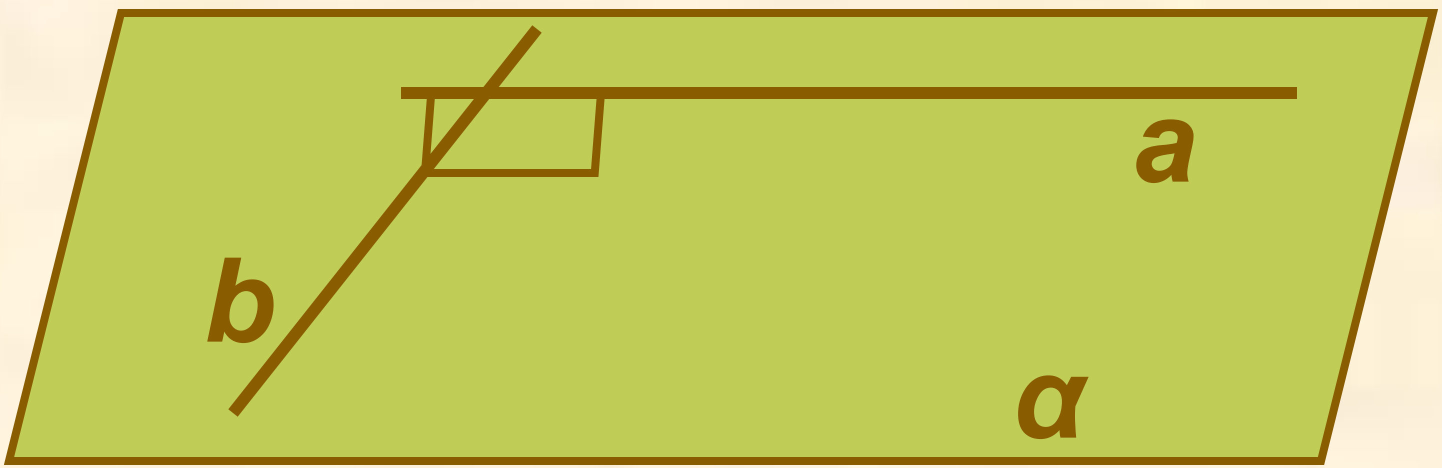
Перпендикулярность прямых и плоскостей

Перпендикулярные прямые в пространстве

Две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90º



$a \perp b$

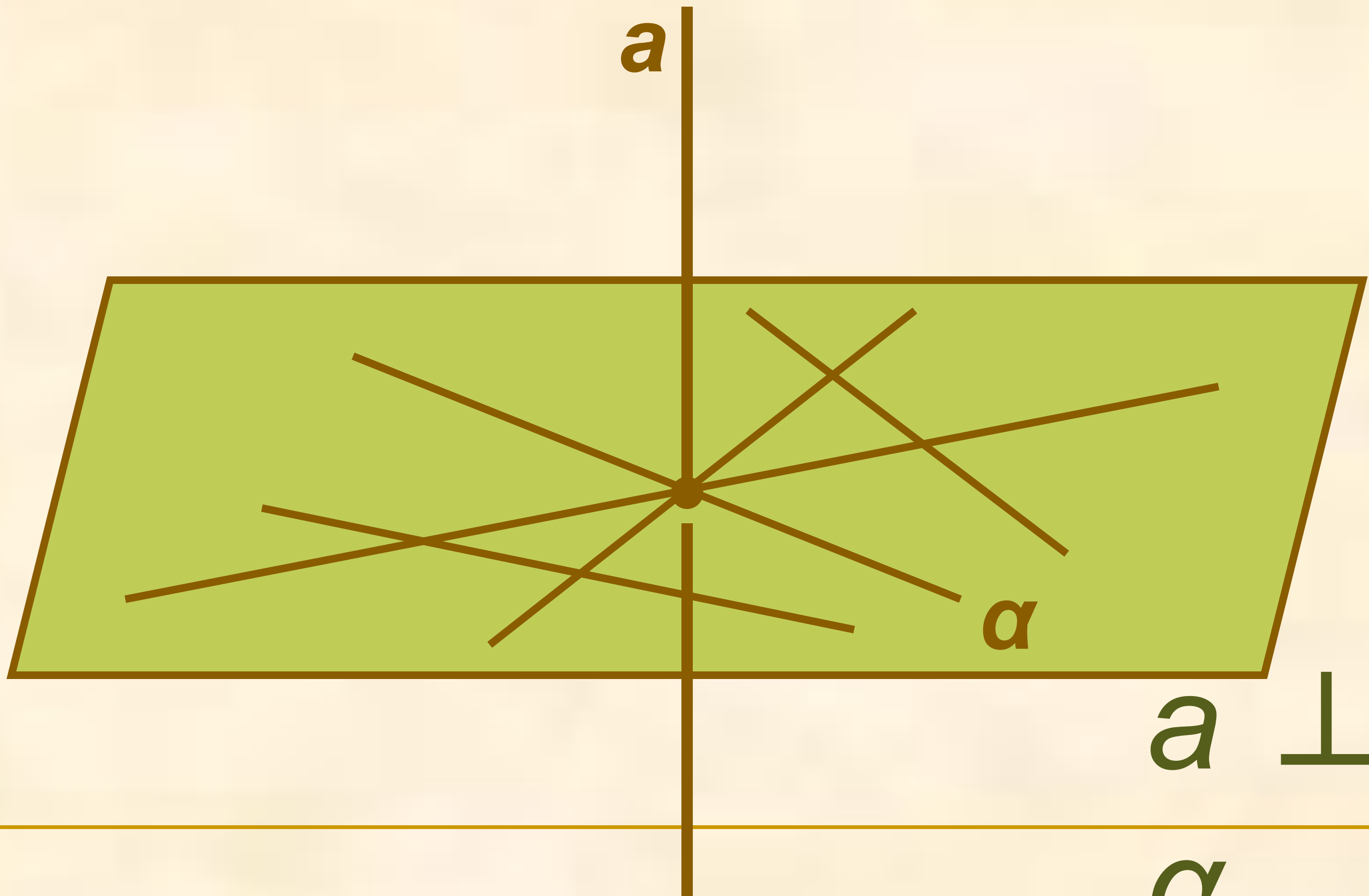
Лемма

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

<u>Дано:</u> $a \parallel b$, $a \perp c$

<u>Доказать:</u> $b \perp c$

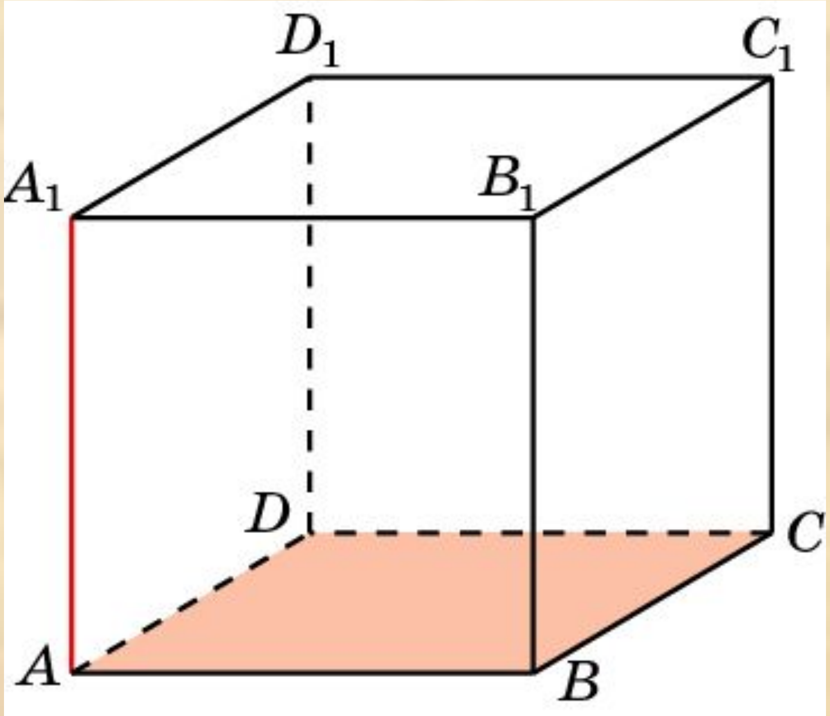
Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости



$a \perp \alpha$

Упражнение 2

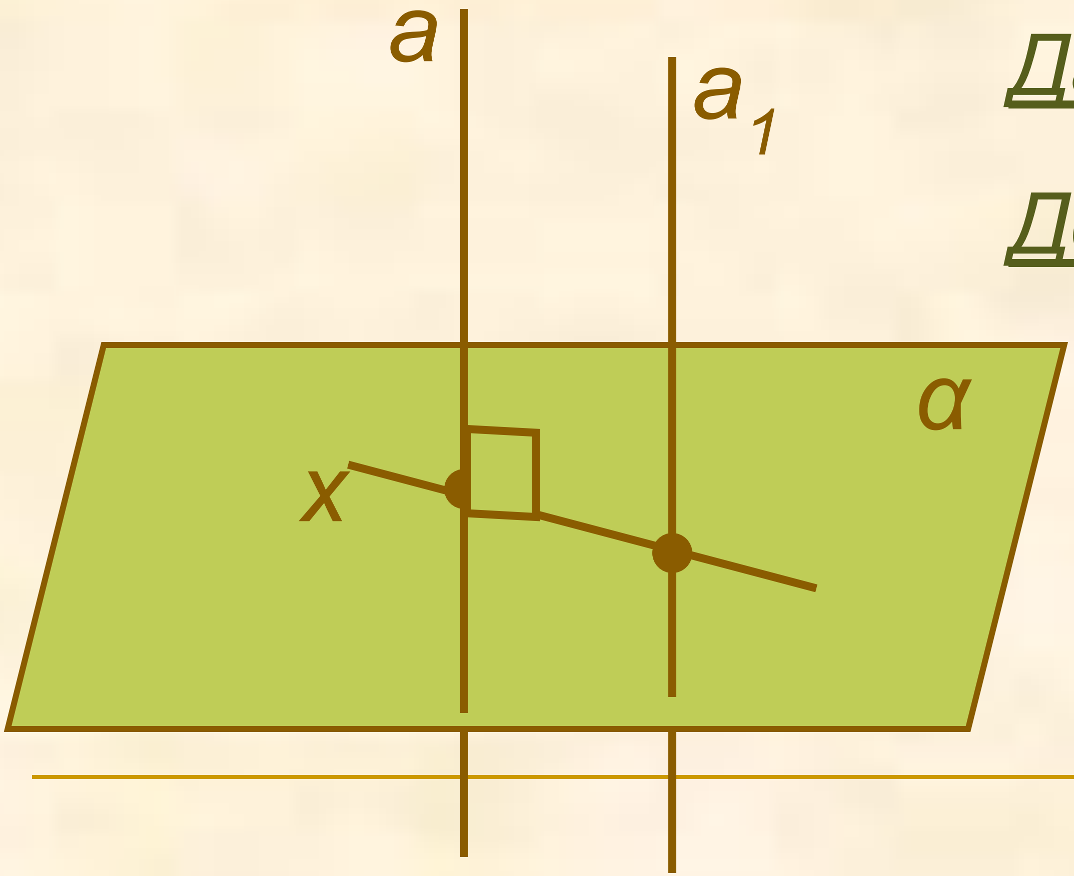
Определите взаимное расположение прямой AA_1, проходящая через вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и плоскости ABC.



Доказательство. Прямая AA_1 перпендикулярна прямым AB и AD. Следовательно, она перпендикулярна плоскости ABC.

Теорема 1

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

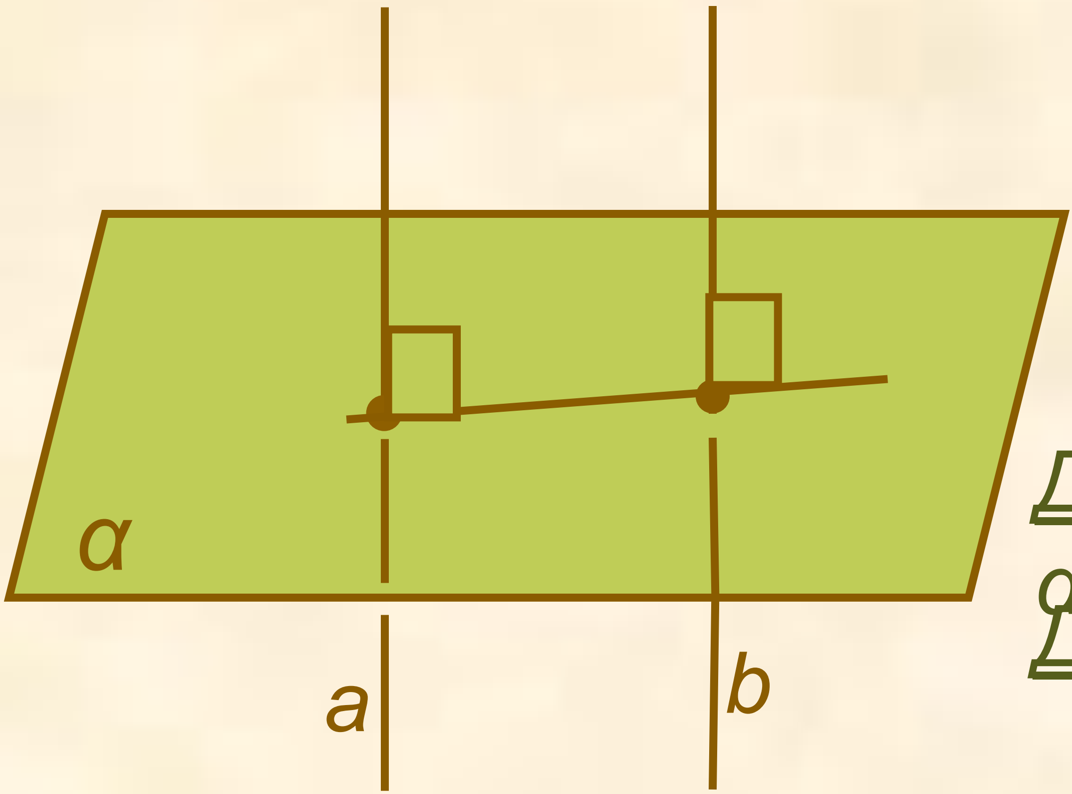


Дано: $a \parallel a_1$; $a \perp \alpha$

Доказать: $a_1 \perp \alpha$

Теорема 2

Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

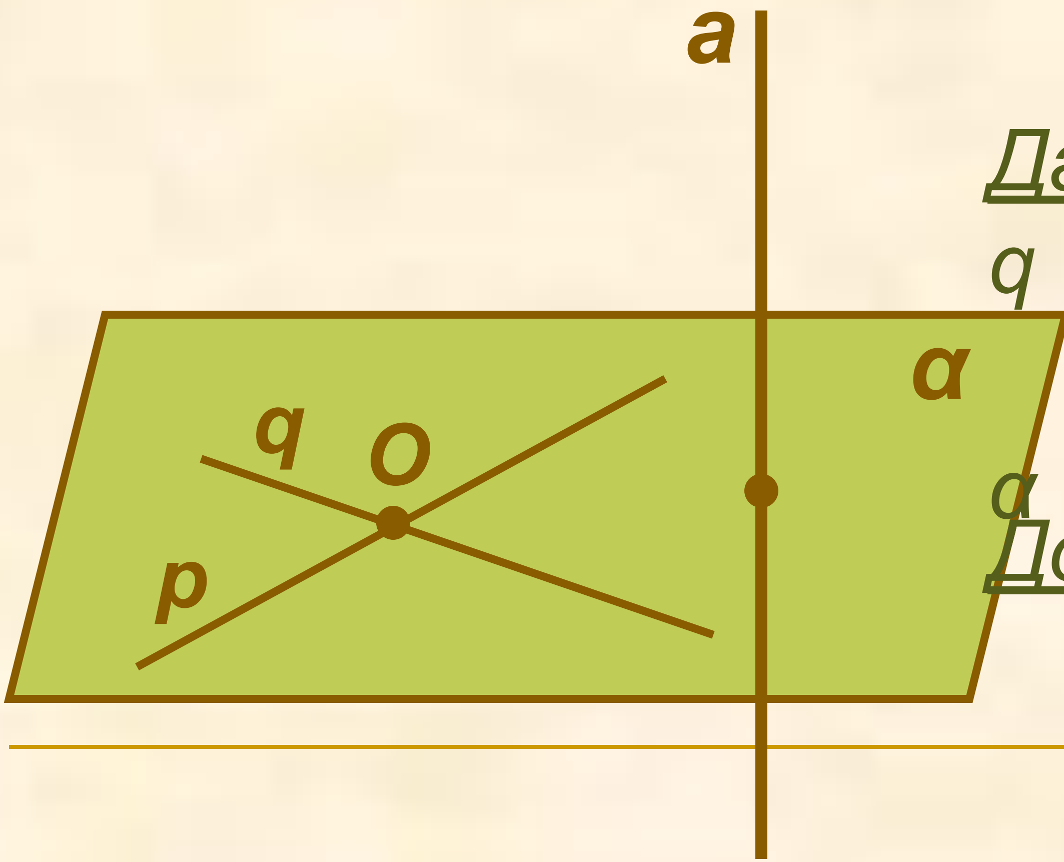


<u>Дано:</u> $a \perp \alpha$; $b \perp \alpha$

<u>Доказать:</u> $a \parallel b$

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.



Дано: $a \perp p$; $a \perp q$

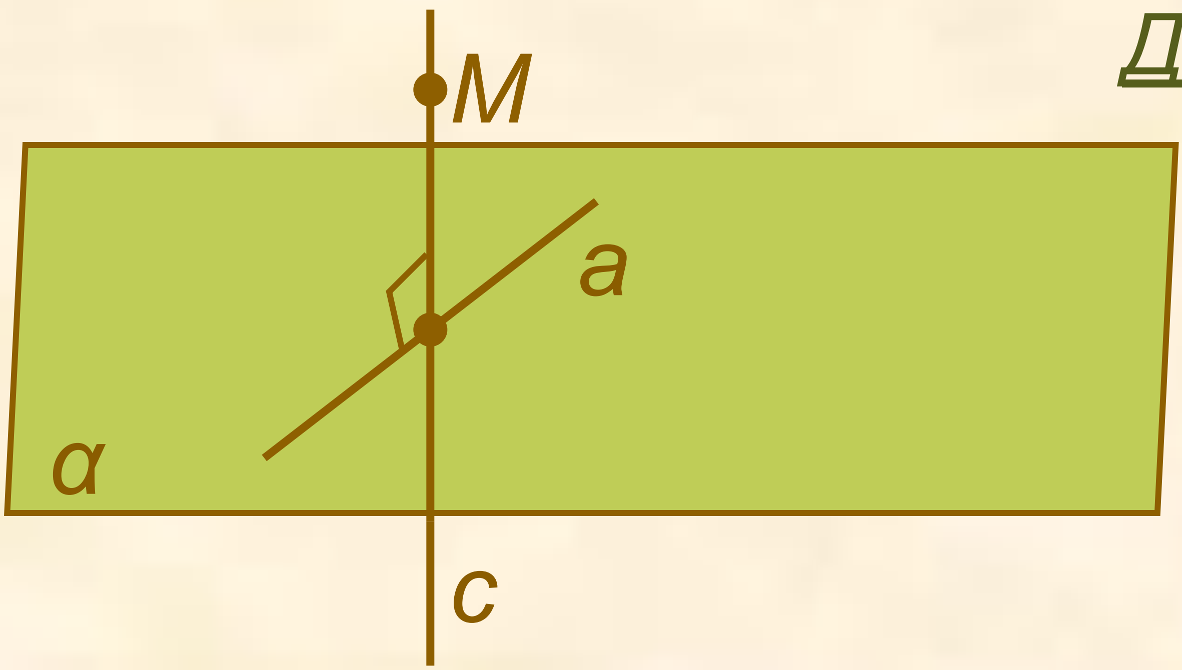
$p \subset \alpha$; $q \subset \alpha$

Доказать: $a \perp \alpha$

$p \cap q = O$

Теорема 4

Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.



<u>Дано:</u> α; $M \notin \alpha$

<u>Доказать:</u>

1) $c \perp \alpha$, $M \in c$

Перпендикуляр и наклонные

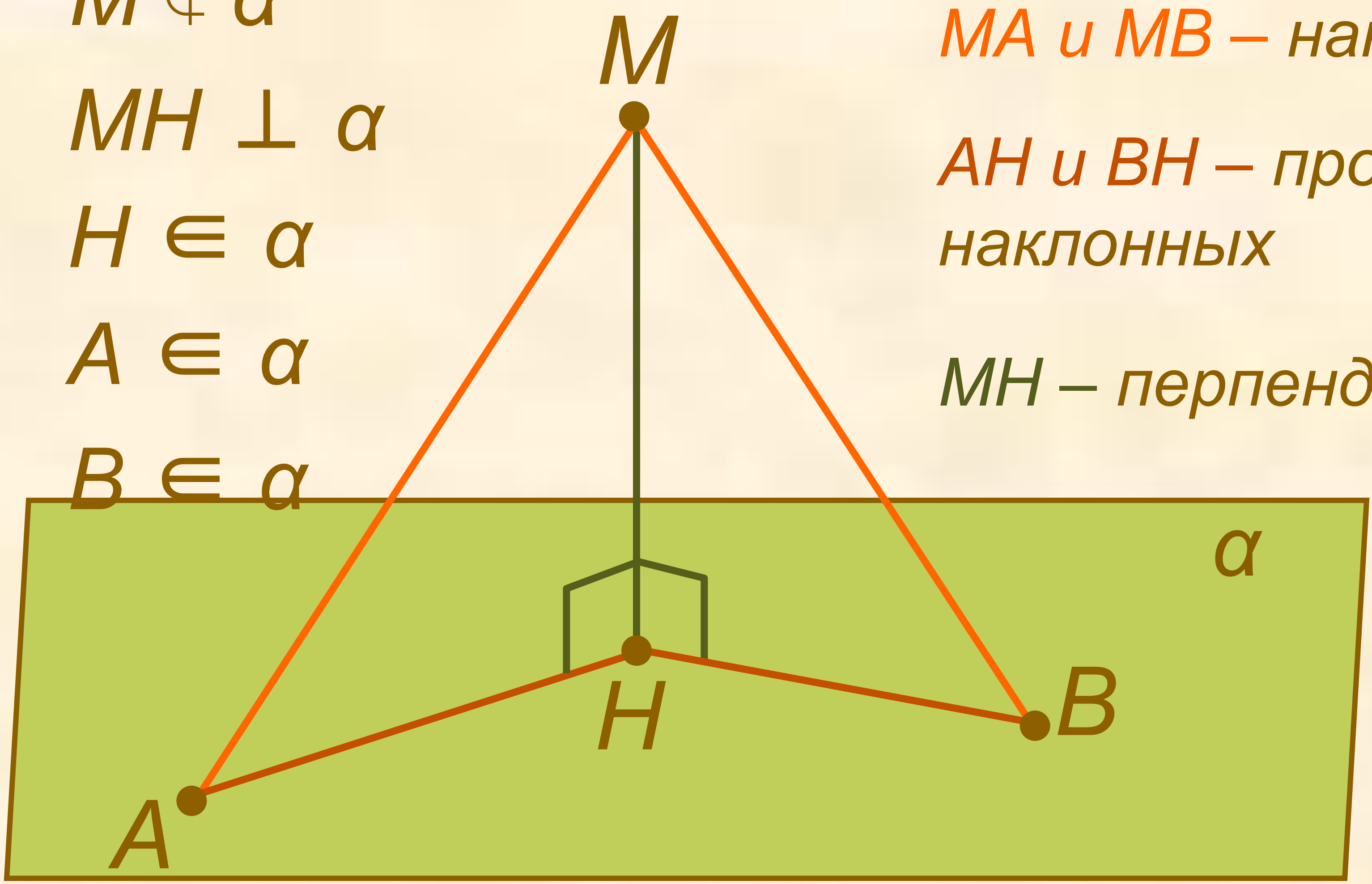
$M \notin \alpha$

$MH \perp \alpha$

$H \in \alpha$

$A \in \alpha$

$B \in \alpha$



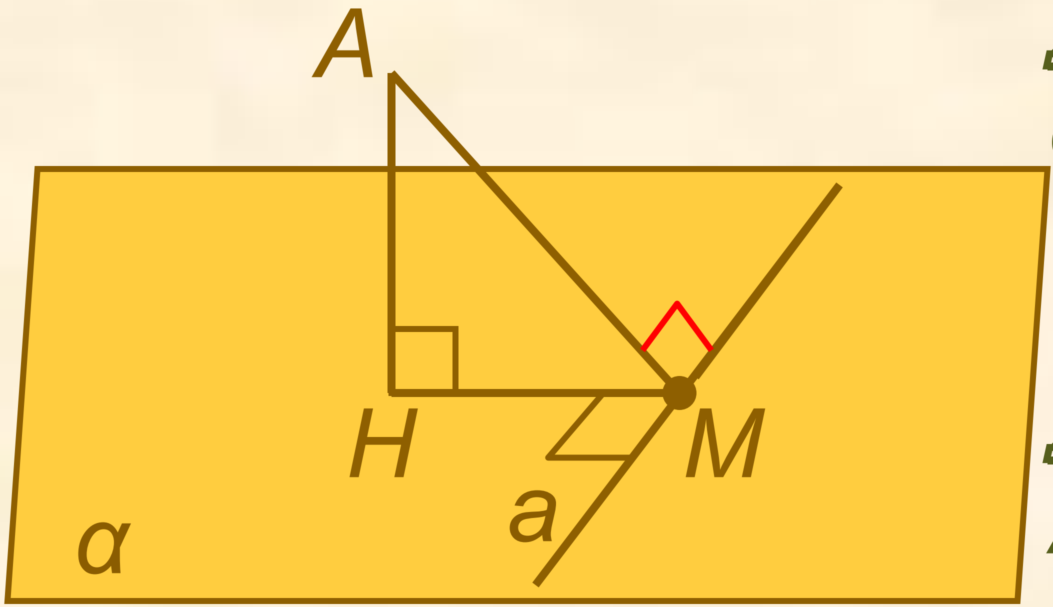
MA и MB – наклонные

AH и BH – проекции наклонных

MH – перпендикуляр

Теорема о трех перпендикулярах

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна к самой наклонной.



Дано: $a \subset \alpha$, $AH \perp \alpha$,

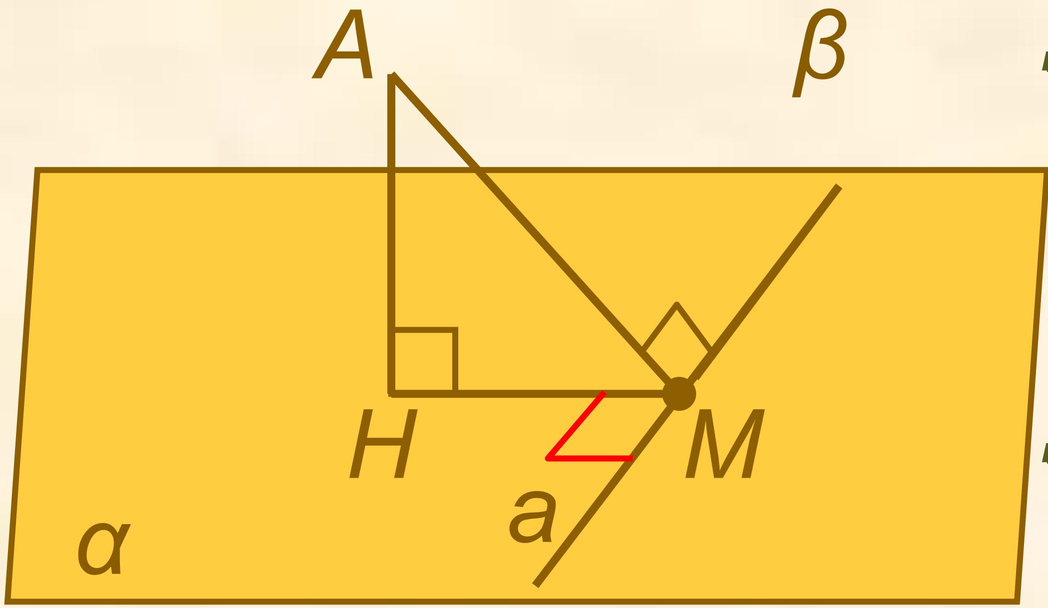
AM – наклонная,

$a \perp HM$, $M \in a$

Доказать: $a \perp AM$

Теорема, обратная теореме о трех перпендикулярах

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.



<u>Дано:</u> $a \subset \alpha$, $AH \perp \alpha$,

AM – наклонная,

$a \perp AM$, $M \in a$

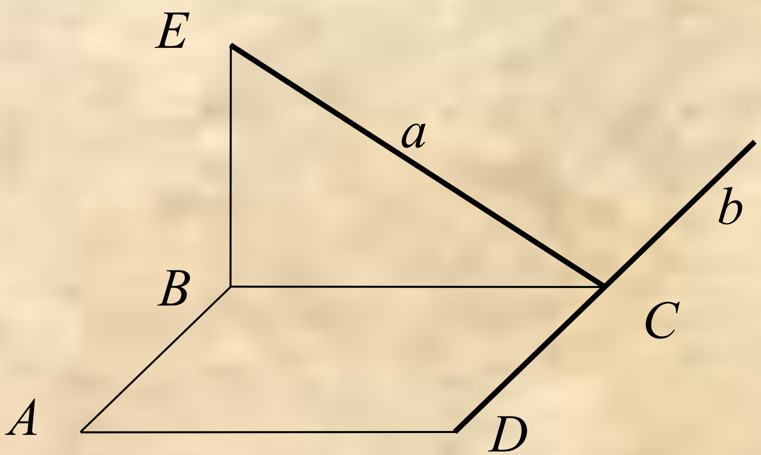
<u>Доказать:</u> $a \perp HM$

Упражнение 3

Установить взаимное положение прямых *а* и *в* по готовым чертежам

Задача1. ABCD – квадрат

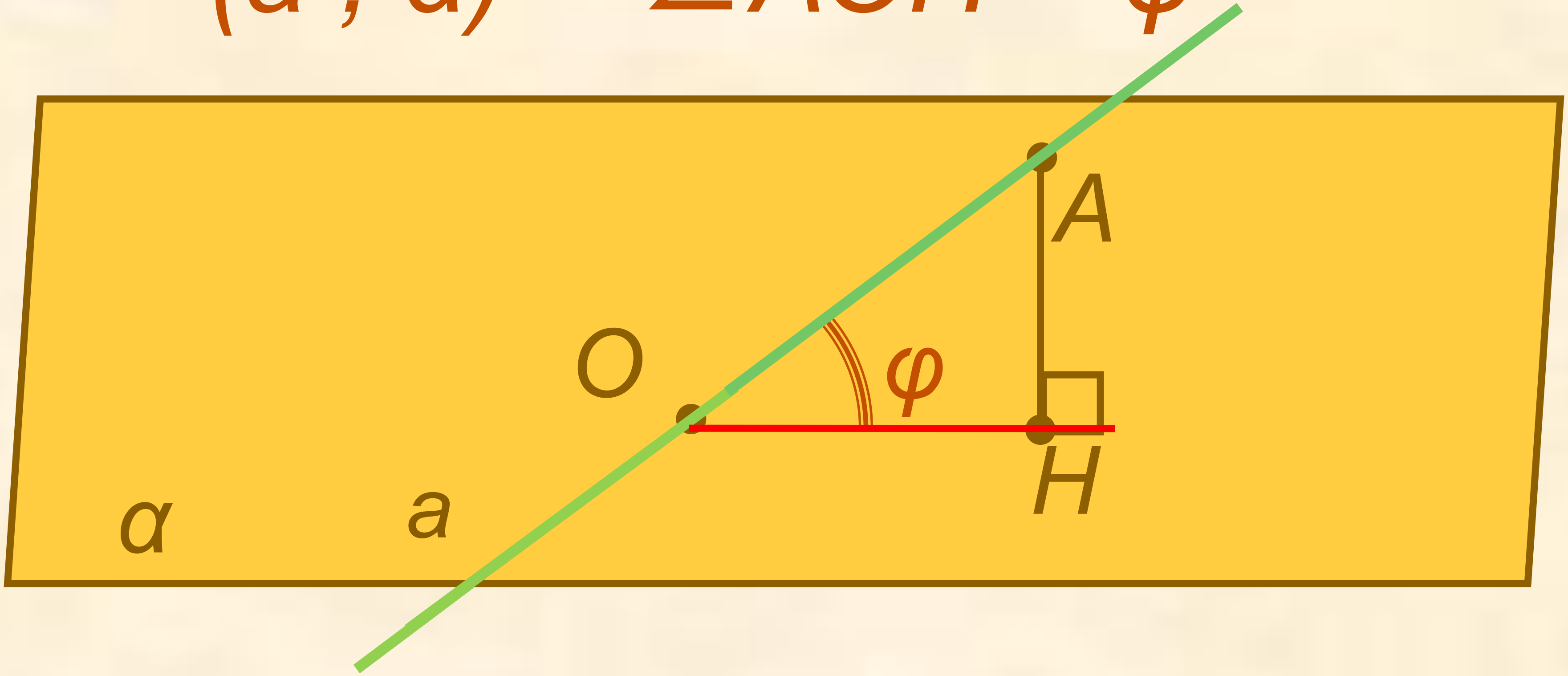
BE ⊥ ABCD



а ⊥ *в*

Угол между прямой и плоскостью

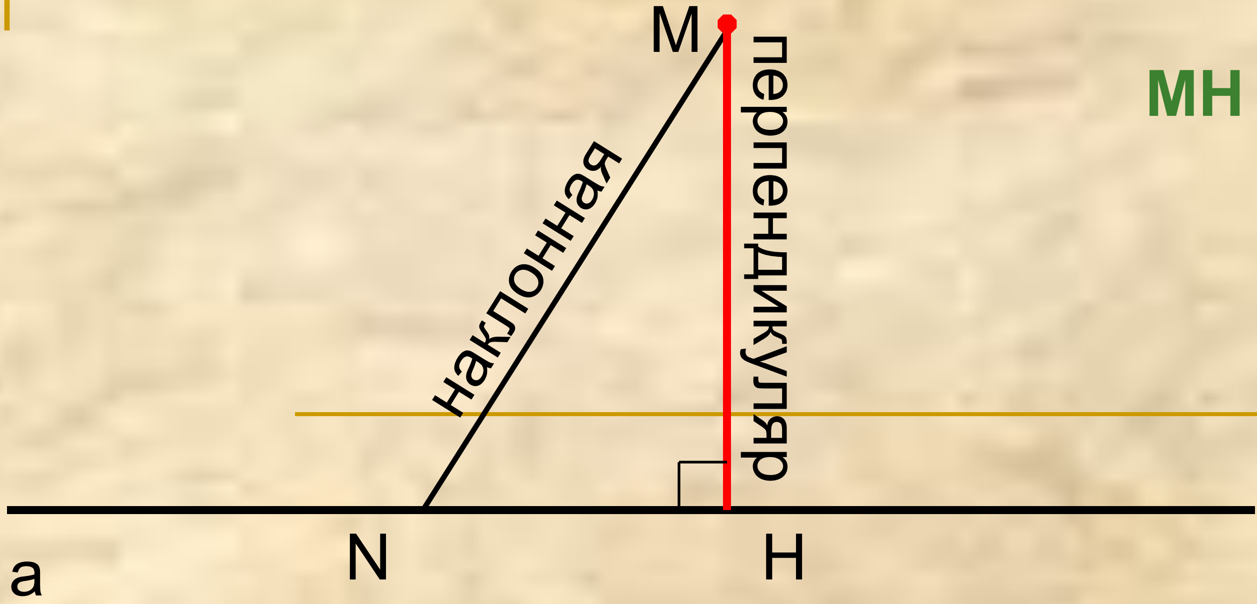
$$\widehat{(a\ ;\ \alpha)} = \angle AOH = \varphi$$



Угол между прямой и плоскостью, пересекающей эту плоскость и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость

Определите расстояние от точки М до прямой а

Расстоянием от точки до прямой является длина перпендикуляра



MH < MN

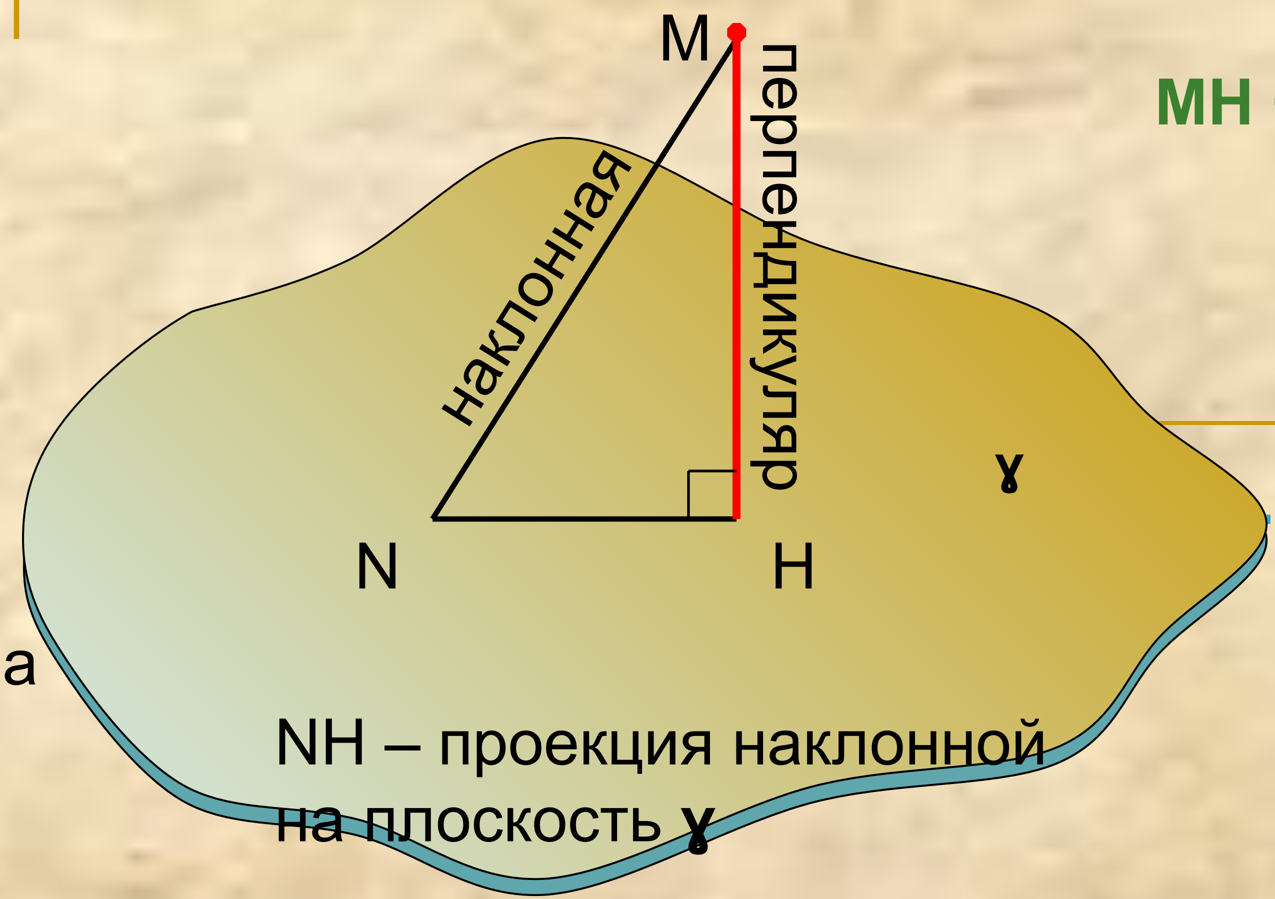
H – основание перпендикуляра

N – основание наклонной

HN – проекция наклонной

Определите расстояние от точки М до плоскости ɣ

Расстоянием от точки до плоскости является длина перпендикуляра



MH < MN

ДВУГРАННЫЙ УГОЛ

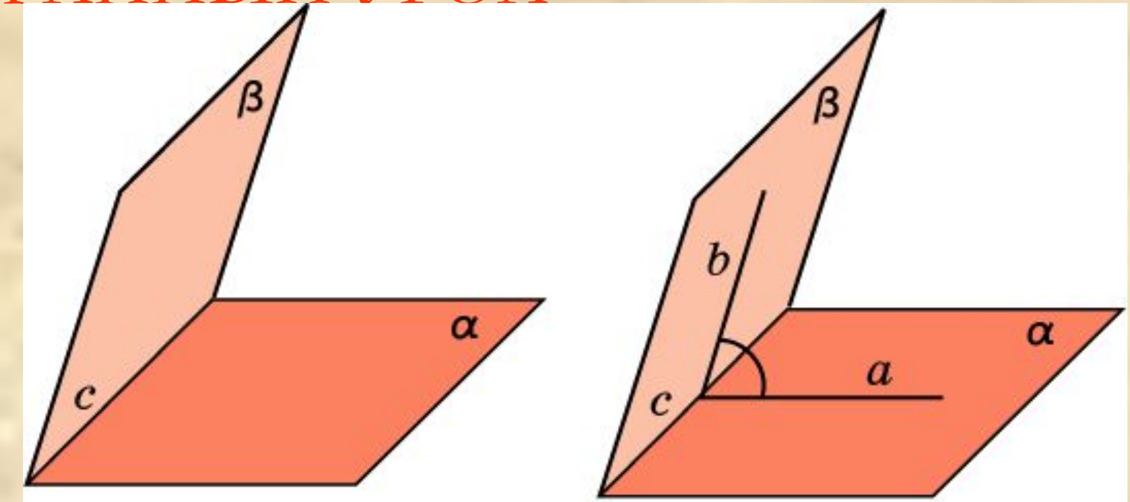


Рис. 1 Рис. 2

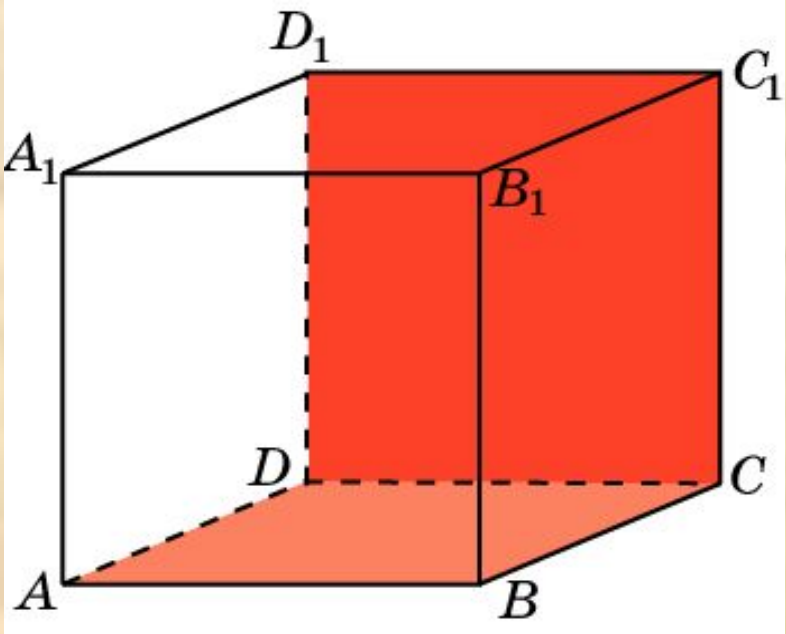
Двугранным углом называется фигура (рис. 1), образованная двумя полуплоскостями, с общей ограничивающей их прямой, и частью пространства, ограниченной этими полуплоскостями. Полуплоскости называются гранями двугранного угла, а их общая граничная прямая – ребром двугранного угла.

Линейным углом двугранного угла называется угол, полученный в результате пересечения данного двугранного угла и какой-нибудь плоскости, перпендикулярной его ребру (рис. 2).

Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

Упражнение 5

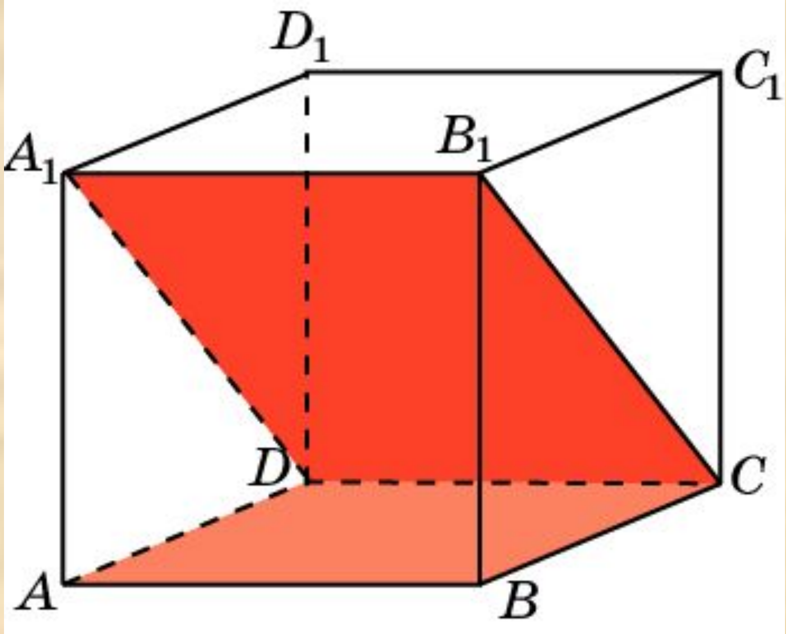
В кубе $A…D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и CDD_1.



Ответ: 90°.

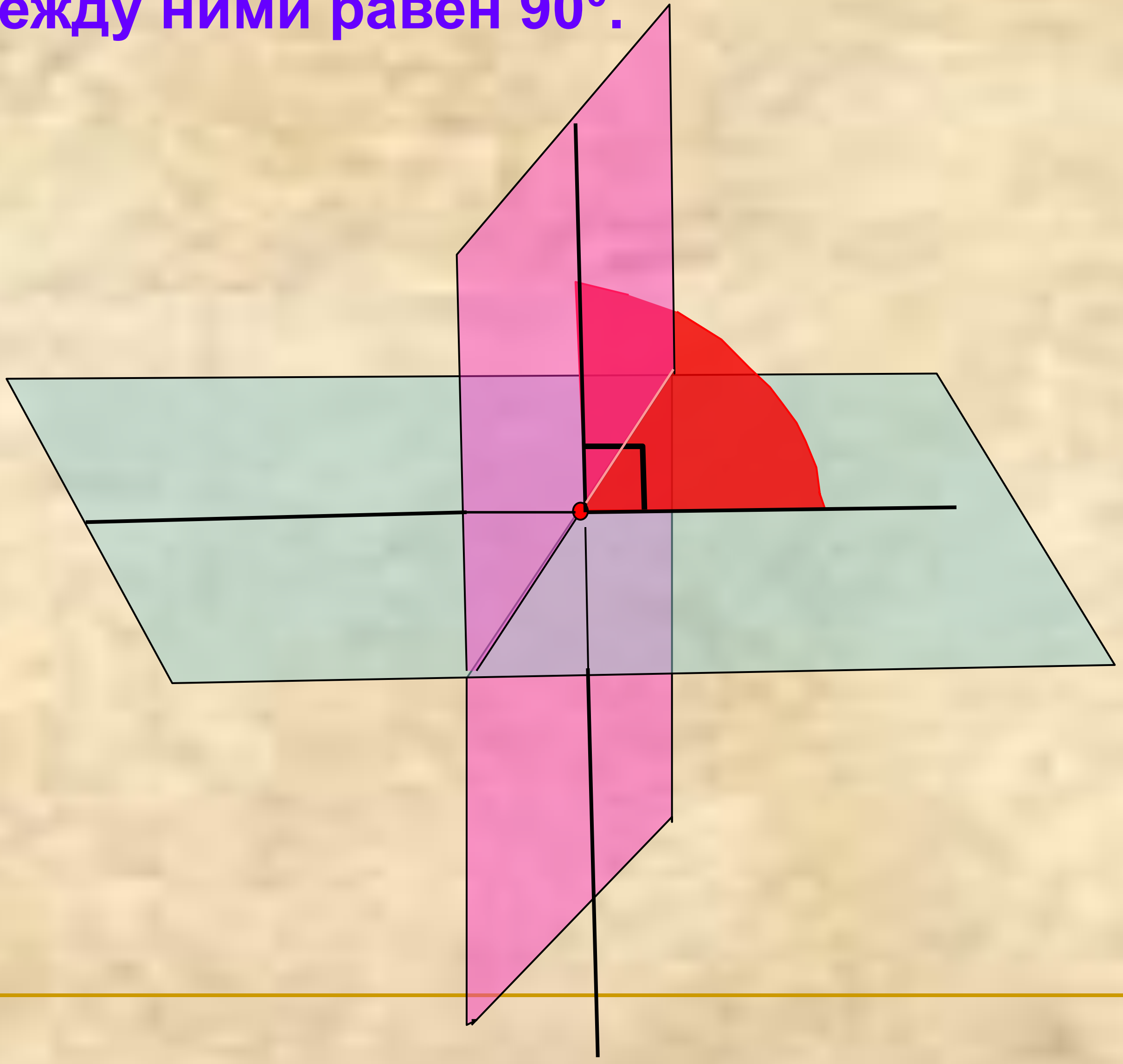
Упражнение 6

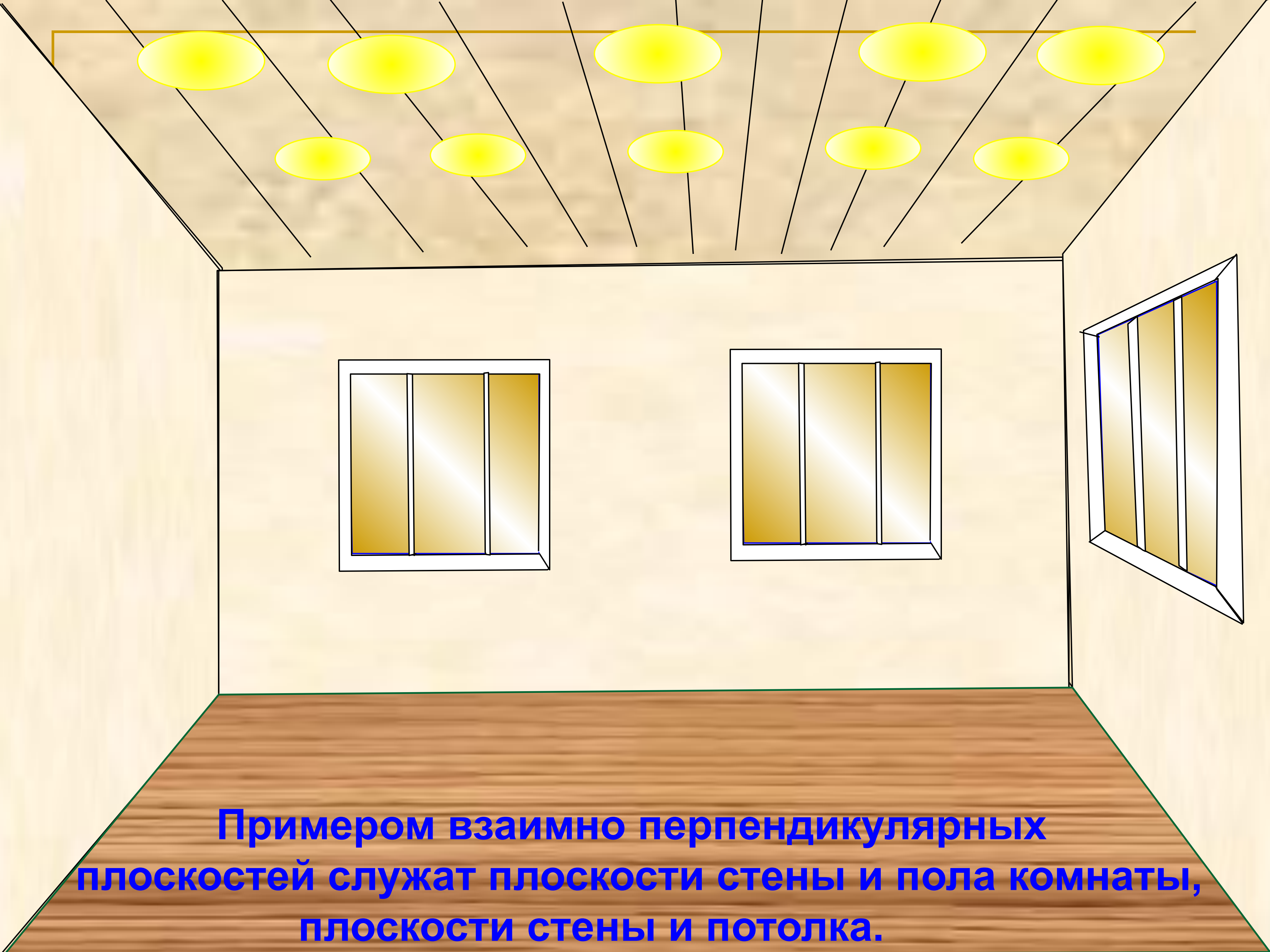
В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и CDA_1.



Ответ: 45°.

Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90^0.

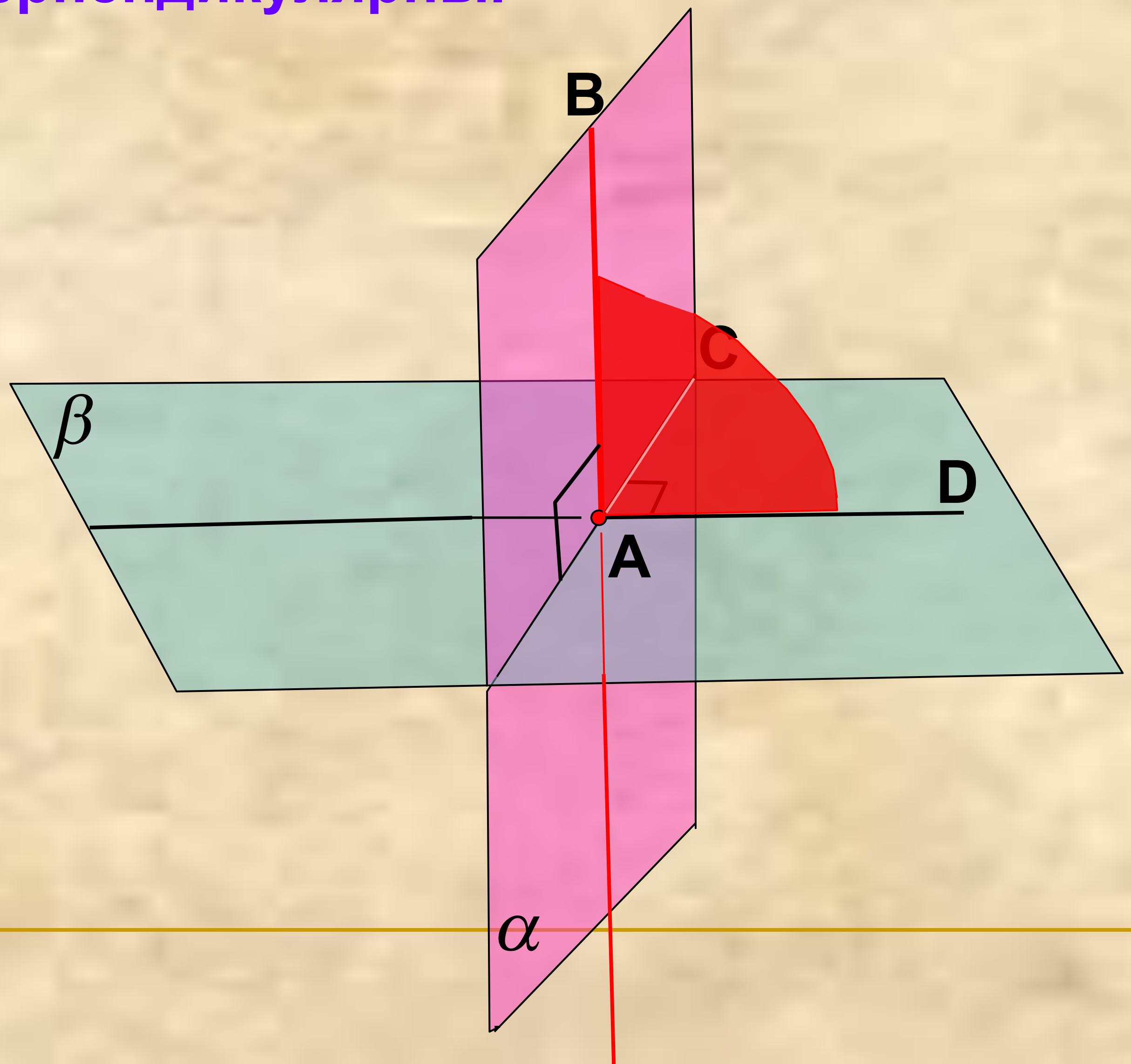




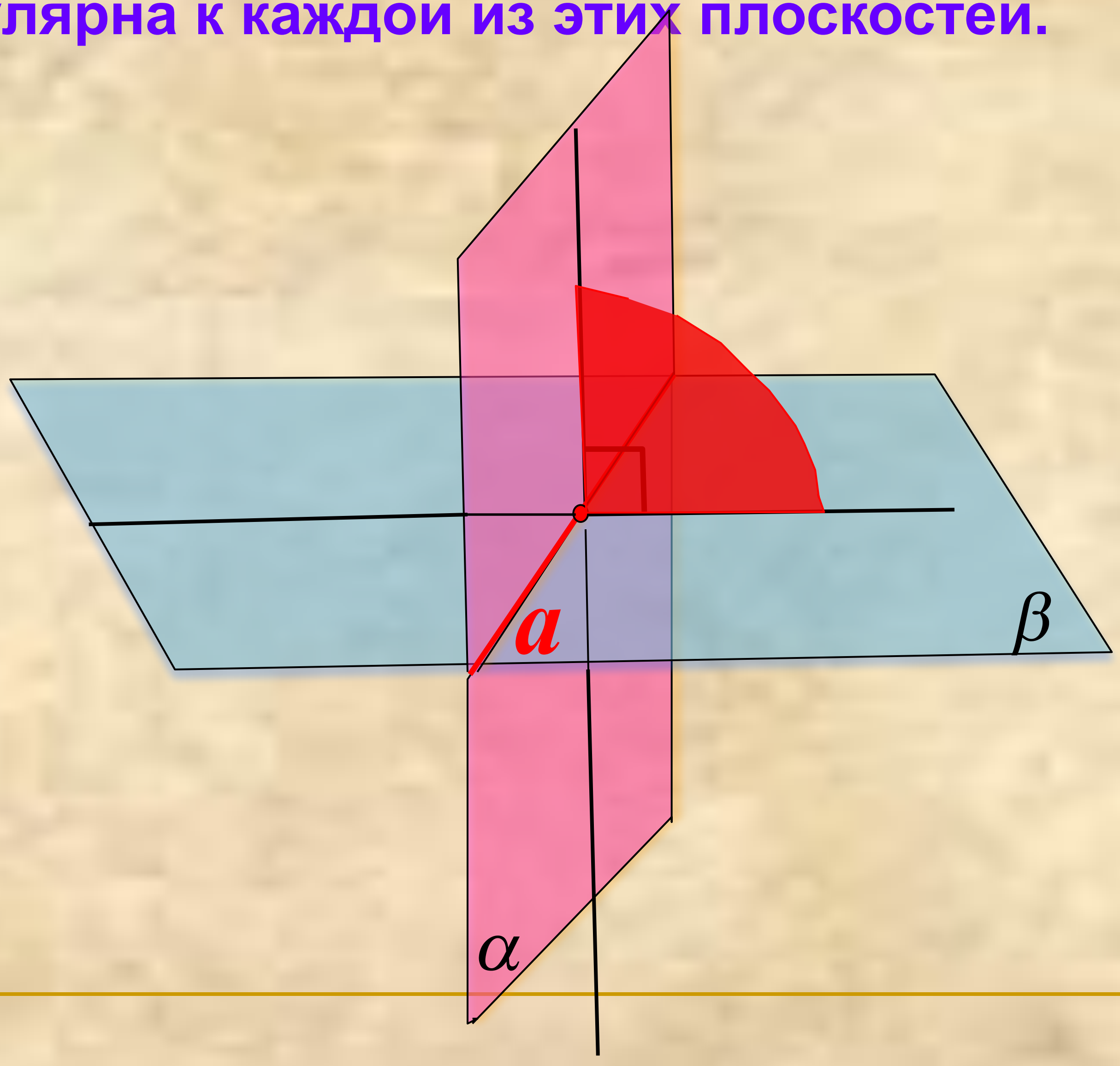
Примером взаимно перпендикулярных плоскостей служат плоскости стены и пола комнаты, плоскости стены и потолка.

Признак перпендикулярности двух плоскостей.

Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

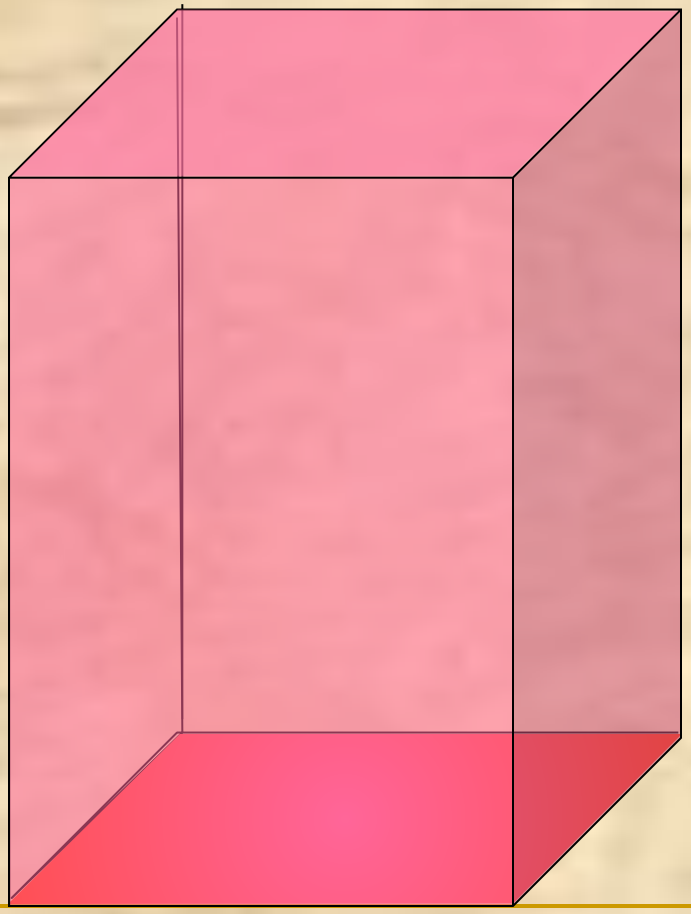


Следствие. Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.

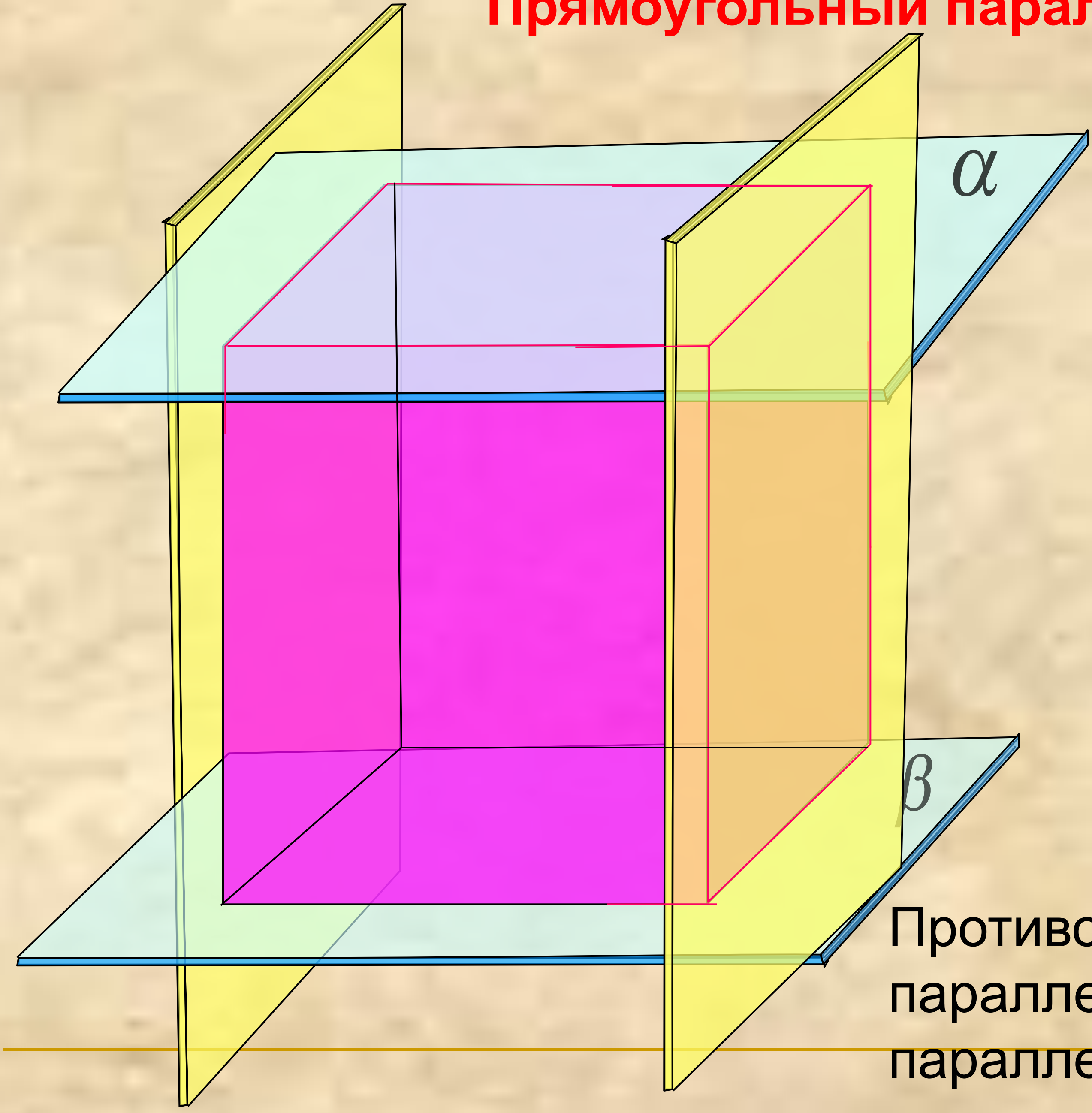


Прямоугольный параллелепипед

Параллелепипед называется прямоугольным, если его боковые ребра перпендикулярны к основанию, а основания представляют собой прямоугольники.



Прямоугольный параллелепипед



Противоположные грани параллелепипеда параллельны.

1^0. **В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней – прямоугольники.**

2^0. **Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда – прямые.**

Длины трех ребер, имеющих общую вершину, называются измерениями прямоугольного параллелепипеда.