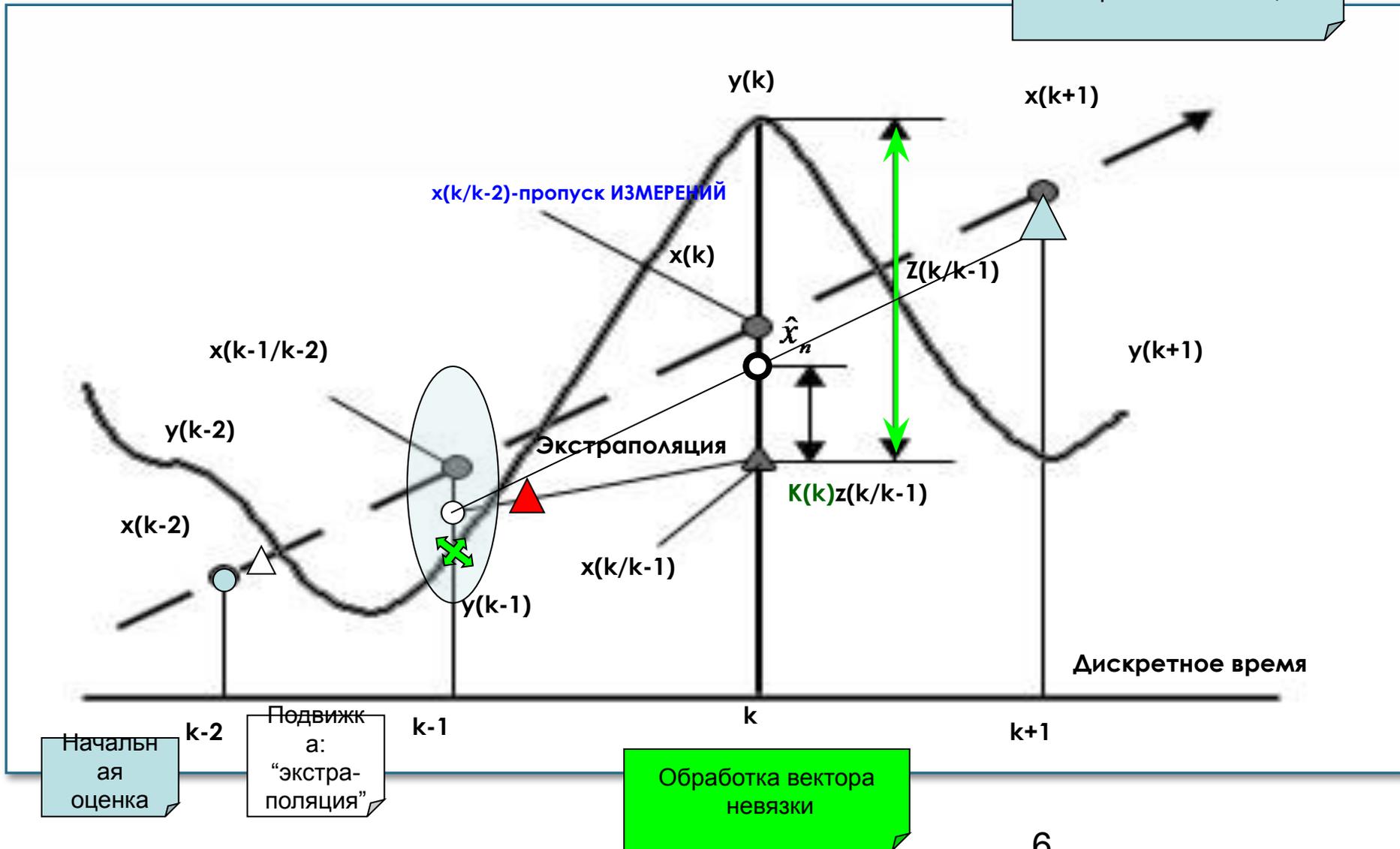
# Условные обозначения и этапы обработки информации

Модель экстраполяции по опорным точкам оценок

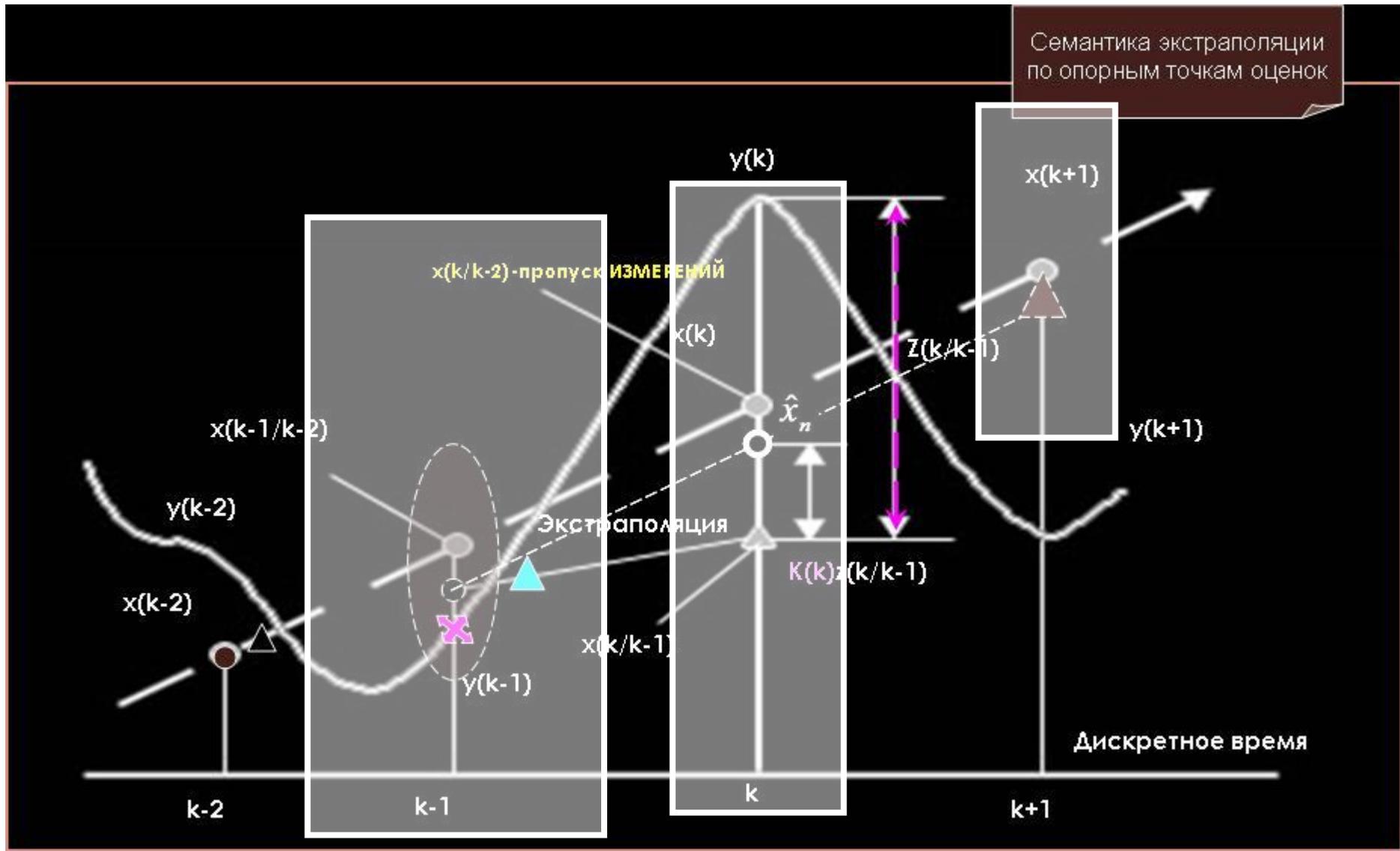


# Динамика обработки информации

Семантика экстраполяции по опорным точкам оценок



# Размеры СТРОБА при пропуске измерений



## Исходное описание движения в пространстве состояний в форме

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

От него легко перейти к передаточной функции  $W(p)$  с помощью однозначного преобразования

$C(pI - A)^{-1}B$ :

$$pX = AX + BU$$

$$X(pI - A) = BU$$

$$X = \frac{B}{(pI - A)}U = (pI - A)^{-1}BU$$

$$Y = C(pI - A)^{-1}BU$$

$$W(p) = Y/U = C(pI - A)^{-1}B$$

Итак,

$$W(p) = C(pI - A)^{-1}B$$

Фильтр Калмана дает описание преобразований не в частотной, а во временной области















# Фильтрация Калмана

Возможны два варианта описания динамических систем – с помощью дифференциальных или разностных уравнений.

Наш пример предполагает, что наблюдения и измерения проводятся в условиях шума. Как правило, принимается модель нормального закона распределения шума.

Для уяснения характера математической постановки формирования оценок рассмотрим случай одномерной динамической системы. Матрица  $A$  представлена числом  $a$ .

Матрица  $C$ , выделяющая наблюдаемые состояния отражена одиночным множителем  $1$ . Уравнения движения и измерения имеют только по 2 слагаемых

$$\begin{cases} x_n = ax_{n-1} + \xi_n \\ y_n = x_n + \eta_n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a < 1, x_n &\in \mathbb{R}^1 \\ \eta_n, \xi_n &\in \mathbb{R}^1 \end{aligned}$$

**(1) Одномерные динамические системы**

Задача фильтрации требует уменьшить влияние.  $\eta_n, \xi_n$

Задачу фильтрации будем решать методом наименьших квадратов.

Вводится эмпирический риск :

$$\rho(x_n) = \sum_{i=1}^n \eta_i^2 + \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)_i^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - ax_{i-1})_i^2 = \min(x_1, x_2 \dots x_n) \quad (2)$$

– классическая формулировка метода наименьших квадратов . Эмпирическим риск назван так потому, что в риск входят наблюдения.

Согласно формуле (2) требуется минимизировать риск, и следовательно уменьшить влияние шумов.

Принятая модель уравнения (1) дает возможность записать риск.

$$\sum_{i=1}^n (x_i - ax_{i-1})^2$$

Необходимо так выбрать  $x_i$ , чтобы получить минимум по всей траектории. Набор оценок, соответствующий оптимальной траектории, будем обозначать

$$\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$$

Он получается путем дифференцирования  $\frac{d\rho}{dx_i} = 0$

Проделав математические операции получаем одномерный фильтр Калмана.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_n = a\hat{x}_{n-1} + K_u (y_n - a\hat{x}_{n-1}) \\ K_u = \left( \frac{1}{K_{n-1}a^2 + \frac{\sigma_\xi^2}{\sigma_\eta^2}} + 1 \right)^{-1} \end{array} \right. \quad (3)$$

Фильтр  
Калмана

$$K_1 = 1, \hat{x}_0$$

– фильтр Калмана сглаживает шумы и, если шумы **гауссовские**, то этот фильтр является **ОПТИМАЛЬНЫМ**.

$$\boxed{M(\hat{x}_n - x_n)^2 = \min_{\hat{x}_n} \quad (4)}$$

$\mathbf{n} \rightarrow \infty$

Формула (4) является критерием минимума среднеквадратической ошибки.

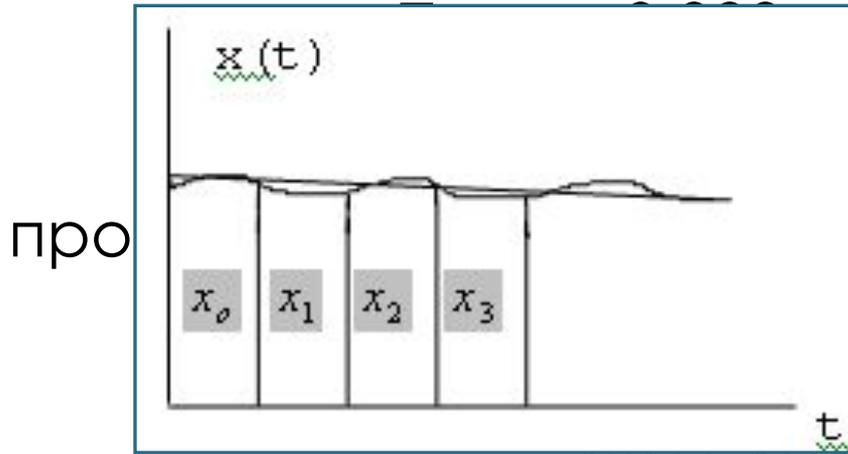
Фильтр Калмана дает **оценку** процесса **истинного процесса** для гауссовских шумов, оптимальную по критерию **(4)** – по критерию минимума среднеквадратической ошибки.

Замечание 1 : Оптимальность означает, что **не существует другого фильтра**, который мог бы дать такие же результаты по среднеквадратической ошибке. (Остальные фильтры дают большую ошибку)

Замечание 2 : Фильтр Калмана реализуется на ЭВМ во временной области, а не в частотной

# Анализ свойств Фильтра Калмана

## Фильтрация медленных процессов



$$\sigma_{\xi}^2 \ll 1$$

$$K_i \rightarrow 0$$

что следует из формулы (3)

В этом случае  $\hat{x}_i = a\hat{x}_{i-1}$  ФК осуществляет преимущественно экстраполяцию (прогноз), т.е. прошлая и текущая оценки почти одинаковы.

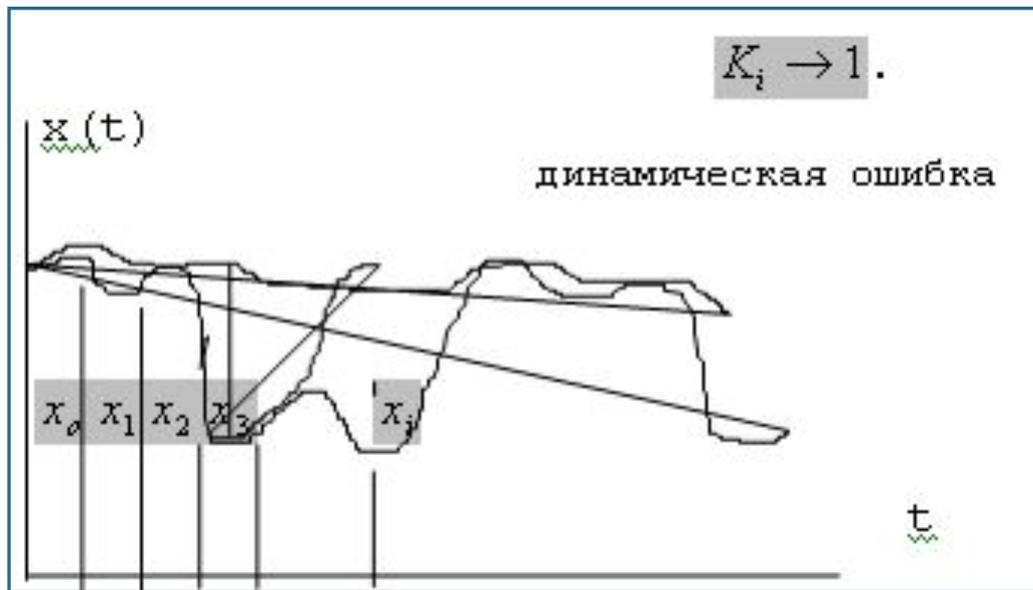
В таком фильтре Калмана почти полностью игнорируются наблюдения.

При оценке ситуации фильтр Калмана не доверяет наблюдениям, а доверяет лишь прошлой оценке.

Это годится для процессов, течение которых можно легко предсказать.

Фильтрация быстрых процессов величина ( $>1$ );

$\sigma_{\xi}^2$  – большая

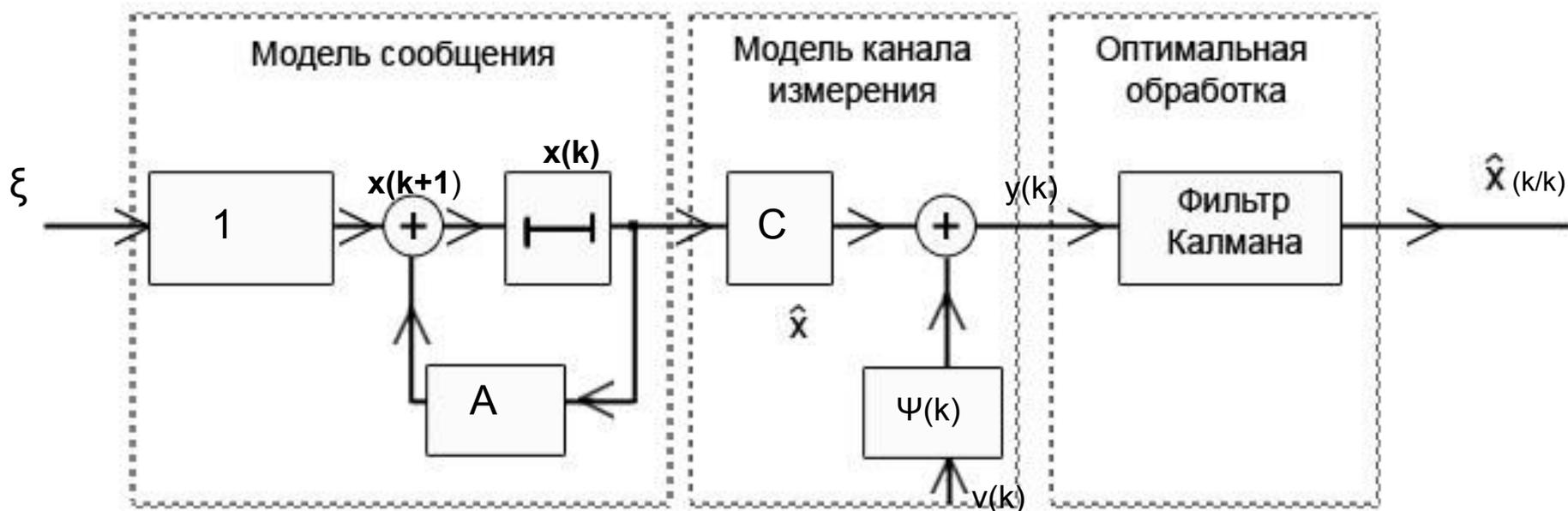


.. ⊗ .. недостатки

Тогда , в этом случае  $\hat{x}_i = y_i$  (оценка) равна самим наблюдениям. Это значит, что фильтр Калмана не доверяет прошлым оценкам.

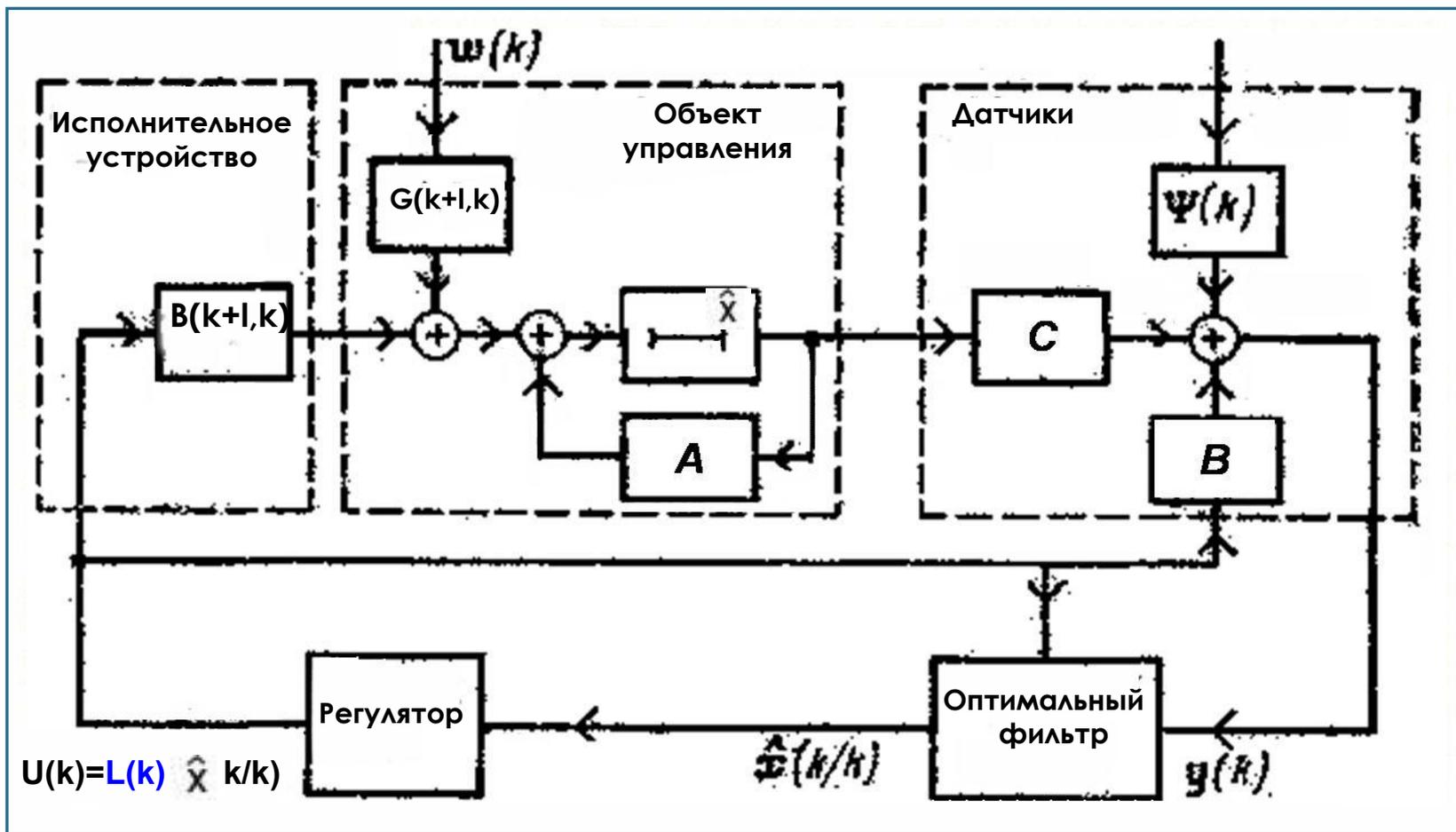
**Вывод :** Фильтр Калмана минимизирует и флуктуационную и динамическую ошибку.

# Модель нормального функционирования системы передачи информации



В первом случае вектор состояния системы  $x(t)$  содержит в качестве своей компоненты передаваемое сообщение. Это сообщение (например, траектория сопровождаемой цели в радиолокации) моделируется в виде случайного процесса, полученного путем пропускания белого гауссовского шума через линейный фильтр в общем случае с зависящими от времени параметрами (эти параметры определяются переходными матрицами системы и шумов возмущений). В канале измерения на сигнал, полученный путем линейного преобразования вектора состояния, аддитивно накладывается шум измерений прошедший предварительно безинерционное линейное преобразование с матрицей  $H$ . Задача оптимального выделения принятого сообщения из наблюдаемого сигнала  $y$  в соответствии с критерием минимума среднего значения квадрата ошибки решается с помощью устройства оптимальной обработки, представляющего в рассматриваемом случае фильтр Калмана.

# Модель системы управления



- На выходе регулятора имеем оптимальное управление  $u_{ik} = L(k)_{j.(k|k)}$ , где  $x(f_c|f_t)$
- оптимальная оценка вектора состояния, получаемая на выходе фильтра Калмана — оператор оптимального регулятора. Основными задачами исследования ДС являются синтез алгоритмов оптимальной фильтрации и управления при известных динамических свойствах системы и заданных характеристиках канала измерения.

Одним из важных источников нарушений в ДС является канал измерения. Нарушения в канале измерения могут происходить по целому ряду причин, основными из которых являются:

- случайные пропадания информационных сигналов; появление ложных (аномальных) измерений  $y(k)$ ;
- резкое возрастание шумов измерений  $v(k)$  или случайное изменение их характеристик.

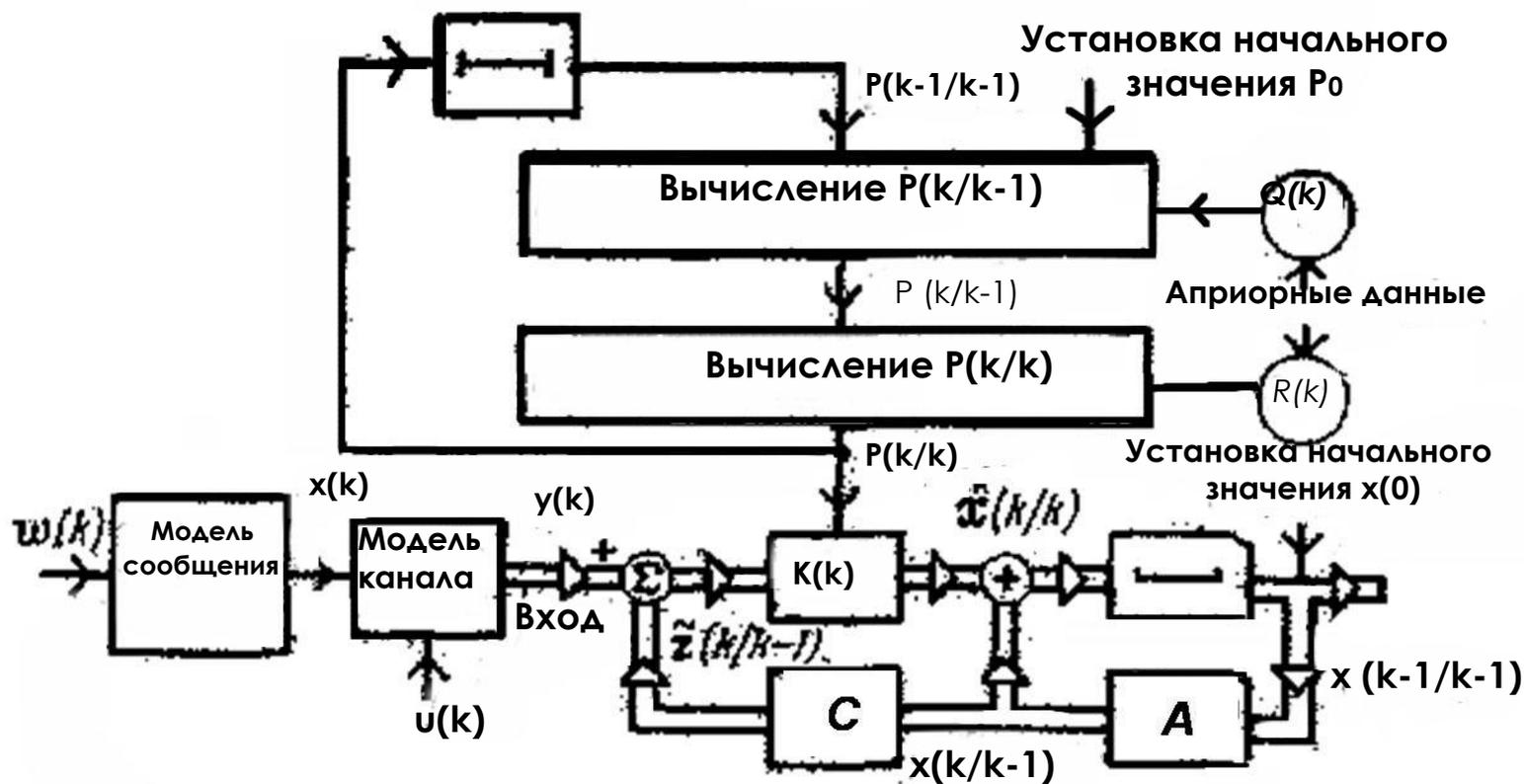
Использование при этих условиях алгоритмов оценивания, не учитывающих возможности появления нарушений в канале измерения, приводит к существенному возрастанию ошибок фильтрации, а в задачах сопровождения целей — к срыву слежения.

# Основные особенности фильтра Калмана.

- фильтр представляет собой рекуррентный, удобный для реализации на ЭВМ, алгоритм вычисления оценки состояния ДС при полностью известной ее модели;
- оценка, получаемая с помощью этого фильтра, является линейной относительно наблюдений;
- корреляционная матрица ошибок фильтрации  $P(k/k)$  вследствие линейности фильтра не зависит от наблюдений  $y(k)$  и, следовательно, может быть вычислена заранее;

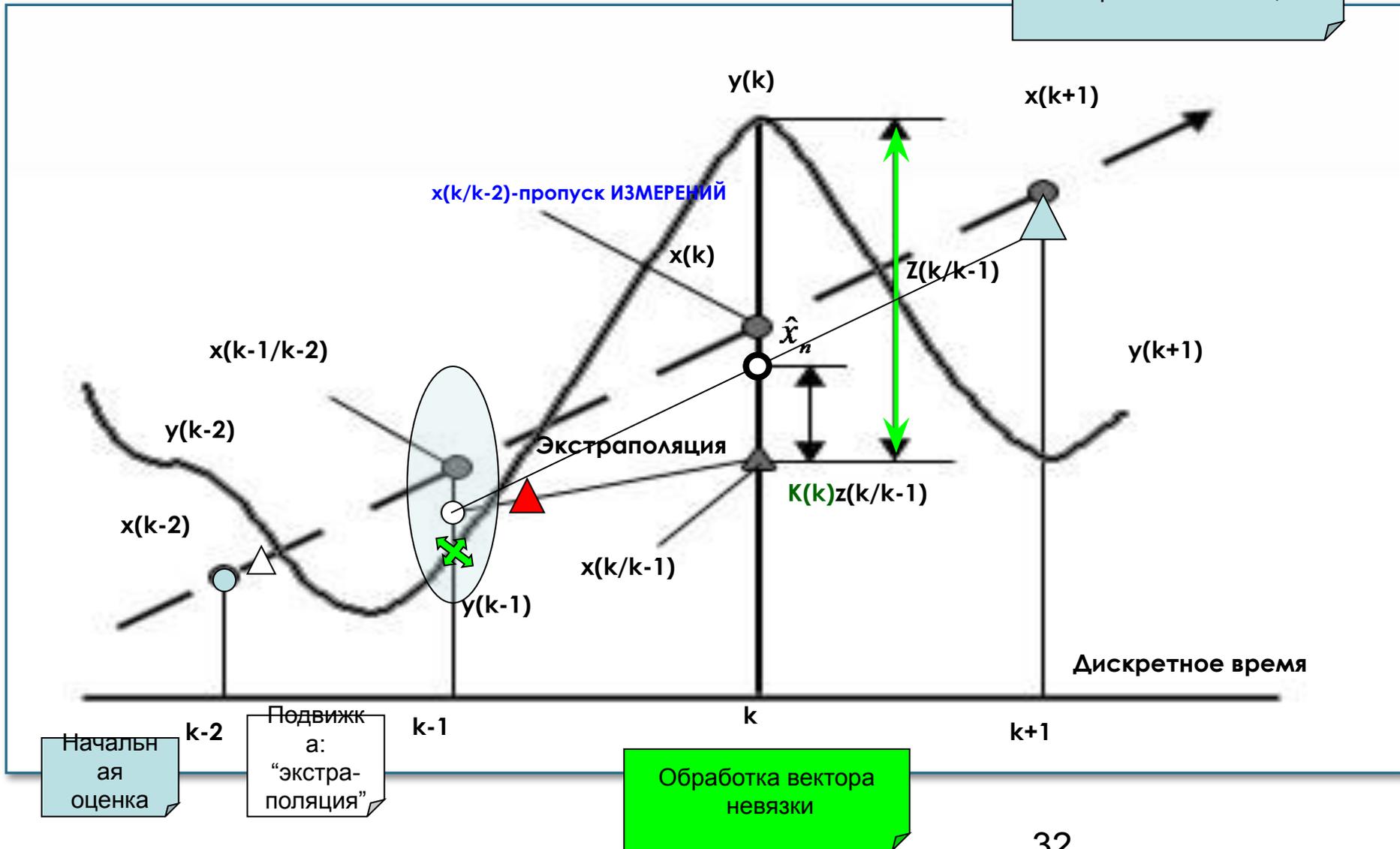
- алгоритмы фильтрации легко распространяются на многомерный случай (для многоканальных систем);
- так как параметры фильтра Калмана изменяются во времени, то такой фильтр минимизирует среднеквадратическое значение ошибки оценивания не только в установившемся режиме, но и в течение переходного процесса.

# Вычислительная схема Фильтра Калмана



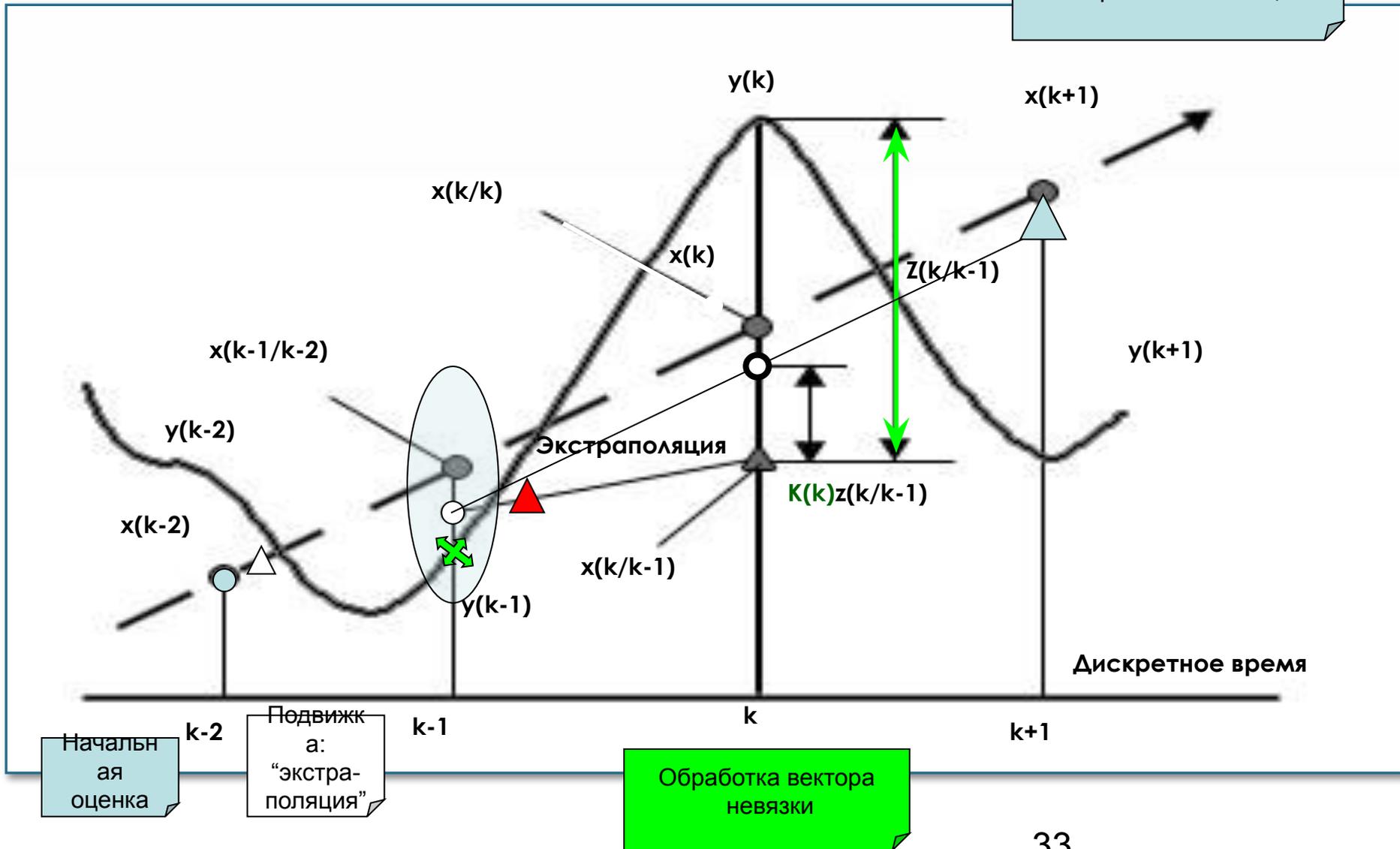
# Динамика обработки информации

Семантика экстраполяции по опорным точкам оценок



# Динамика обработки информации

Семантика экстраполяции по опорным точкам оценок

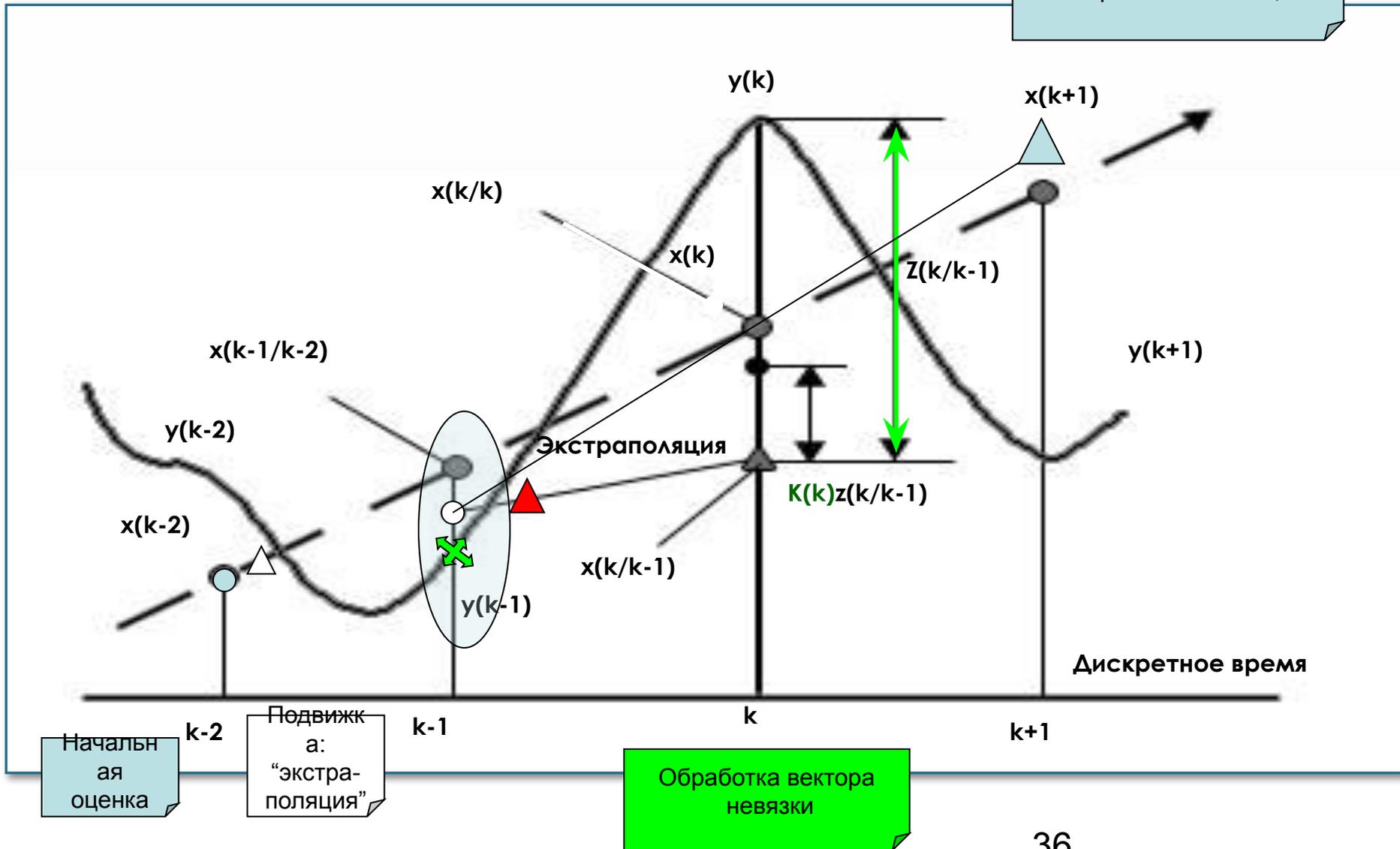




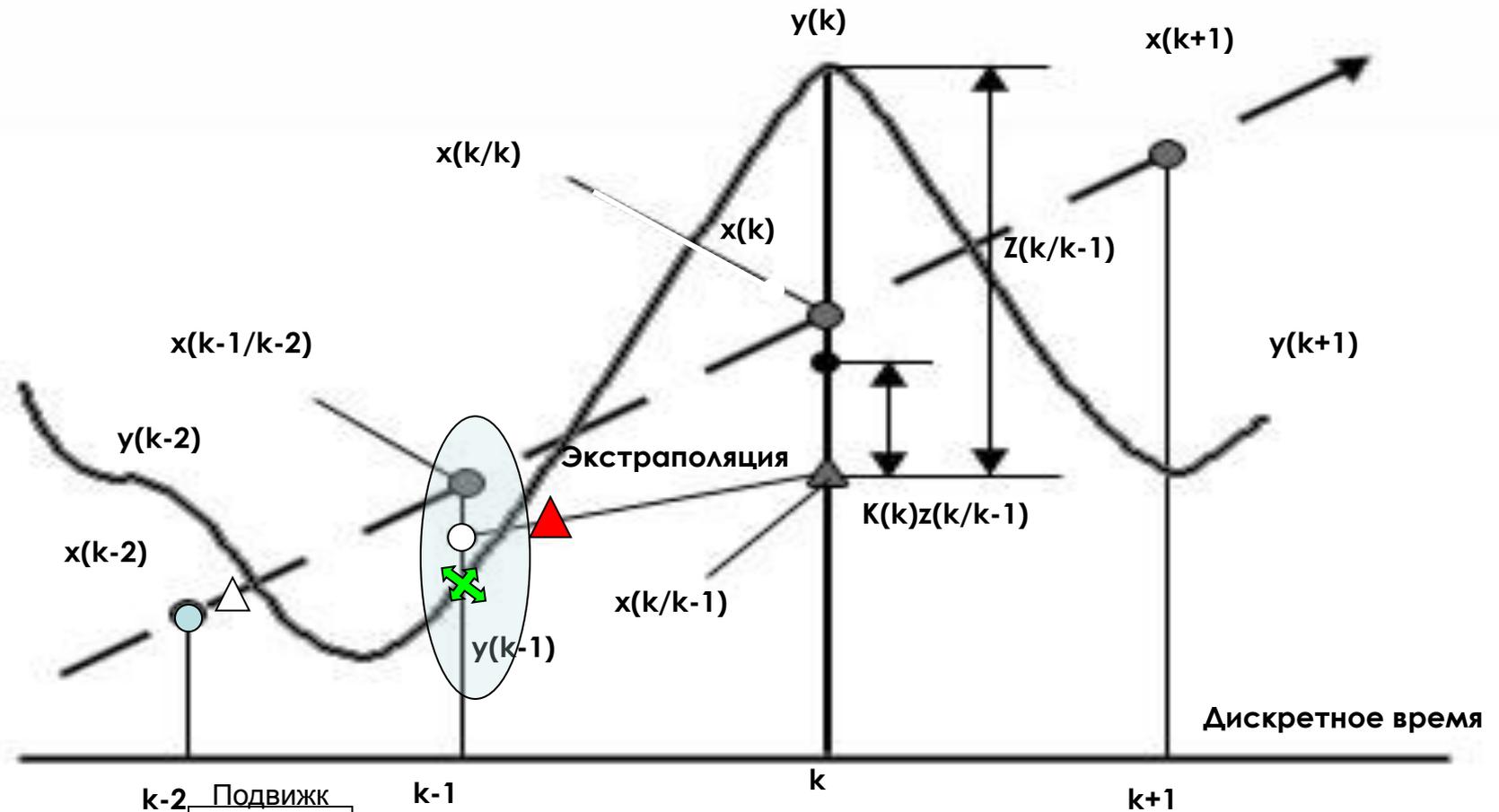


# Динамика обработки информации

Семантика экстраполяции по опорным точкам оценок



# Динамика обработки информации



Начальная  
оценка

Подвижная  
оценка:  
"экстраполяция"