8-дәріс. Математикалық талдауға кіріспе
Тамаша шектер

Бірінші тамаша шек $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=1.$

1-мысал. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{m\cdot\sin mx}{m\cdot x}=m\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{m\cdot x}=m\cdot 1=m.$

2-мысал. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos kx}{x^2}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot\sin^2\dfrac{kx}{2}}{x^2}=$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{kx}{2}}{x}\cdot\frac{\sin\dfrac{kx}{2}}{x}=2\cdot\frac{k^2}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{kx}{2}}{\dfrac{kx}{2}}\cdot\frac{\sin\dfrac{kx}{2}}{\dfrac{kx}{2}}=2\cdot\frac{k^2}{4}\cdot 1\cdot 1=\frac{k^2}{2}.$$

б) Екінші тамаша шек.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left|1^{\infty}\right|=e=2{,}7182818284523...$$

немесе

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left|1^{\infty}\right|=e$$

Бұл $\left|1^{\infty}\right|$ түріндегі анықталмағандықты шешу үшін қолданылатын тәсіл.

$y=\log_a x$ функциясында $a=e$ болса, онда $y=\ln x$ - натурал логарифм деп аталады. $\lg x=\dfrac{\ln x}{\ln 10}=\lg e\cdot\ln x$, $\lg e=M$ - ауысу модулі.

Сонда $\lg x=M\ln x$, $\ln x=\dfrac{1}{M}\lg x$, $\dfrac{1}{M}\approx 2{,}302585$.

3-мысал. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-3}{5x+4}\right)^{2x+1} = \left|1^{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+4-7}{5x+4}\right)^{2x+1} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{7}{5x+4}\right)^{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-7}{5x+4}\right)^{\frac{5x+4}{-7}}\right]^{\frac{-7(2x+1)}{5x+4}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-14x-7}{5x+4}} = e^{-\frac{14}{5}}$$

4-мысал. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^{x} = \left|1^{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{x} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right]^{\frac{x\cdot(8x-3)}{x^2-3x+7}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2-3x}{x^2-3x+7}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8-\frac{3}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}} = e^{8}.$$

Шексіз аз және шексіз көп функциялар (шамалар).

Егер $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ немесе $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$ болса, онда $\alpha=\alpha(x)$ функциясы (шамасы) *шексіз аз функция (шама)* деп аталады.

Егер $y=f(x)$ функциясын $y=\boldsymbol{в}+\alpha(x)$, $\alpha(x)-$ ақырсыз кішкене шама, түрінде жазуға мүмкін болса, онда $\lim y=в\,(x\to a$ немесе $x\to\infty$). Керісінше $\lim y=\boldsymbol{в}$ болса, онда $y=\boldsymbol{в}+\alpha$, $\alpha\to 0$ түрінде жазуға болады.

Егер $\alpha(x)$ ақырсыз кішкене шама болса, яғни $\alpha(x)\to 0$, онда $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ ақырсыз үлкен шама деп аталады, $\dfrac{1}{\alpha(x)}\to\infty$.

Сонымен, егер $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, онда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\alpha(x)}=\infty$.

Шексіз аз шамалардың қасиеттері

1^0 Шексіз аз шамалардың алгебралық қосындысы да шексіз аз шама болады.

2^0 Шексіз аз шама $\alpha = \alpha(x)$-тің шектелген $z = z(x)$ функциясына $\alpha(x) \cdot z(x)$көбейтіндісі де шексіз аз шама болады.

3^0 Шексіз аз шама $\alpha(x)$-тің $z(x)$ функциясына қатынасы $\dfrac{\alpha(x)}{z(x)}$ да шексіз аз шама болады ($\lim\limits_{x \to a} z(x) = 0$).

α, β - шексіз аз шамалар болсын.

Егер $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = A \neq 0$ болса, онда шексіз аз α және β шамалары *бірдей өлшемді шексіз аз шамалар* деп аталады.

Егер $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$ болса, онда α және β *эквивалент шексіз аз шамалар* деп аталады.

Е с к е р т у. Егер $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}$ - шегі жоқ болса және шексіздікке ұмтылса, онда α мен β салыстырылмайды дейді.

Эквивалент ақырсыз кішкене шамалар. Егер $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$ болса, онда α және β эквивалент ақырсыз кішкене шамалар деп аталады. $(\alpha \approx \beta)$

Егер $\alpha(x)$ функциясы $x \to a$-да ақырсыз аз шама болса, онда

1. $\sin\alpha(x) \approx \alpha(x)$.

2. $tg\alpha(x) \approx \alpha(x)$.

3. $\arcsin\alpha(x) \approx \alpha(x)$.

4. $arctg\alpha(x) \approx \alpha(x)$.

5. $1-\cos\alpha(x) \approx \frac{(\alpha(x))^2}{2}$.

6. $(1+\alpha(x))^a - 1 \approx a \cdot \alpha(x)$.

7. $\log_a(1+\alpha(x)) \approx \frac{\alpha(x)}{\ln a}$.

8. $\ln(1+\alpha(x)) \approx \alpha(x)$.

9. $a^{\alpha(x)} - 1 \approx \alpha(x)\ln a$.

10. $e^{\alpha(x)} - 1 \approx \alpha(x)$.

11. $\sqrt[n]{1+\alpha(x)} \approx \frac{\alpha(x)}{n}$.

12. $(1+\alpha(x))^{1/\beta(x)} \approx e^{\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}}$.

Функция үзіліссіздігі

Бір жақты шектер. Егер x айнымалы a-дан кіші мәндер қабылдап a санына ұмтылғанда $f(x)$ функциясы b_1-ге ұмтылса, онда былай белгіленеді:

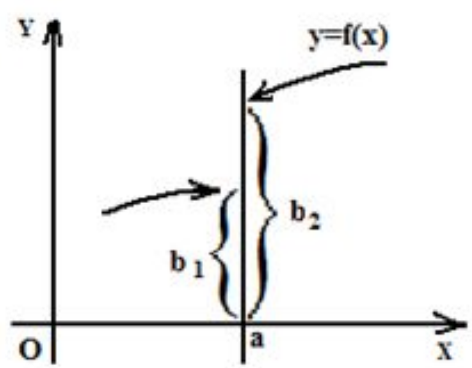
$$f(a-0)=\lim_{x\to a-0} f(x)=b_1$$

және b_1-ді $f(x)$ функциясының a нүктесіндегі *сол жақ шегі* деп атайды.

Егер x айнымалы a санынан тек үлкен мәндер қабылдап a-ға ұмтылса, онда былай белгіленеді

$$f(a+0)=\lim_{x\to a+0} f(x)=b_2$$

және b_2-ні $f(x)$ функциясының a нүктесіндегі *оң жақ шегі* деп атайды.



5-мысал. $f(x)=e^{\frac{1}{x-a}}$ функциясының $x \to a$-да біржақты шектерін табу керек.

Шешуі: Егер $x \to a-0$ болса, онда $\frac{1}{x-a}=\frac{1}{-0}=-\infty.$

Сонымен, $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a-0} e^{\frac{1}{x-a}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0.$

Егер $x \to a+0$ болса, онда $\frac{1}{x-a}=\frac{1}{+0}=+\infty.$

Сонымен, $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} e^{\frac{1}{x-a}}=e^{+\infty}=+\infty.$

Функцияның нүктедегі және аралықтағы үзіліссіздігі. $y = f(x)$ функциясы берілсін. $x_0 \in X$ - анықталу облысы болсын. Егер

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

болса, онда $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде *үзіліссіз функция* деп аталады.
Бұл анықтама мынадай үш шарттың орындалуымен мәндес деп саналады:

а) x_0 нүктесі өзінің қандай да бір маңайымен қоса X анықталу облысына тиісті болады;

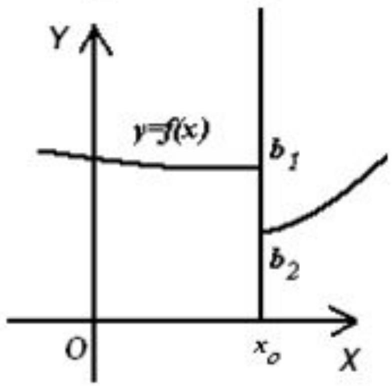
ә) x_0 нүктесінде функцияның бір жақты шектері бар және олар өзара тең, яғни $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$ болады;

б) функциясының бір жақты шектері оның осы x_0 нүктедегі мәніне тең, яғни $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$ болады.

Егер $f(x)$ функциясы қандай да бір аралықтың әрбір нүктесінде үзіліссіз болса, онда ол сол *аралықта үзіліссіз функция* деп аталады.

Үзіліс нүктелері және олардың түрлері. Функцияның үзіліссіздік шарттарының кемінде біреуі орындалмайтын нүктелері оның *үзіліс нүктелері* деп аталады.

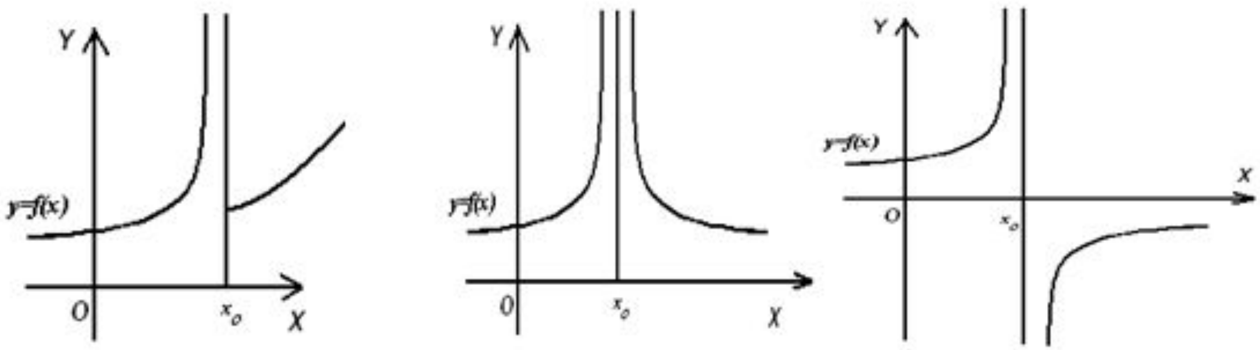
Ү з і л і с т ү р л е р і. 1) Егер x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясының сол жақ және оң жақ шектері бар болып, бірақ олар бір-біріне тең болмаса, немесе олар бір-біріне тең, бірақ олар x_0 нүктесіндегі функцияның мәніне тең емес (немесе $f(x_0)$ анықталмаған болса), онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының *бірінші текті үзіліс нүктесі* деп аталады.



$$f(x_0-0)=b_1,\ f(x_0+0)=b_2,$$
$$f(x_0-0)-f(x_0+0)=b_1-b_2<\infty,$$
$$b_1\neq b_2$$

Ендеше x_0 нүктесінде 1-ші текті үзіліс

2) Егер x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясының бір жақты шектерінің кемінде бірі шексіз болып, не тіпті ол болмаса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының *екінші текті үзіліс нүктесі* деп аталады.



3) Егер x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясының шегі бар (яғни сол жақ және оң жақ шектері бір-біріне тең) болса, бірақ ол x_0 нүктесіндегі функцияның мәніне тең емес (немесе $f(x_0)$ анықталмаған болса), онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының *жөнделетін үзіліс нүктесі* деп аталады.

6-мысал. $x=4$ нүктесінде $y=\dfrac{x}{x-4}$ функциясы үзілісті екенін көрсету керек.

Шешуі: $\lim\limits_{x\to 4-0}\dfrac{x}{x-4}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 4+0}\dfrac{x}{x-4}=+\infty$,

яғни берілген функцияның $x\to 4$ -да не сол жақ, не оң жақ ақырлы шегі жоқ. Ендеше, $x=4$ - екінші текті үзіліс нүктесі болады.

7-мысал. $x=4$ нүктесінде $y=arctg\dfrac{1}{x-4}$ функциясы үзілісті екенін көрсету керек.

Шешуі: Егер $x\to 4-0$ болса, онда $\dfrac{1}{x-4}\to-\infty$ және $\lim\limits_{x\to 4-0}y=-\dfrac{\pi}{2}$.

Егер $x\to 4+0$ болса, онда $\dfrac{1}{x-4}\to+\infty$ және $\lim\limits_{x\to 4+0}y=\dfrac{\pi}{2}$.

Сонымен, $x\to 4$ -да берілген функцияның сол жақ және оң жақ ақырлы шектері бар, бірақ олар әртүрлі.

Ендеше, $x=4$ - бірінші текті үзіліс (секіріс) нүктесі. $x=4$ нүктесінде секіріс $\dfrac{\pi}{2}-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi$ -ге тең.

8-мысал. $y = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ функциясын үзіліссіздікке зерттеу керек.

Шешуі: $x = 5$ нүктесінде функция анықталмайды, себебі x орнына 5 қойсақ, $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық аламыз. Басқа нүктелерде $x - 5 \neq 0$ болғандықтан бөлшекті $(x - 5)$ -ке қысқартамыз. Сондықтан, $y = x + 5$ болады. Бұдан $\lim\limits_{x \to 5-0} y = \lim\limits_{x \to 5+0} y = 10$.

Сонымен, $x = 5$ болғанда функция жөнделетін үзілісті болады. Егер $x = 5$ болғанда $y = 10$ деп ұйғарсақ функция үзіліссіз болады.

Сонда $y = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ функциясы барлық x нүктесінде үзіліссіз. Мұндай функция графигі $y = x + 5$ түзуі болады.