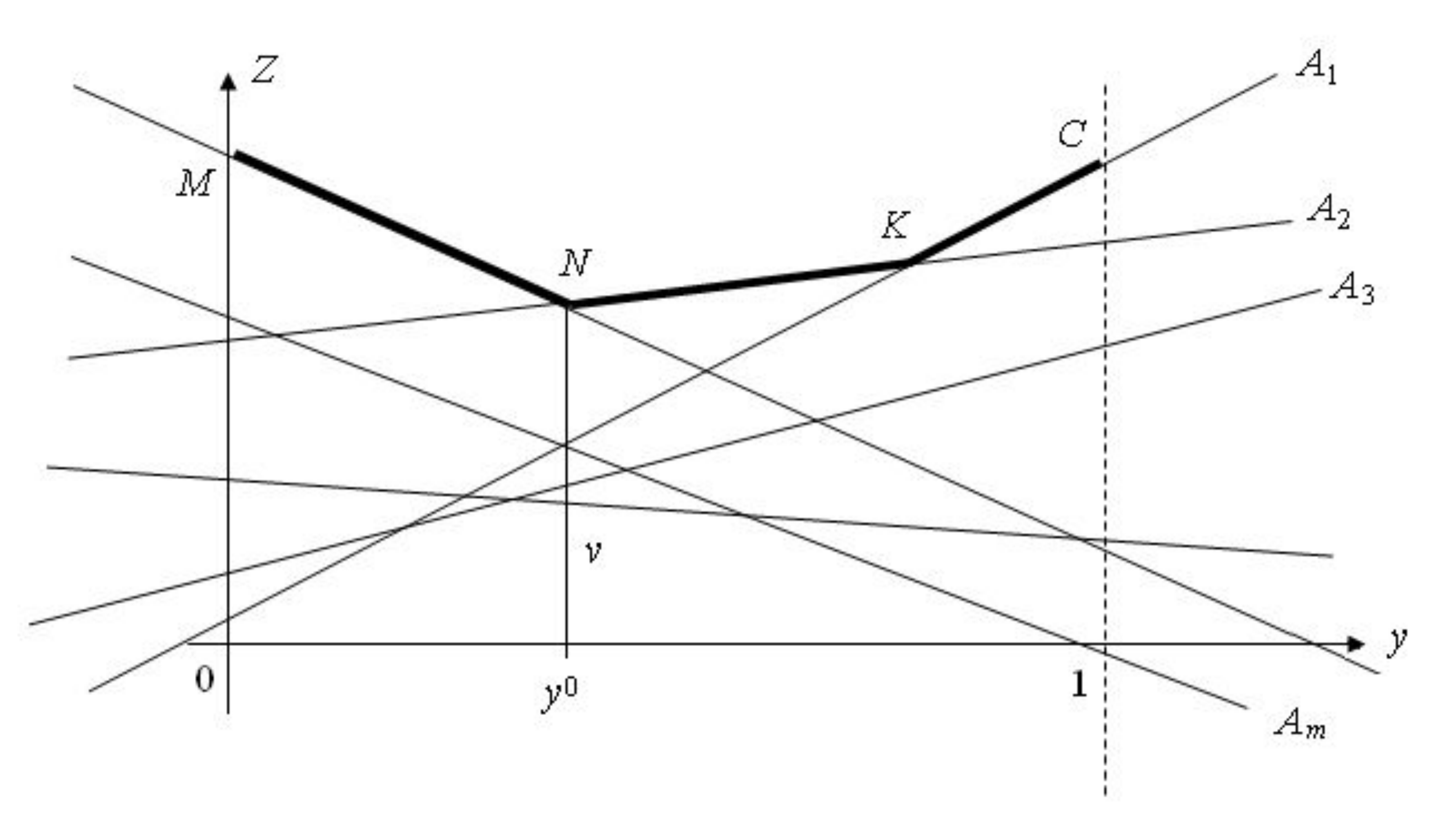
РЕШЕНИЕ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР m×2

Пусть игрок $P2$ применяет смешанную стратегию $Y = (y, (1 - y))$, а игрок $P1$ – чистую стратегию A_i $(i = 1, \ldots, m)$. Тогда средний проигрыш игрока $P2$ будет: $Z = a_{i1} \cdot y + a_{i2} \cdot (1 - y) : A_i$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}$$



В качестве активных стратегий игрока ***P*1** можно выбрать две чистых стратегии, соответствующие прямым, пересекающимся в ***N***. Пусть это $\boldsymbol{A_i}$ и $\boldsymbol{A_j}$.

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ a_{j1} & a_{j2} \end{pmatrix}$$

Оптимальную смешанную стратегию игрока ***P*1:** $X^0 = (x^0, (1 - x^0))$ можно определить как для игры **2×2**

$$a_{i1}x + a_{j1}(1-x) = V$$

$$a_{i2}x + a_{j2}(1-x) = V$$

$$X^0 = (0, \ldots, 0, \underbrace{x^0}_{i\text{-я компонента}}, 0, \ldots, 0, \underbrace{1 - x^0}_{j\text{-я компонента}}, 0, \ldots, 0)$$

ПРИМЕР 9

$A_1: \quad 4y + 3\,(1 - y) = Z$

$A_2: \quad 2y + 4\,(1 - y) = Z$

$A_3: \quad 5\,(1 - y) = Z$

$A_4: \quad -y + 6\,(1 - y) = Z$

$$A^* = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

В точке N пересекаются прямые **A_1 и A_4**

$4y + 3\,(1 - y) = -y + 6\,(1 - y)$

$y^0 = 3/8, \quad \boldsymbol{Y^0 = (3/8,\ 5/8)}$

$\boldsymbol{V = 27/8}$

$B_1: 4x^0 - (1 - x^0) = V$

$B_2: 3x^0 + 6\,(1 - x^0) = V$

$4x^0 - (1 - x^0) = 3x^* + 6\,(1 - x^0)$

$x^0 = 7/8,\ 1 - x^0 = 1/8$

$\boldsymbol{X^0 = (7/8,\ 0,\ 0,\ 1/8)}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

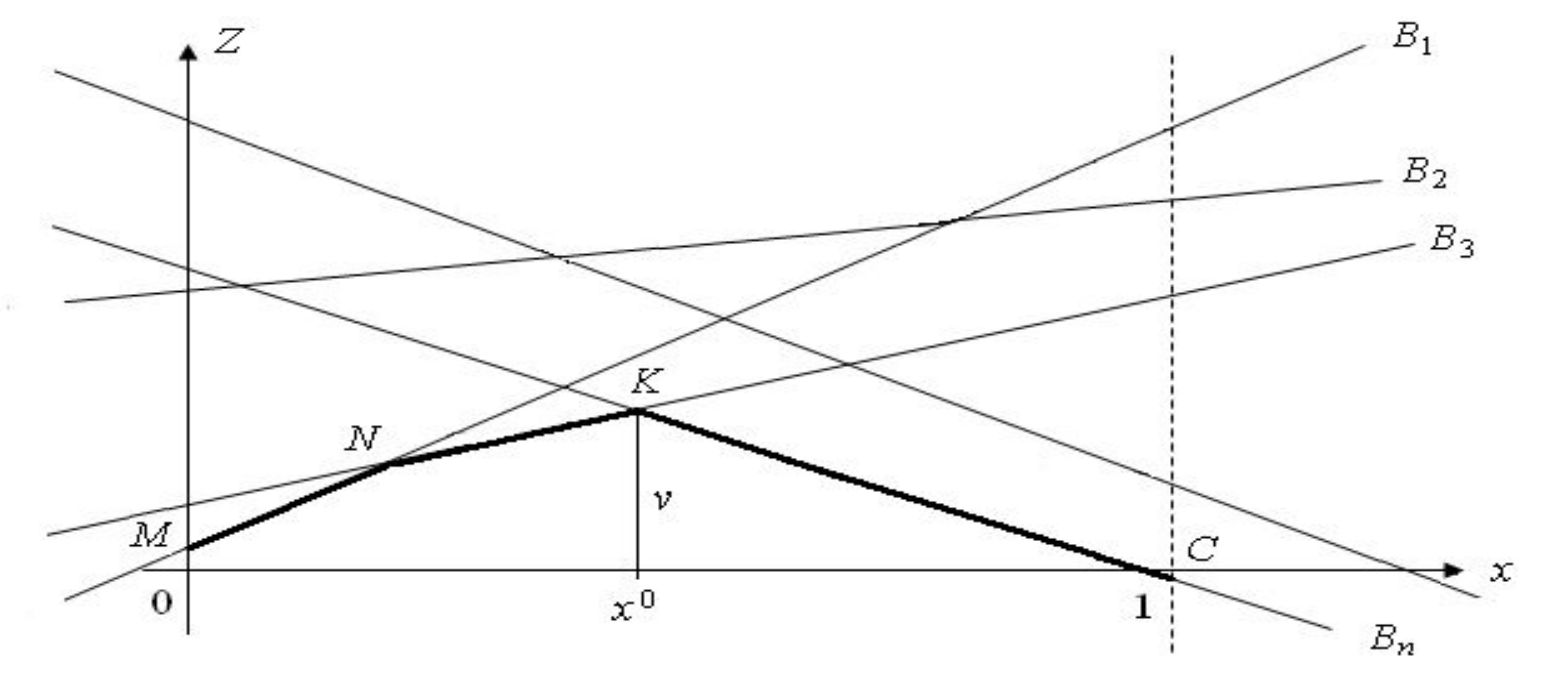
РЕШЕНИЕ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР 2×*n*

Пусть игрок **$P1$** применяет смешанную стратегию **$(x, 1–x)$**, а игрок **$P2$** – активную стратегию **B_j $(j = 1, …, n)$**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

$$B_i: \; Z = a_{1i}x + a_{2i}(1 - x)$$

Какую бы стратегию ни применил игрок **$P2$**, игрок **$P1$** получит выигрыш не менее ординаты ломаной линии ***MNKC***.



Оптимальная стратегия игрока $P1$: $X^0 = (x^0, (1 - x^0))$

Цена игры V равна ординате точки K

В качестве активных стратегий игрока $P2$ можно выбрать две чистых стратегии, соответствующих любым двум прямым, пересекающимся в точке K. Пусть это B_i и B_j

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix}$$

Оптимальную смешанную стратегию игрока $P2$ найти как в игре 2×2

$$a_{1i}y + a_{1j}(1-y) = Z$$

$$a_{2i}y + a_{2j}(1-y) = Z$$

$$Y^0 = (0, \ldots, 0,\ y^0,\ \ 0, \ldots, 0,\ 1 - y^0,\ 0, \ldots, 0)$$

i-я компонента j-я компонента

ПРИМЕР 10

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$B_1 : 2x + 4\,(1 - x) = Z$

$B_2 : 3x + 2\,(1 - x) = Z$

$B_3 : x + 3\,(1 - x) = Z$

$B_4 : 4x + \,(1 - x) = Z$

В точке $\boldsymbol{N}$ пересекаются прямые $\boldsymbol{B_3}$ и $\boldsymbol{B_4}$,

$$x + 3\,(1 - x) = 4x + \,(1 - x)$$

$$x^0 = 2/5, \quad \boldsymbol{X^0 = (2/5,\ 3/5)}$$

$$\boldsymbol{V = 11/5}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Активными стратегиями игрока $\boldsymbol{P2}$ будут $\boldsymbol{B_3}$ и $\boldsymbol{B_4}$,

$A_1 : y + 4\,(1 - y) = Z$

$A_2 : 3y + (1 - y) = Z$

$$y^0 = 3/5 \quad \boldsymbol{Y^0 = (0,\ 0,\ 3/5,\ 2/5)}$$

ПРИМЕР 11

$$A = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 9 & 5 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x \\ 1-x \end{array} \end{array}$$

$$Z = x + 9(1-x) = 9 - 8x,$$
$$Z = 4x + 5(1-x) = 5 - x,$$
$$Z = 6x + 3(1-x) = 3 + 3x.$$

$$5 - x = 3 + 3x \Rightarrow x^0 = \frac{1}{2},\ V = 4{,}5$$

$$X^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Активными стратегиями второго игрока являются вторая и третья стратегии

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Y^0 = \left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$$