19.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ 1 РОДА

Предположим, что на кривой *L* положение точки *M* определяется длиной дуги *AM*=*S*, отсчитываемой от начальной точки *A*.

Тогда кривая *L* параметрически выразится уравнениями вида

$$x = x(s)$$

$$y = y(s)$$

При этом функция *f(x,y)* сведется к сложной функции *f(x(s),y(s))*.

Пусть s_i – длины дуг, соответствующие выбранному делению дуги *AB* точками A_i. Тогда

$$\sigma_i = s_{i+1} - s_i = \Delta s_i$$

Пусть $\bar{s}_i$ - значение s, определенное точкой M_i.

$$s_i \le \bar{s}_i \le s_{i+1}$$

Тогда интегральная сумма для криволинейного интеграла станет интегральной суммой определенного интеграла:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \sigma_i = \sum_{i=1}^{n} f(x(\bar{s}_i), y(\bar{s}_i)) \cdot \Delta s_i$$

Тогда криволинейный интеграл 1 рода сводится к определенному интегралу по формуле:

$$\int_L f(x,y)\,dS = \int_0^s f(x(s),y(s))\,ds$$

1

Пусть теперь кривая *L* задана параметрически:

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \psi(t)$$

где

$$\alpha \le t \le \beta$$

и функции

$$\varphi(t) \quad u \quad \psi(t)$$

непрерывны вместе со своими производными.

Если возрастанию дуги *S=AM=S(t)* отвечает возрастание параметра *t*, то

$$dS = S'(t)dt$$

$$S'(t) = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$$

$$dS = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} \cdot dt$$

Заменяя в (1) переменную в интеграле, получаем:

$$\int_L f(x,y)\,dS = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t)) \cdot \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\,dt$$

2

Таким образом, для вычисления криволинейного интеграла 1 рода надо заменить в подынтегральном выражении переменные x и y через параметр, а дифференциал дуги dS выразить как функцию параметра.

Если кривая *L* задана явным уравнением: $y = y(x)$

где

$$a \le x \le b$$

тогда

$$S'(x) = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}$$

$$dS = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} \cdot dx$$

и выражение (2) преобразуется к виду:

$$\int_L f(x,y)\,dS = \int_a^b f(x,y(x)) \cdot \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx$$

3

ПРИМЕРЫ.

1

Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \frac{1}{x-y}\,dS$$

где L- отрезок прямой y=1/2x-2, заключенный между точками A(0,-2) и B(4,0).

РЕШЕНИЕ.

$$dS = \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2} \cdot dx = \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot dx = \frac{\sqrt{5}}{2} dx$$

$$\int_L \frac{1}{x-y} dS = \int_0^4 \frac{1}{x - \frac{1}{2}x + 2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} dx =$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^4 \frac{1}{\frac{x}{2}+2}dx=\sqrt{5}\int_0^4 \frac{1}{x+4}dx=\sqrt{5}\ln|x+4|\Big|_0^4=$$

$$=\sqrt{5}(\ln 8-\ln 4)=\sqrt{5}\ln\frac{8}{4}=\sqrt{5}\ln 2$$

2

Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L (x^2 + y^2)\,dS$$

где L- окружность

$$x = a \cdot \cos t$$

$$y = a \cdot \sin t$$

$$0 \le t \le 2\pi$$

РЕШЕНИЕ.

$$dS = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} \cdot dt = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} \cdot dt =$$

$$= a\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} \cdot dt = a \cdot dt$$

$$\int_L (x^2 + y^2) dS = \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t) \cdot a \cdot dt =$$

$$= a^3 \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) \cdot dt = a^3 \int_0^{2\pi} dt = a^3 t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi a^3$$