Алгоритмы и структуры данных

Лекция 9.2

Часть 2

1. Случайные бинарные деревья поиска (БДП) (продолжение)
2. Операции вращения в БДП
3. Случайные БДП с рандомизацией

Случайные БДП

bst3.cpp

Пусть во входном потоке находится последовательность элементов, по которой функция *SearchAndInsert* строит БДП:

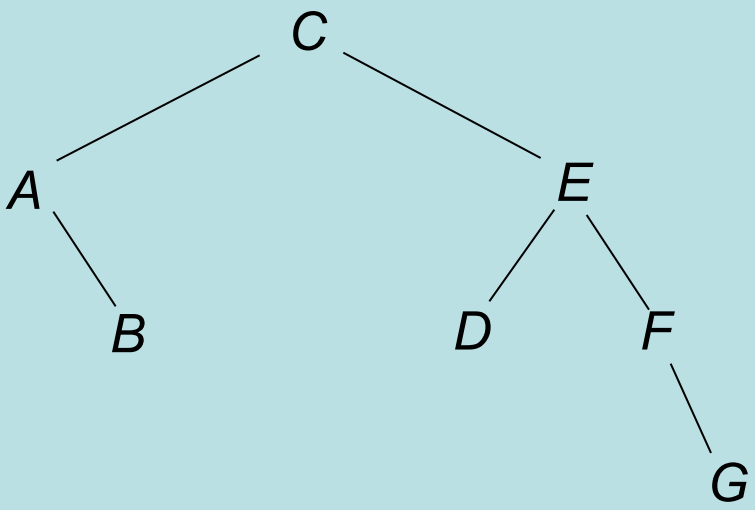
```
b = Create();
while (infile2 >> c)
{   SearchAndInsert (c, b);
}
```

БДП, построенное таким способом, называется *случайным БДП*

Случайные бинарные деревья поиска

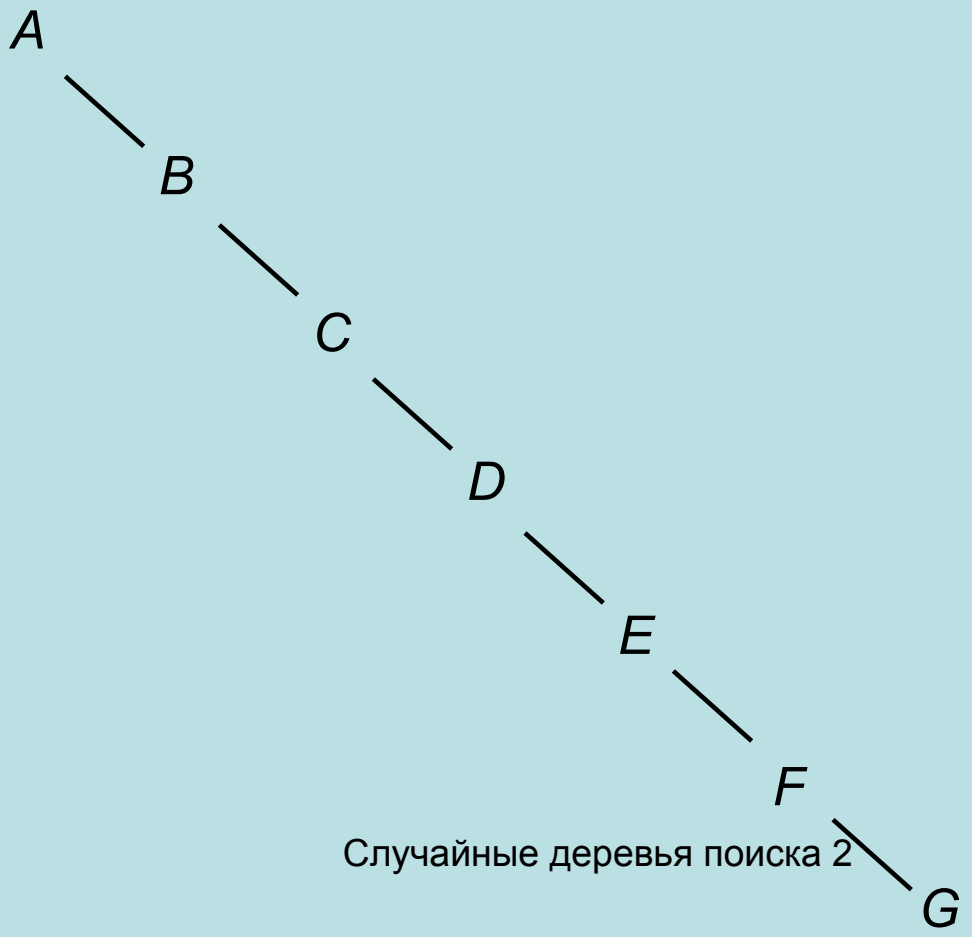
Входная последовательность (например, из файла):

C	E	A	F	B	D	G



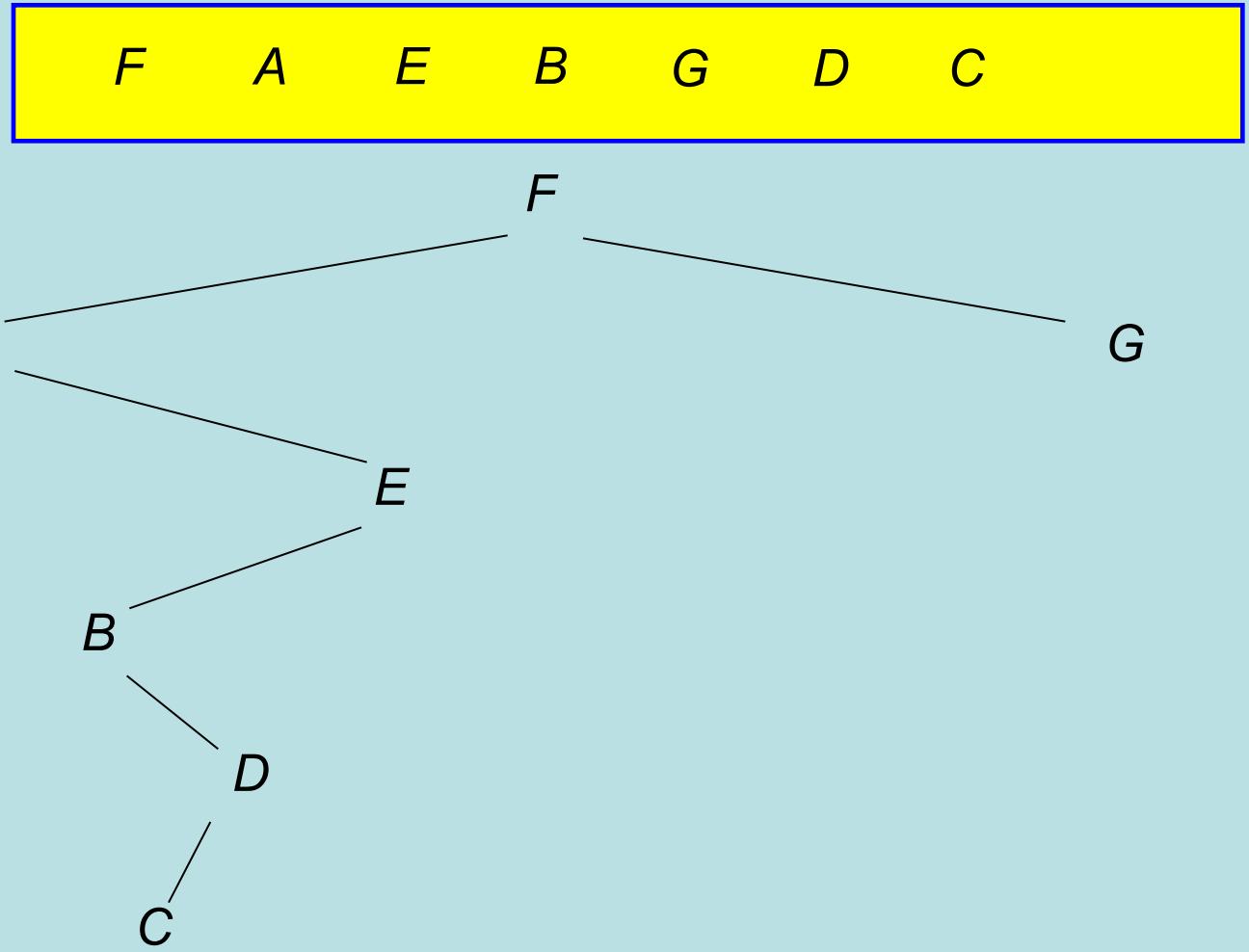
Случайные бинарные деревья поиска

Входная последовательность (например, из файла):



Случайные бинарные деревья поиска

Входная последовательность (например, из файла):



Среднее время поиска в случайных деревьях

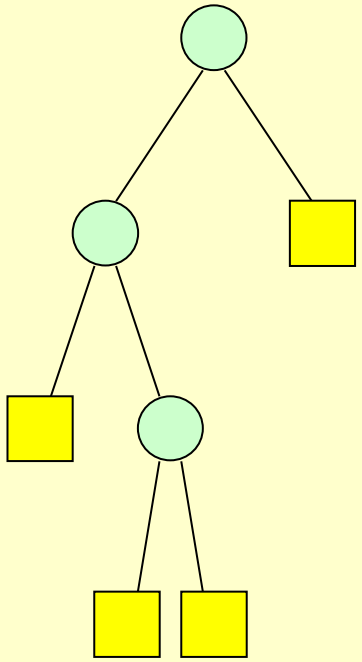


Рис. 2.2. Расширенное бинарное дерево из трех элементов

Полезные характеристики бинарных деревьев. *Расширенное* бинарное дерево получено из исходного заменой пустых поддеревьев на узлы специального типа, которые будем называть *внешними* узлами или листьями в отличие от остальных узлов исходного дерева, которые назовем *внутренними*.

Расширенное дерево *строго бинарное*. Такие деревья фактически уже рассматривались в задаче кодирования. Было показано, что в расширенном бинарном дереве из n внутренних узлов имеется ровно $n + 1$ внешний узел.

Определим 2 понятия: *длину внешних путей* $E(T)$ дерева T и *длину внутренних путей* $I(T)$.
Обозначим уровень узла b или длину пути от корня до него как $l(b)$. При этом $l(\textit{корень}) = 0$. Тогда длина внешних путей $E(T)$ определяется как

$$E(T) = \sum_{i=1}^{n+1} l(\boxed{i})$$

Длина внутренних путей $I(T)$ определяется аналогично как

$$I(T) = \sum_{i=1}^{n} l(\ i\ )$$

Для пустого дерева $E(T) = 0$ и $I(T) = 0$.

Оказывается, величины $E(T)$ и $I(T)$
связаны соотношением
$E(T) = I(T) + 2n$.

Доказательство проведем *по индукции*.

Пусть в дереве T из n внутренних узлов *левое* поддерево есть T_l, а число внутренних узлов в нем есть n_l. Аналогично для правого поддерева – T_r, n_r. Очевидно, $n_l + n_r = n - 1$. Тогда

$$E(T) = E(T_l) + E(T_r) + (n + 1),$$

$$I(T) = I(T_l) + I(T_r) + (n - 1).$$

Рассмотрим разность $D(T) = E(T) - I(T)$. Вычитая из рекуррентного соотношения для $E(T)$ рекуррентное соотношение для $I(T)$, получим

$$D(T) = D(T_l) + D(T_r) + 2.$$

Теперь покажем по индукции, что $D(T) = 2n$. Действительно, так как по индуктивному предположению $D(T_l) = 2n_l$ и $D(T_r) = 2n_r$, то $D(T) = 2n_l + 2n_r + 2 = 2(n_l + n_r + 1) = 2n$, что и завершает доказательство.

Среднее расстояние до внешнего узла равно $E(T) / (n + 1)$,

а *среднее расстояние до внутреннего узла* равно $I(T) / n$.

Обозначим для заданного БДП *среднее* число сравнений при *удачном* (т. е. закончившемся во внутреннем узле) поиске как $C(n)$, а среднее число сравнений при *неудачном* (т. е. закончившемся во внешнем узле) поиске как $C^*(n)$. Если считать все исходы поиска равновероятными, то имеем

$$C(n) = \frac{I(T)}{n} + 1, \quad C^*(n) = \frac{E(T)}{n+1}$$

Поскольку $E(T) = I(T) + 2n$, то отсюда следует, что в среднем по дереву

$$C^*(n) = \frac{n}{n+1}(C(n)+1)$$

или

$$C(n) = \frac{n+1}{n}C^*(n) - 1$$

Эти соотношения справедливы для любого БДП.

«Средние» по всем исходам поиска для данного БДП.

Затраты на поиск в случайном БДП

Число сравнений,

среднее по всем n! перестановкам входных данных, т. е. по всем возможным случайным БДП.

(Замечание. Вариант *по всем структурно различным* – иной результат)

Уже есть одно соотношение (см. слайд 11) для двух неизвестных нам величин $C(n)$ и $C^*(n)$.

Это соотношение верно для *заданного* дерева в среднем по всем предъявлениям элемента для поиска.

Для средних по всем перестановкам

- любой элемент данных находится *с равной вероятностью* на первой, второй и т. д. позиции в совокупности входных перестановок, т. е. *с равной вероятностью* он вставлялся как первый, второй и далее по порядку элемент дерева при последовательном построении дерева
- число сравнений при удачном поиске на единицу больше, чем число сравнений при том неудачном поиске элемента в дереве, после которого он был добавлен в дерево.

$$C(n) = 1 + \frac{C^*(0) + C^*(1) + C^*(2) + \ldots + C^*(n-1)}{n}. \quad (\#\#)$$

$$C(n) = \frac{n+1}{n} C^*(n) - 1 \qquad (***)$$

Заменив в (##) $C(n)$, используя (***), получим соотношение

$$C^*(n)\frac{n+1}{n} - 1 = 1 + \frac{1}{n}(C^*(0) + C^*(1) + \ldots + C^*(n-1))$$

или в иной форме

$$\begin{cases} (n+1)C^*(n) = (C^*(0) + \ldots + C^*(n-1)) + 2n & \text{для } n \\ nC^*(n-1) = (C^*(0) + \ldots + C^*(n-2)) + 2n - 2 & \text{для } n-1 \end{cases}$$

–

$$C^*(n) = C^*(n-1) + \frac{2}{n+1}$$

$$C^*(n) = C^*(n-1) + \frac{2}{n+1} \qquad C^*(0) = 0$$

Легко проверить, что решением этого рекуррентного соотношения является

$$C^*(n) = 2H(n+1) - 2$$

где $H(n)$ – частичная сумма *гармонического* ряда или *гармоническое* число (см. [7, 6.3], [9, 1.2.7]), т. е.

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

.

или в рекуррентном виде

$$H(n) = H(n-1) + \frac{1}{n}$$

$$C(n) = 2(1 + \frac{1}{n})H(n) - 3$$

Известно [7, 6.3], что $H(n) = \ln n + \gamma + \frac{1}{12n^2} + \ldots$

, где постоянная Эйлера $\gamma \approx 0.577$.

$$C^*(n) = 2\ln(n+1) + 2(\gamma - 1) + \frac{2}{12n^2} + \ldots$$

$n \uparrow$ $\quad C^*(n) \approx 2\ln(n+1)$ $\qquad C(n) \approx 2\ln n$

$\ln n = \ln 2 \cdot \log_2 n$

$\ln 2 \approx 0.693$

$$C(n) \approx C^*(n) \approx 1.386 \log_2 n$$

$$C(n) \approx C^{*}(n) \approx 1.386 \log_2 n$$

При поиске в случайном БДП

среднее число сравнений всего лишь на 39 % больше, чем в идеально сбалансированном дереве.

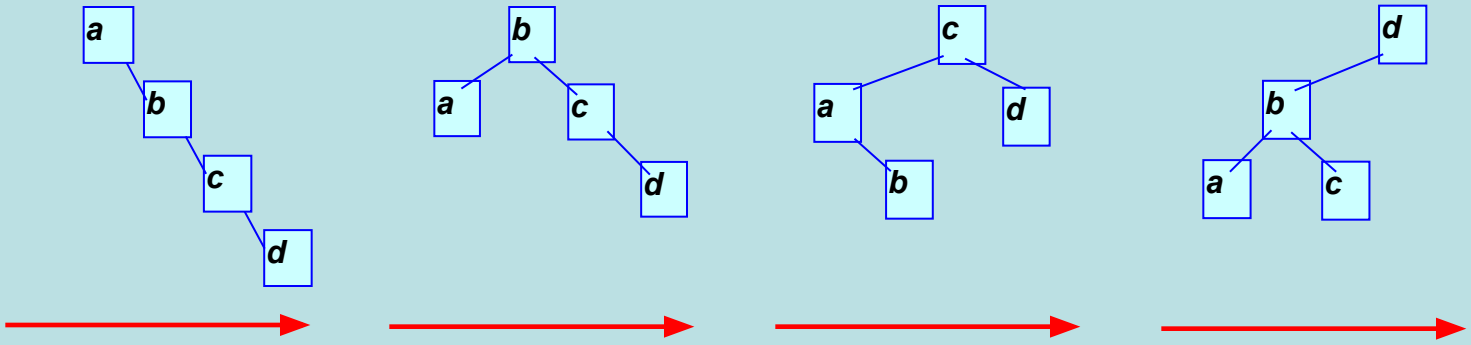
Это отражает тот факт
(см. пример на прошлой лекции «abcd»),
что среди случайных деревьев чаще встречаются *хорошо сбалансированные* (относительно «ровные») деревья, чем вырожденные.

Операции вращения в БДП

- В любом БДП *горизонтальный порядок* узлов фиксирован*, однако расположение узлов *по уровням дерева* зависит от способа его построения.
- Можно ли изменять относительное расположение узлов дерева *по вертикали*, сохраняя при этом инвариант дерева поиска?

---

* перечисление узлов БДП «слева направо», порождаемое ЛКП-обходом, дает упорядоченную последовательность.



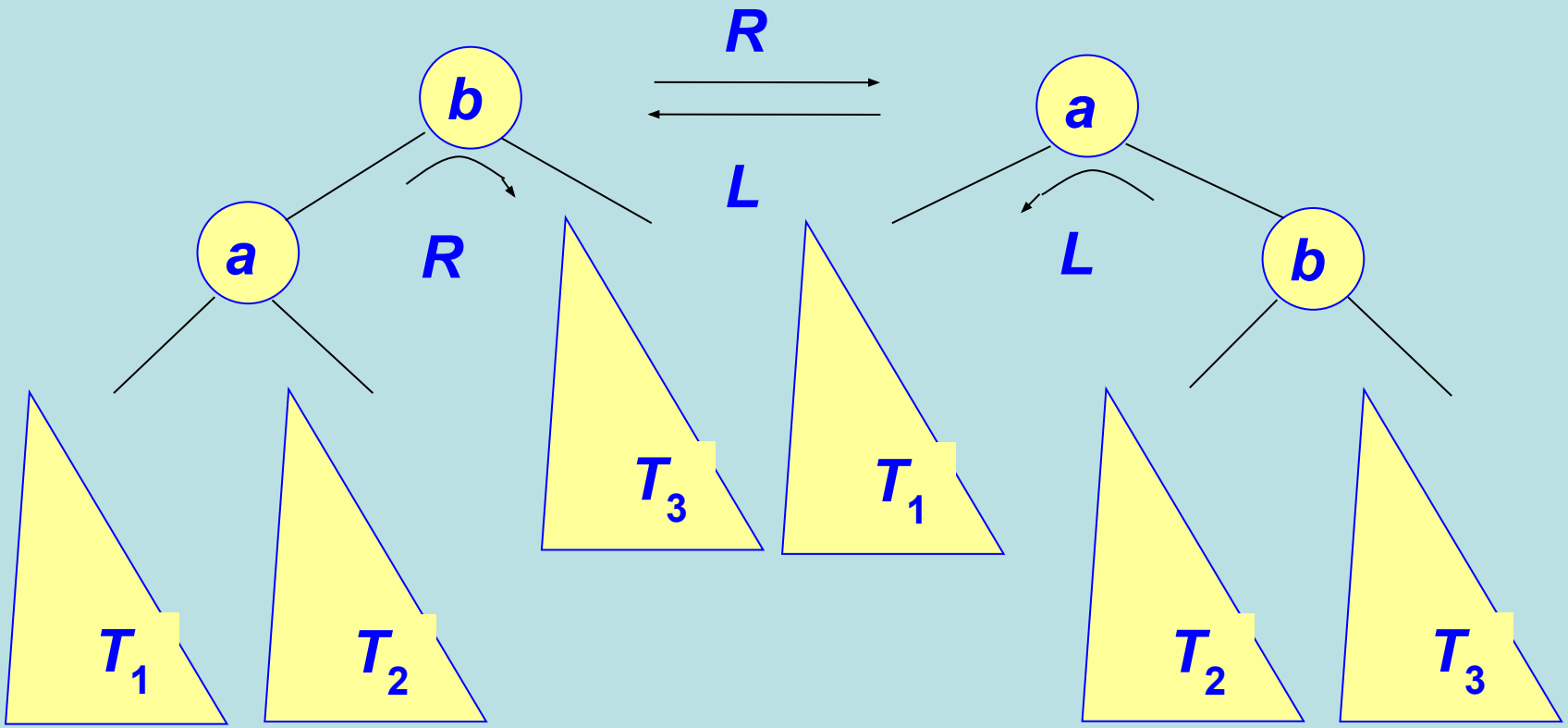


Рис. Операции правого *R* и левого *L* ***вращений*** с *перекреплением* в БДП

ЛКП-обходы дерева *до* и *после* операции вращения совпадают, а именно: (ЛКП(*T*1), *a*, ЛКП(*T*2), *b*, ЛКП(*T*3)).

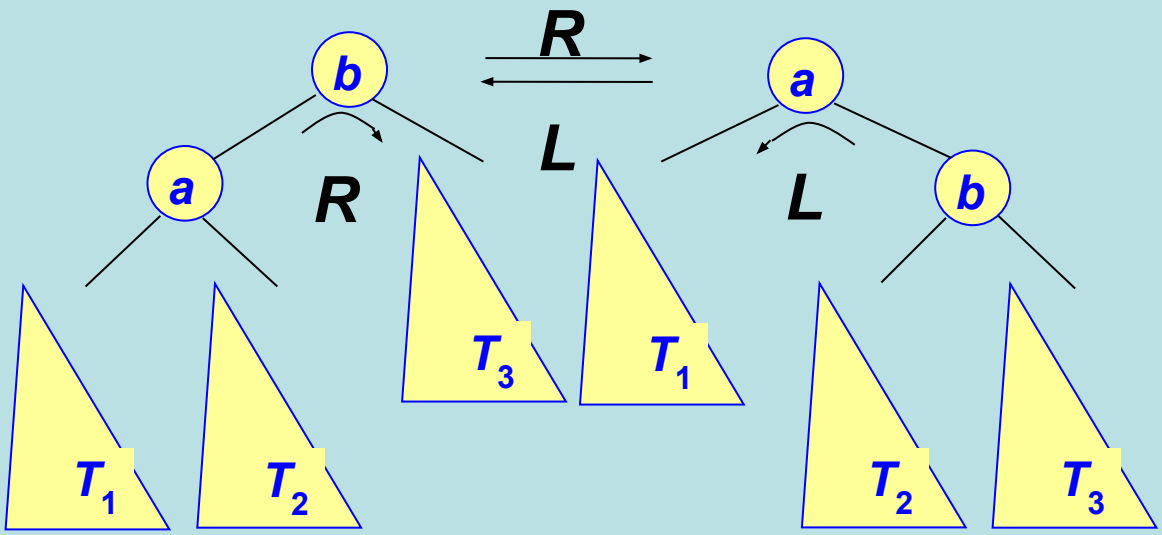
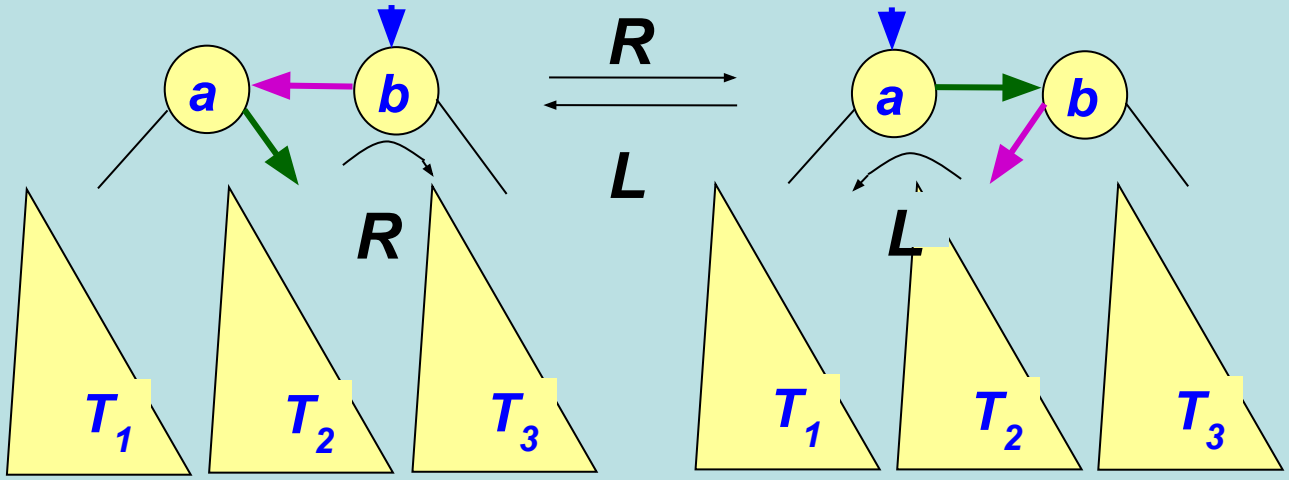


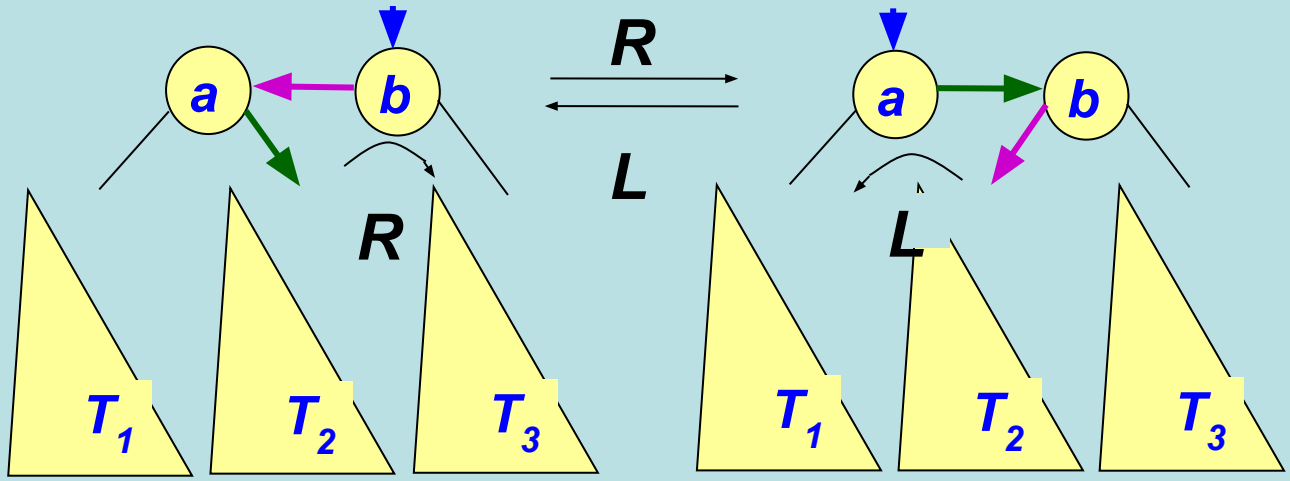
Рис. Операции правого *R* и левого *L* вращений с перекреплением в БДП

на корень

на правое

на левое






```
void rotateR (binSTree &t)
 //b - не пусто
  {  binSTree x;
     if (t==NULL){cout <<
"rotateR(NULL)" << endl; }
     else {
          x = t->lt;
          t->lt = x->rt;
          x->rt = t;
          t =x;
     }
  }
```

```
void rotateL (binSTree &t)
//b - не пусто
{     binSTree x;
      if (t==NULL){cout <<
"rotateL(NULL)" << endl; }
      else {
           x = t->rt;
           t->rt = x->lt;
           x->lt = t;
           t =x;
      }
}
```

Случайные бинарные деревья поиска с рандомизацией

В некоторых случаях полезно при добавлении нового узла сделать так, чтобы этот узел стал ***корнем*** БДП.

1. Построенные таким образом БДП имеют некоторые полезные свойства.
2. Операция *вставки в корень* будет использоваться в модификации случайных БДП, рассмотренной далее.

Вставка в корень БДП

Рекурсивный способ

1. **Если** вставляемый элемент *больше* корня БДП,
   то его место *в правом* поддереве.
   Поэтому *сначала* рекурсивно *вставим* этот элемент *в качестве корня правого поддерева*,
   а затем с помощью левого вращения *поднимем его в корень* дерева.

2. **Если** вставляемый элемент *меньше* корня БДП,
   то его место в *левом* поддереве.
   Поэтому *сначала* рекурсивно *вставим* этот элемент *в качестве корня левого поддерева*,
   а затем с помощью правого вращения *поднимем его в корень* дерева.

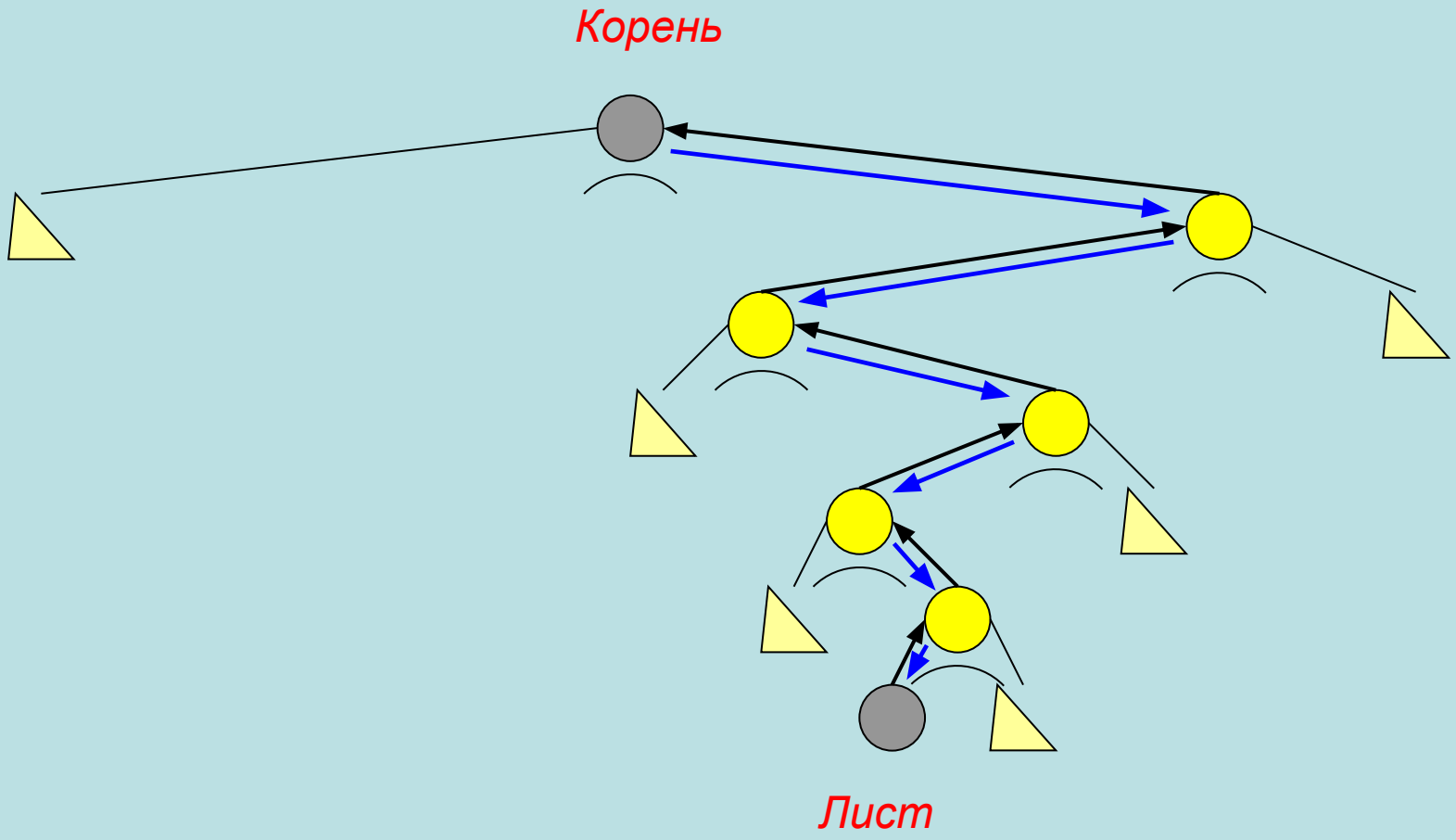
// вставка в корень

bst4.cpp

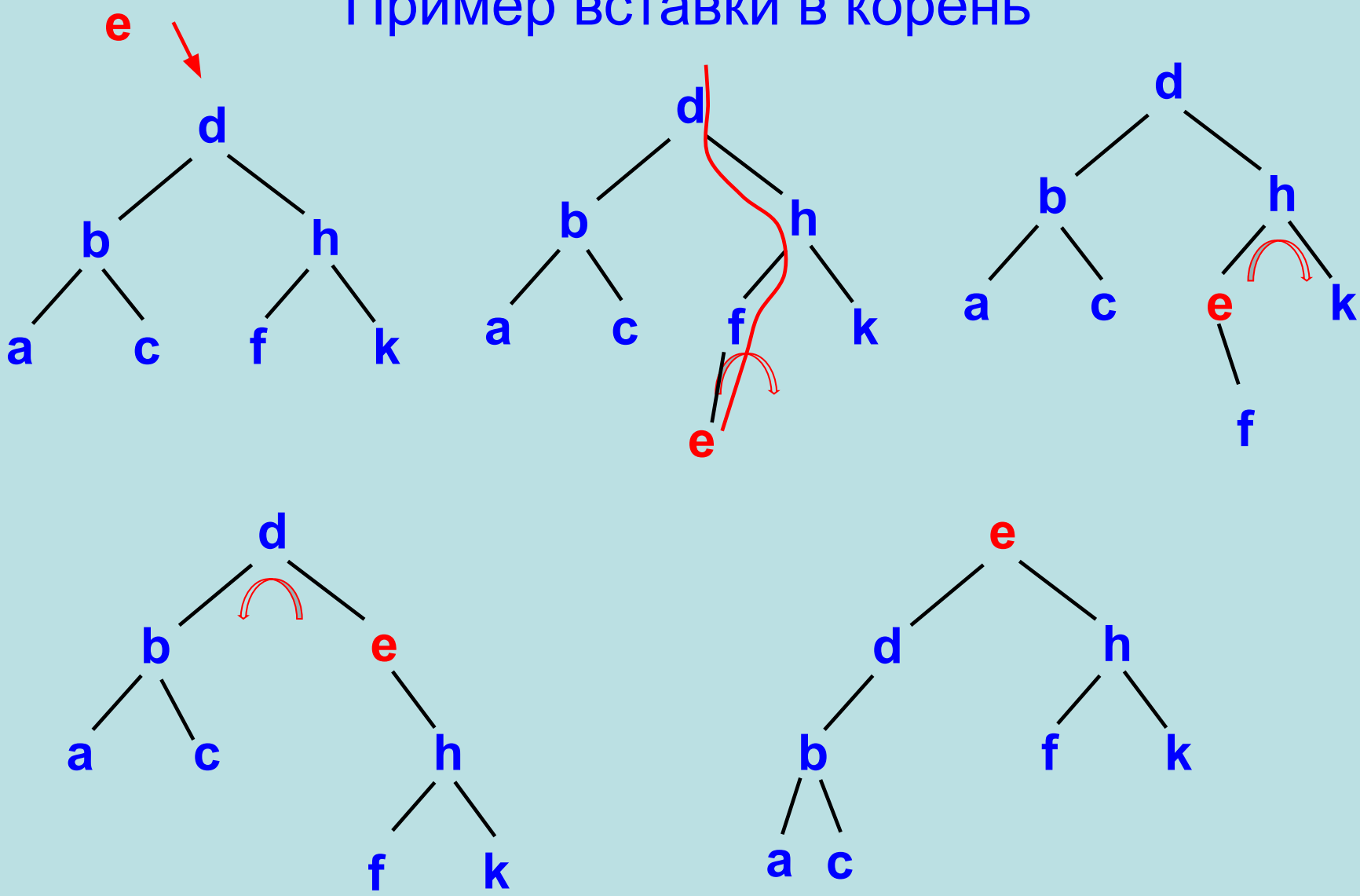
```
void insInRoot (binSTree &b, base x)
{if (b==NULL) {
        b = new node;
        if ( b != NULL) {
              b ->info = x;
              b ->count = 1;
        }
        else {cerr << "1 Memory not enough\n"; exit(1);}
 }  else
 if (x < b->info) {insInRoot (b->lt, x); rotateR (b);}
 else if (x > b->info) {insInRoot (b->rt, x); rotateL (b);}
 else b->count++;
}
```

1. *Прокладка трассы* от корня до нового листа

2. Подъём по трассе с вращениями



Пример вставки в корень



Применение вставки в корень

В некоторых задачах *частота обращений* к поиску с некоторым значением ключа возрастает после добавления этого ключа в БДП.

Например, при обработке финансовых транзакций, когда актуальность старых данных постепенно уменьшается, а актуальность новых («свежих») данных велика.

Рандомизация в случайных БДП

Идея модификации случайных БДП – *чередование обычной вставки* в дерево поиска *и вставки в корень*.

Чередование происходит *случайным (рандомизированным)* образом с использованием компьютерного генератора псевдослучайных чисел (например, функции *rand()* в *C++*).

Цель такого чередования – сохранить *хорошие свойства* случайного БДП *в среднем* и исключить (сделать маловероятным) появление «худшего случая» (поддеревьев большой высоты).

Рандомизированная вставка элемента x в БДП

Пусть в дереве имеется *n* узлов. Считаем, что после добавления еще одного узла *любой узел* (теперь из *n* +1 узла) *с равной вероятностью может быть корнем* дерева.

Пусть абстрактная булевская функция *chance* (*k*) выдает значение *true* с вероятностью *1/k*.

Тогда, **если** *chance* (*n* +1) = *true*,

то осуществим *вставку в корень*,

иначе рекурсивно используем *рандомизированную вставку* в левое или правое поддерево в зависимости от значения ключа *x*.

Набросок процедуры *рандомизированной вставки* в БДП

```
void randomInsert (binSTree &b, base x)
{    if (b==NULL) {
            b = new node;
            if ( b != NULL) {
                b ->info = x; b ->count = 1; b ->number = 1;
                return;
            }
            else {cerr << "1 Memory not enough\n"; exit(1);}
     }
     if (chance(b ->number  + 1)) {insInRoot (b, x); return;}
     if (x < b->info) randomInsert (b->lt, x);
     else randomInsert (b->rt, x);
     b ->number ++;
}
```

Здесь предполагалось, что

- в каждом узле дерева в поле *number* хранится количество узлов поддерева, корнем которого является данный узел
- осуществляется «чистая» вставка, т. е. заранее известно, что элемент *x* в дереве отсутствует
- процедуры *insInRoot*, *rotateR* и *rotateL* изменены так, что они при своей работе правильно корректируют поле *number* в соответствующих узлах дерева

Выводы

Оказывается [16], что

случайные БДП с рандомизацией имеют в среднем примерно такие же характеристики, что и случайные БДП, *однако* в тех случаях, когда нарушается предположение о случайном порядке вставки элементов в БДП, т. е. когда характеристики случайного БДП значительно ухудшаются, деревья с рандомизацией сохраняют свои хорошие характеристики за счет «принудительной» рандомизации своей структуры.

Выводы

Можно сказать, что
в просто случайных БДП степень «случайности» регулируется *порядком элементов входной последовательности* узлов,
а в случайных БДП *с рандомизацией – генератором псевдослучайных чисел.*

Примечание

Термин *«в среднем»* имеет разный смысл
в *случайных БДП*
и в *БДП с рандомизацией.*

Среднее по разным «ансамблям»:

- в *случайных БДП – по разным входным последовательностям*
- в *БДП с рандомизацией – для одной входной последовательности по значениям Random*

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ