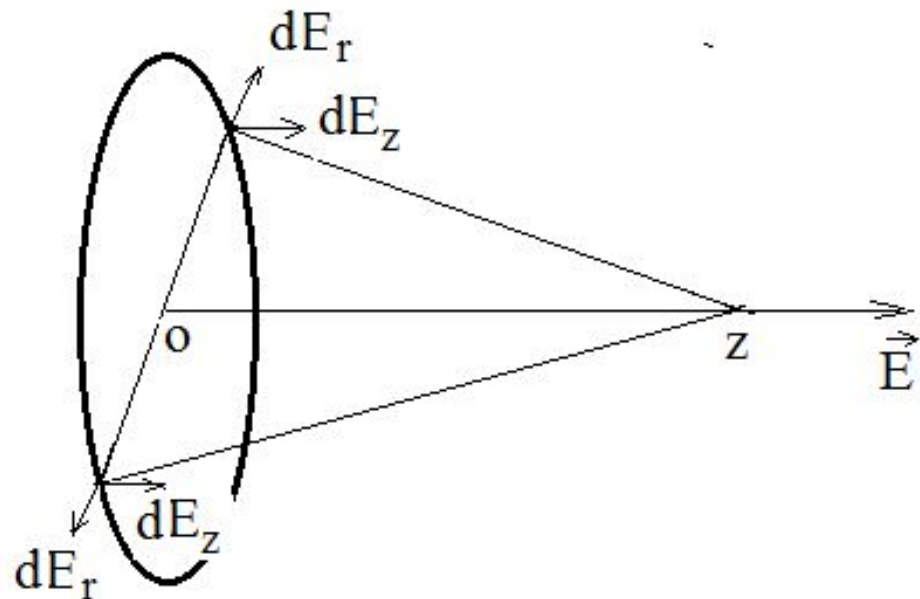


## Задача 1. Потенциал и напряженность электрического поля *на оси* тонкого равномерно заряженного кольца

- Получить выражение для потенциала и напряженности электрического поля *на оси* тонкого равномерно заряженного кольца радиуса  $R$  .  
Линейная плотность заряда  $\tau$  .
- Считая, что  $\tau = \text{const}$  , показать, что при  $|z| \gg R$
- потенциал поля кольца совпадает в пределе с потенциалом поля точечного заряда.

Результирующая сумма компонент вектора напряженности по радиусу по всему кольцу равна нулю а сумма компонент по оси Oz даст значение вектора напряженности и он направлен по оси Oz



Ведем цилиндрическую систему координат. Пусть ось  $Oz$  совпадает с осью кольца и начало координат с центром кольца,  $|z|$  — расстояние от центра кольца до точки наблюдения на оси.

$$\tau = \frac{q}{2\pi R} \quad dq = \tau dl = \tau R d\theta$$

$dl$  — элемент длины тонкого кольца

Потенциал для точечного заряда

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{\tau R d\theta}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$\varphi(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\tau R}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} d\theta = \frac{\tau R}{2\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad \varphi(-z) = \varphi(z)$$

Напряженность поля кольца

$$E_z(z) = -\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\tau R}{2\epsilon\epsilon_0} \frac{z}{\left(\sqrt{R^2 + z^2}\right)^3}$$

$$E_z(-z) = -E_z(z)$$

## Предельный случай

$$\varphi(z) = \frac{\tau R}{2\varepsilon\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{\tau \frac{R}{|z|}}{2\varepsilon\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{z}\right)^2 + 1}} \underset{z \rightarrow \infty}{\approx}$$

$$\underset{\frac{R}{|z|} \rightarrow 0}{\approx} \frac{\tau}{2\varepsilon\varepsilon_0} \frac{R}{|z|} \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{R}{|z|} \right)^2 \right) =$$

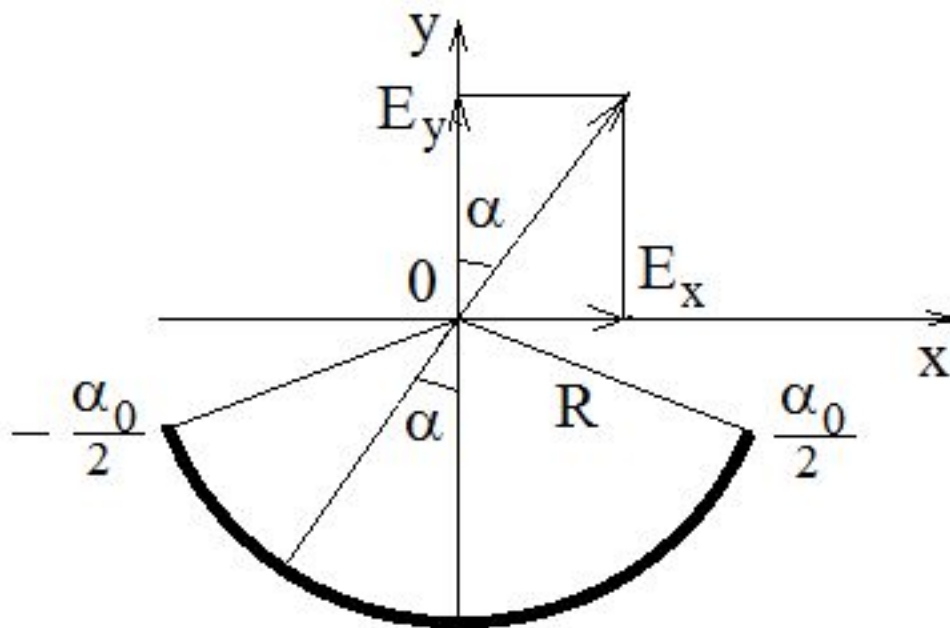
$$\frac{\tau R}{2\varepsilon\varepsilon_0} \frac{1}{z} \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{R}{z} \right)^2 \right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{1}{|z|} + o\left(\frac{R}{|z|}\right)$$

Использовали  $(1 + \alpha)^{-\frac{1}{2}} - 1 \underset{\alpha \rightarrow 0}{\approx} -\frac{\alpha}{2}$   $\tau R = \frac{q}{2\pi}$

**Вывод.** В предельном случае при  $|z| \gg R$   
потенциал поля кольца совпадает с потенциалом поля точечного заряда

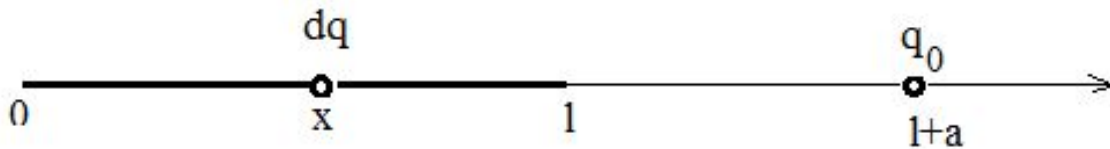
**Задача 2.** Получить выражение для напряженности электрического поля, создаваемое тонкой равномерно заряженной дугой окружности радиуса  $R$  в, центре  $O$  ее кривизны .

• Линейная плотность заряда  $\tau$



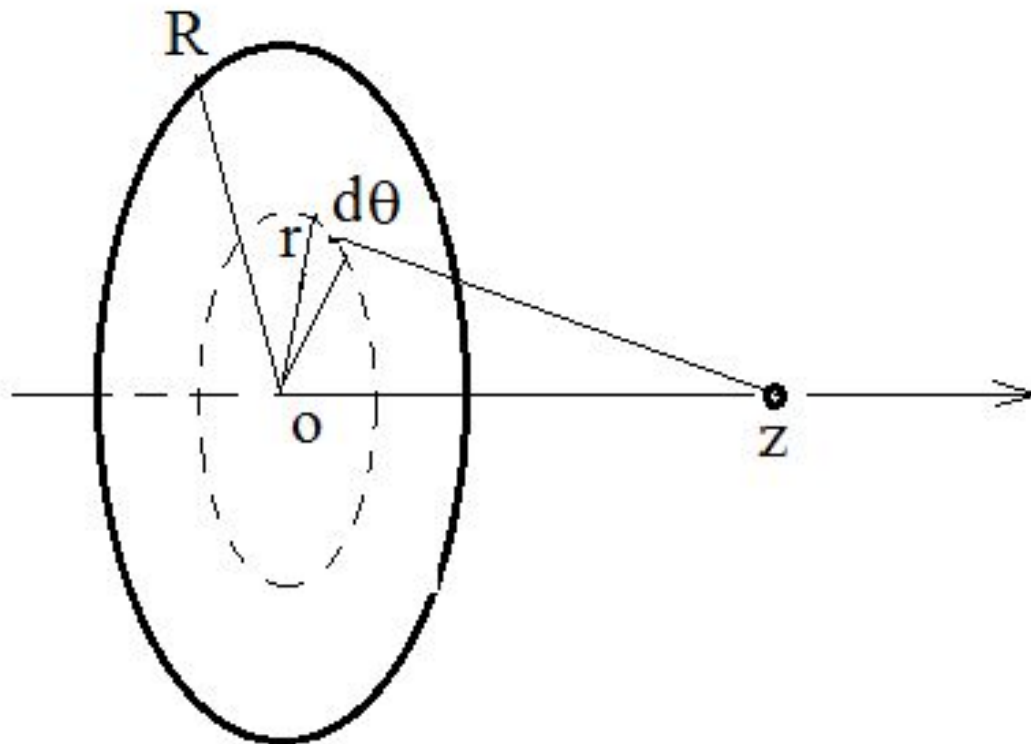
**Задача 3. Найти силу взаимодействия отрезка длиной  $l$ , равномерно заряженного с линейной плотностью заряда  $\tau$  с точечным зарядом  $q_0$ , находящимся на продолжении отрезка на расстоянии  $a$  от ближайшего его конца.**

- Пусть ось  $Ox$  проходит через отрезок и точечный заряд. Начало координат совпадает с началом отрезка. Тогда координата точечного заряда равна  $a+l$ .



$$dq = \tau dx \qquad dF = q_0 dE = \frac{dq \cdot q_0}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{(l+a-x)^2}$$

Задача 4. Ось равномерно заряженного диска радиуса  $R$  совпадает с осью  $Oz$ . Центр диска находится в начала координат. Диск заряжен равномерно с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ . Найти потенциал электрического поля, создаваемого диском в точках оси. Рассмотреть предельный случай:  $z \gg R$



Введем цилиндрическую систему координат

- Рассмотрим точечный заряд  $dq = \sigma dS = \sigma r dr d\theta$

Запишем потенциал ЭС поля, создаваемого этим точечным зарядом, в точке на оси диска

$$\begin{aligned}d\varphi &= \frac{dq}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\sigma r dr d\theta}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \\ \varphi(z) &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r dr d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \\ &= \frac{\sigma}{4\epsilon\epsilon_0} \int_{z^2}^{R^2+z^2} \frac{dt}{t^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0} \left( \sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right)\end{aligned}$$

## Предельный случай

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} \left( \sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sigma z}{2\varepsilon\varepsilon_0} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{R}{z} \right)^2} - 1 \right) \underset{z \rightarrow \infty}{\approx} \\ &\underset{z \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\sigma z}{2\varepsilon\varepsilon_0} \left( \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} + o\left( \frac{R^2}{z^2} \right) \right) \underset{z \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon\varepsilon_0} \frac{1}{z} = \frac{q}{16\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{1}{z}\end{aligned}$$

- **Вывод.** При  $z \rightarrow \infty$  потенциал электрического поля заряженного диска совпадает с точностью до константы с потенциалом поля точечного заряда величиной  $Q=q/4$ .



**Задача 5.** Найти потенциал ограниченной цилиндрической поверхности радиуса  $R$  и длиной  $2a$  с зарядом  $q$ , равномерно распределенным по поверхности.

- **Способ 1.** Нахождение потенциала электрического поля, создаваемого заряженной цилиндрической поверхностью через потенциал поля заряженной окружности (тонкого кольца).

$$\varphi_{\text{кольца}}(z) = \frac{q_{\text{кольца}}}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{\tau_{\text{кольца}} R}{2\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}}, \quad q_{\text{кольца}} = 2\pi R \tau_{\text{кольца}}$$

Рассматриваемая цилиндрическая поверхность – это совокупность заряженных колец с зарядом  $dq = \frac{q}{2a} dz'$

$$dq = \frac{\sigma 2\pi R 2a}{2a} dz' = \sigma 2R\pi dz'$$

$q$  – заряд цилиндра       $z'$  – координата кольца

## Потенциала поля заряженной цилиндрической поверхности

$$\varphi(z) = \int_{-a}^a \frac{q / 2a}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z' - z)^2}} dz'$$

**Способ 2.** Нахождение потенциала заряженной цилиндрической поверхности через потенциал поля точечного заряда.

Цилиндрическая поверхность – это совокупность элементарных площадок поверхности с зарядом

$$dq = \sigma dS = \frac{q}{2\pi R 2a} R d\theta dz' = \frac{q}{4\pi a} d\theta dz'$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{4\pi a} \int_0^{2\pi} \int_{-a}^a \frac{d\theta dz'}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}}$$

# Ограниченный цилиндр

