Исследовательская работа на тему „Квадрат суммы и квадрат разности для матриц размером 2x2 “

МАОУ КУГ №1 – Универс
Профильнгая лаборотория математики
г.Красноярск
Выполнила :Исаенко Ю.А.

Цель и задачи:

Цель: изученить некоторые свойства квадратных матриц размерности 2x2 .

Задачи:

1.Исследовать некоторые свойства матриц $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2.Исследовать справедливость некоторых формул сокращенного умножения для квадратных матриц размерности 2x2

3.Исследовать справедливость свойства возведение в степень произведения квадратных матриц размерности 2x2 .

Обьект исследования - матрицы

Матрица-это прямоугольная таблица специального вида, состоящая из n строк и m столбцов, заполненная числами.

Например:
Матрица А называется матрицей размера mxn, числа a_{ij} называются ее элементми ,где i показывает номер строки , j - номер столбца

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Едини́чная ма́трица — квадратная матрица, элементы главной диагонали которой равны единице, а остальные равны нулю. Обозначается такая матрица E.

Например:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Виды матриц.

- Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется ***квадратной.***

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ например: } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ пример } \begin{pmatrix} 4 & 12 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ -5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

- Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов, называется **прямоугольной.**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ пример } \begin{pmatrix} 11 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

1.Умножение матрицы на число

Для того чтобы умножить матрицу размерностью (m x n) надо каждый элемент матрицы умножить на число.

Например:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot k = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot k & a_{12} \cdot k \\ a_{21} \cdot k & a_{22} \cdot k \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \ \mathbf{k} = 3;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \bullet 3 = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 & 2 \cdot 3 \\ 4 \cdot 3 & 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

<u>Справедливо переместительное свойство</u>

<u>Ak=kA</u>

2.Сумма (разность) матриц

Складываются соответствующие элементы матриц. Количество суммируемых матриц может быть произвольным. Для сложения матриц матрицы должны быть одной размерности m x n.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

$пример:$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 5+2 & 2+(-1) \\ 1+2 & 7+(-4) & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц.

Чтобы одну матрицу можно было умножить на другую матрицу нужно, чтобы число столбцов первой матрицы равнялось числу строк второй матрицы.

Умножение выполняется по следующему алгоритму:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) & 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Произведение двух матриц в общем случае зависит от порядка сомножителей, то есть оно не коммутативно:

AB≠BA

Исследование некоторых свойств матриц

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Выведем формулу для возведения матрицы X в n-ую степень.

$$X^2 = X \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = 2^{2-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X^3 = X^2 \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3 = 2^{3-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X^4 = X^3 \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow X^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^4 = 2^{4-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Исходя из вышеописанных примеров, предполагаем, что общей формулой будет

$$X^n = 2^{n-1} \cdot X \tag{1}$$

Докажем истинность формул с помощью метода математической индукции

$$X^n = 2^{n-1} * X \quad \textbf{(1)}$$

1) Пусть $n = 1; \quad X^1 = 2^{1-1} * X$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

-верно

2)В предположении ,что (1) верна для n=N докажем ,что формула(1) верна для n=N+1

$$X^{N+1} = X^N * X = 2^{N-1} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{N-1} & 2^{N-1} \\ 2^{N-1} & 2^{N-1} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{N-1} + 2^{N-1} & 2^{N-1} + 2^{N-1} \\ 2^{N-1} + 2^{N-1} & 2^{N-1} + 2^{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^N & 2^N \\ 2^N & 2^N \end{pmatrix} = 2^N * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2^N * X$$

Итак , $X^{N+1} = 2^N * X$,Значит, формула(1) верна для всех значений x€ N

Формула для возведения матрицы Y в n-ую степень.

Выведем формулу для возведения матрицы Y в n-ую степень.

$$Y^2 = Y \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow Y^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = 2^{2-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y^3 = Y^2 \cdot Y = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow Y^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^3 = 2^{3-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y^4 = Y^3 \cdot Y \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow Y^4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^4 = 2^{4-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y^n = 2^{n-1} \cdot Y$$

ость формулы(2) доказывается аналогично формуле (1).

Выведем формулу для возведения суммы матриц X и Y в n-ую степень.

$$(X+Y)^n = ?$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(X+Y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot E$$

$$(X+Y)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2^2 \cdot E$$

$$(X+Y)^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 2^3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2^3 \cdot E$$

Замечаем закономерность, которая выражена формулой

$$(X + Y)^n = 2^n \cdot E \qquad (3)$$

Докажем истинность формулы (3) с помощью метода математической индукции

$$(X+Y)^n = 2^n \cdot E \qquad (3)$$

1) $n=1; \qquad (X+Y)^1 = 2^1 * E = 2E$

2) *Пусть (3) верно для $n=k$, докажем, что (3) верна для $n=k+1$*

$$(X+Y)^{k+1} = (X+Y)^k \cdot (X+Y) = 2^k \cdot E \cdot (X+Y) = 2^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 0 \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix} =$$

$$= 2^{k+1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2^{k+1} \cdot E$$

Итак $(X+Y)^{k+1} = 2^{k+1} \cdot E;$ **Значит формула (3) верна для всех x€N**

.Исследуем истинность формулы $(X+Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} m & k \\ g & z \end{pmatrix}$$

$(X+Y)^2$

$$X+Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & k \\ g & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+m & b+k \\ c+g & d+z \end{pmatrix}$$

$$(X+Y)^2 = \begin{pmatrix} a+m & b+k \\ c+g & d+z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a+m & b+k \\ c+g & d+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+m)^2 + (b+k)(c+g) & (a+m)(b+k) + (b+k)(d+z) \\ (c+g)(a+m) + (d+z)(c+q) & (c+q)(b+k) + (d+z)^2 \end{pmatrix}$$

во втором случае, сложим квадрат матрицы X с удвоенным произведением матриц X Y и прибавим квадрат матрицы Y

$$X^2+2XY+Y^2$$

$$X^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} \qquad Y^2=\begin{pmatrix} m & k \\ g & z \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} m & k \\ g & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m^2+kg & mk+kz \\ gm+zg & gk+z^2 \end{pmatrix}$$

$$2*X*Y=X\cdot Y\cdot 2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} m & k \\ g & z \end{pmatrix}\cdot 2=\begin{pmatrix} am+bg & ak+bz \\ cm+dg & ck+dz \end{pmatrix}\cdot 2=\begin{pmatrix} 2am+2bg & 2ak+2bz \\ 2cm+2dg & 2ck+2dz \end{pmatrix}$$

$$X^2+2XY+Y^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2am+2bg & 2ak+2bz \\ 2cm+2dg & 2ck+2dz \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} m^2+kg & mk+kz \\ gm+zg & gk+z^2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a^2+bc+2am+2bg+m^2+kg & ab+bd+2ak+2bz+mk+kz \\ ca+dc+2cm+2dg+gm+zg & cb+d^2+2ck+2dz+gk+z^2 \end{pmatrix}$$

сравним получившиеся матрицы поэлементно, тоесть каждый элемент одной матрицы

с соответствующим элементом другой матрицы

$$(X+Y)^2$$

$$\begin{pmatrix} (a+m)^2+(b+k)(c+g) & (a+m)(b+k)+(b+k)(d+z) \\ (c+g)(a+m)+(d+z)(c+q) & (c+q)(b+k)+(d+z)^2 \end{pmatrix}$$

$$X^2+2XY+Y^2$$

$$\begin{pmatrix} a^2+bc+2am+2bg+m^2+kg & ab+bd+2ak+2bz+mk+kz \\ ca+dc+2cm+2dg+gm+zg & cb+d^2+2ck+2dz+gk+z^2 \end{pmatrix}$$

Обозначим p.q позицию элемента матрицы. Получаем

1.1 $kc = gb$ (1)

1.2 $mb + kd = ak + bz$ (2)

2.1 $cm + dg = ga + zc$ (3)

2.2 $gb = ck$ (4)

заметим, что условие (1)(4) совпадают

из (1) следует $\frac{k}{b} = \frac{g}{c}$

Сравним (2) и (3):

1.2 b(m - z) = k(a - d)

$$\Rightarrow \frac{c}{g} = \frac{a-d}{m-z}$$

2.1 c(m - z) = g(a - d)

В итоге получаем условие, при котором выполняется равенство $(X+Y^{)2=}X^2+2XY+Y^2$

Это будет пропорция:

$$\frac{c}{g}=\frac{b}{k}=\frac{a-d}{m-z}$$

(k,g, m-z≠0)

Проверим истинность формулы для особого случая, когда (k,g,m-n=0)

Тогда матрица Y имеет вид $Y=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$

$$X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad Y=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$$(X+Y)^2$$

$$X+Y=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+m & b \\ c & d+m \end{pmatrix}$$

$$(X+Y)^2=\begin{pmatrix} a+m & b \\ c & d+m \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} a+m & b \\ c & d+m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a+m)^2+bc & (a+m)b+b(d+m) \\ (a+m)c+(d+m)c & cb+(d+m)^2 \end{pmatrix}$$

$$X^2+2XY+Y^2$$

$$X^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} \qquad Y^2=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & m^2 \end{pmatrix}$$

$$X\cdot Y\cdot 2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\cdot 2=\begin{pmatrix} am & bm \\ cm & dm \end{pmatrix}\cdot 2=\begin{pmatrix} 2am & 2bm \\ 2cm & 2dm \end{pmatrix}$$

$$X^2+2XY+Y^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2am & 2bm \\ 2cm & 2dm \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & m^2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a^2+bc+2am+m^2 & ab+bd+2bm \\ ca+dc+2cm & cb+d^2+2dm+m^2 \end{pmatrix}$$

Сравниваем каждый элемент одной матрицы с элементом другой матрицы.

$(X+Y)^2$

$$\begin{pmatrix} (a+m)^2+bc & (a+m)b+b(d+m) \\ (a+m)c+(d+m)c & cb+(d+m)^2 \end{pmatrix}$$

$X^2+2XY+Y^2$

$$\begin{pmatrix} a^2+bc+2am+m^2 & ab+bd+2bm \\ ca+dc+2cm & cb+d^2+2dm+m^2 \end{pmatrix}$$

1.1 $(a+m)^2+bc=a^2+bc+2am+m^2$ (1)

1.2 $(a+m)b+b(d+m)=ab+bd+2bm$ (2)

2.1 $(a+m)c+(d+m)c=ca+dc+2cm$ (3)

2.2 $cb+(d+m)^2=cb+d^2+2dm+m^2$ (4)

В частном случае когда одна из матриц имеет вид

$$Y=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

,то формула $(X+Y)^2=X^2+2XY+Y^2$

является истинной

Исследование показали что все выводы сделанные для квадрата суммы двух матриц 2х2 ,справедливы и для квадрата разности таких матриц

Результат:

1.В общем случае для квадратных матриц порядка 2x2 формулы квадрата суммы ,квадрата разности, разности квадратов не являются истинными ,но при этом формулы истинны если выполняются пропорция.

$$\frac{\mathrm{c}}{g} = \frac{b}{k} = \frac{a - d}{m - z}$$