

1. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть имеется уравнение

$$f(x) = 0, \quad (1.1)$$

где $f(x)$ – функция, которая определена и непрерывна в некотором интервале $a < x < b$. Всякое значение ξ (кси), обращающее функцию $f(x)$ в нуль, т. е. такое, что $f(\xi) = 0$, называется *корнем* уравнения (1.1) или нулем функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$ является *алгебраическим* многочленом любой степени, *отличной от единицы*, уравнение называют *нелинейным алгебраическим*, например: $x^3 - 6x + 2 = 0$.

Если в функцию $f(x)$ входят элементарные функции (тригонометрические, логарифмические и др.), то уравнение называют *трансцендентным*, например: $x + \exp(x) = 0$, $\arcsin(2x + 1) - x^2 = 0$, $x - \ln x = 0$ и т.д.

В дальнейшем и те и другие будем называть просто *нелинейными уравнениями*.

В тех случаях, когда уравнение (1.1) достаточно сложно, его корни найти точно, как правило, не удастся (аналитического выражения для корней не существует). Кроме того, в инженерной практике обычно имеют дело с уравнениями, коэффициенты в которых известны лишь приблизительно, отсюда возникает задача приближенного нахождения корней уравнения и оценки степени их точности, иначе говоря, погрешности решения уравнения. Для решения такой задачи и используют численные методы.

Численное решение уравнения (1.1) состоит из двух этапов:

- отделения корня, т. е. установления возможно малого промежутка $[a, b]$, в котором содержится один (и только один) корень уравнения;
- уточнения корня, т. е. нахождения значения корня в промежутке $[a, b]$ с заданной точностью (допустимой погрешностью).

Таким образом, вопросы, на которые необходимо ответить при численном решении уравнения (1.1) могут быть сформулированы следующим образом:

1. Имеет ли уравнение (1.1) на отрезке $[a, b]$ хотя бы один вещественный (не мнимый или комплексный) корень?
2. Является ли этот корень единственным?
3. Каково значение этого корня, отличающееся от точного не более чем на некоторую малую величину ε (эпсилон), т. е. каково значение x , для которого выполняется условие $|x - \xi| \leq \varepsilon$?

Ответы на первые два вопроса достигаются в ходе *отделения* корней уравнения, а на последний – при *уточнении* корня.

1.2. ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ

Из математического анализа известна следующая теорема: если непрерывная функция $f(x)$ на концах отрезка $[a, b]$ принимает значения разных знаков, т. е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, то внутри этого отрезка содержится по меньшей мере один корень уравнения $f(x) = 0$, т. е. найдется хотя бы одно число $\xi \in [a, b]$ (кси), принадлежащее отрезку $[a, b]$ такое, что $f(\xi) = 0$. Эта теорема иллюстрируется рис. 1.1,а.

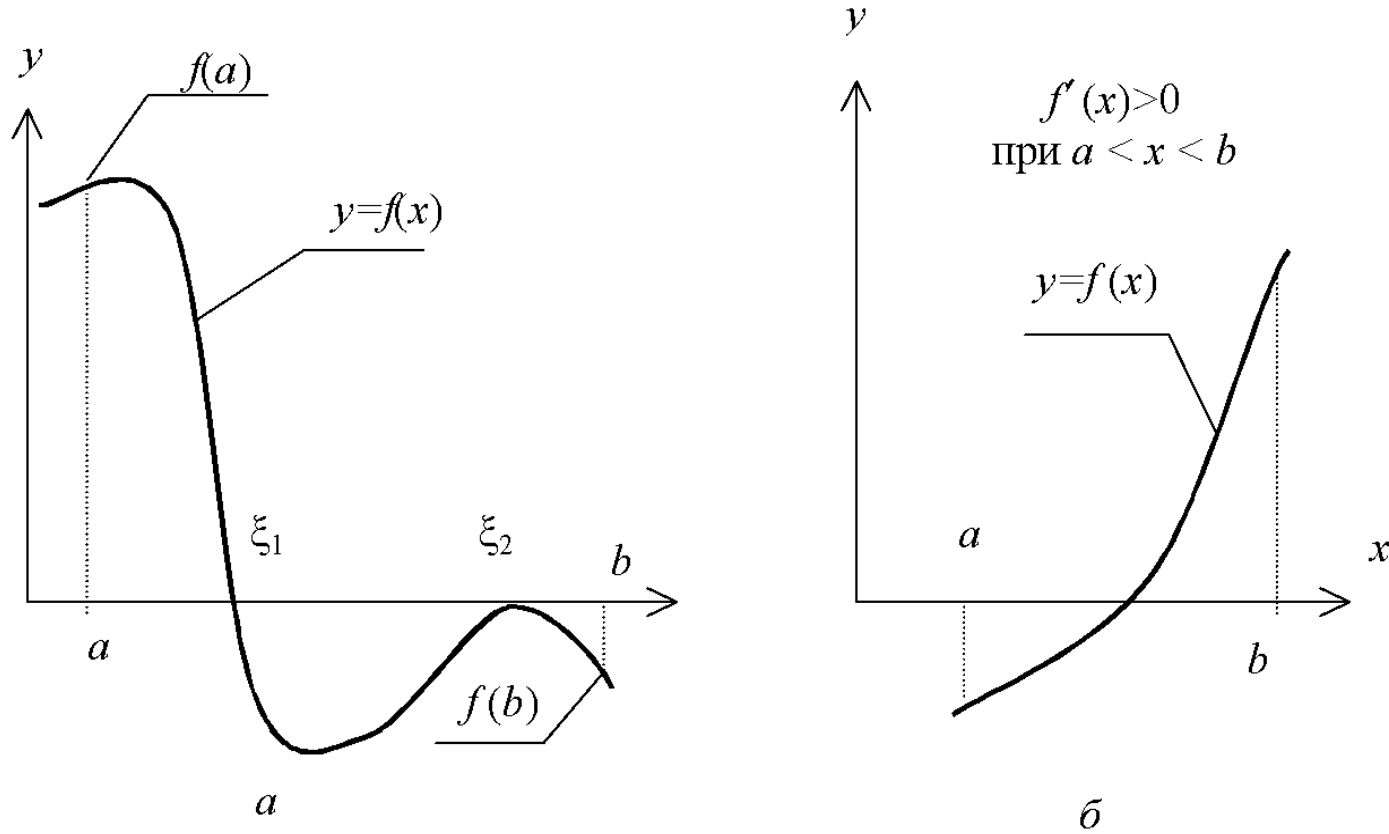


Рис. 1.1. Геометрическая иллюстрация процесса отделения корня

Для ответа на второй вопрос следует воспользоваться другой теоремой из математического анализа: если производная $f'(x)$ существует и сохраняет постоянный знак внутри промежутка (интервала) $[a, b]$, т. е. если $f'(x) > 0$ (или $f'(x) < 0$) для $a < x < b$, то уравнение $f(x) = 0$ на данном промежутке имеет **один единственный** корень. Эта теорема иллюстрируется рис. 1.1, б.

Процесс установления возможно малого промежутка $[a, b]$, в котором содержится только один корень уравнения, называется *отделением корня*. При наличии любого (программируемого) средства вычислительной техники (ВТ) наиболее рациональным представляется следующий алгоритм отделения корней уравнения $f(x) = 0$ на заданном отрезке $[a, b]$:

1. составление программы табулирования функции $f(x)$;
2. табулирование функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с шагом $\Delta x = (b - a)/n$ (можно рекомендовать для начала принять $n = 10$);
3. построение графика функции $f(x)$ и отделение всех корней уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[a, b]$.

1.3. УТОЧНЕНИЕ КОРНЯ УРАВНЕНИЯ

Для ответа на вопрос, *каково* значение корня уравнения $f(x) = 0$ на некотором отрезке $[a, b]$, на котором он (корень) отделен, отличающееся от точного не более чем на некоторую малую величину ε , необходимо каким-то образом найти это значение корня. Такая операция называется *уточнением* корня. Существует много численных методов уточнения корня нелинейного уравнения, из которых далее рассматриваются три: метод *половинного деления*, метод *итераций* и метод *Ньютона*.

1.3.1 Метод половинного деления

Метод половинного деления заключается в последовательном уменьшении вдвое отрезка, на котором находится отделенный корень, до тех пор, пока величина уменьшенного отрезка не станет меньше допустимой погрешности (иногда говорят заданной точности) ε . Идея этого метода может быть проиллюстрирована схемой, показанной на рис. 1.2. Словесное описание алгоритма уточнения корня методом половинного деления выглядит так:

1. вычисляется и запоминается значение функции $f(x)$ при $x = a$, т. е. $f_a = f(a)$;
2. отрезок делится пополам, т. е. вычисляется $x = (b - a)/2$;
3. вычисляется значение функции $f(x)$ при $x = (b - a)/2$, т. е. f_x ;
4. проверяется условие $f_a \cdot f_x > 0$, т. е. имеет ли функция $f(x)$ на левом конце отрезка и в его середине одинаковые знаки;
5. если это условие выполняется, то за левую границу нового отрезка принимается середина прежнего, и за значение функции на левом конце отрезка принимается ранее вычисленное значение в середине прежнего (отрезка), т. е. производится *переприсваивание*: $a = x$, $f_a = f_x$ (левый конец отрезка переносится в середину);
6. в противном случае (при невыполнении условия $f_a \cdot f_x > 0$) в середину переносится правый конец отрезка, т. е. $b = x$;

7. после очередного деления отрезка пополам проверяется, не стала ли оставшаяся часть отрезка меньше допустимой погрешности ε , т. е. проверяется условие $b - a < \varepsilon$;

8. если это условие выполняется, то задача уточнения корня решена, и вычисления прекращаются. За уточненное значение корня принимается последнее вычисленное значение x (середина последнего оставшегося отрезка). В случае невыполнения условия $b - a < \varepsilon$ вычисления продолжаются, т. е. происходит переход к пункту 2) настоящего алгоритма.

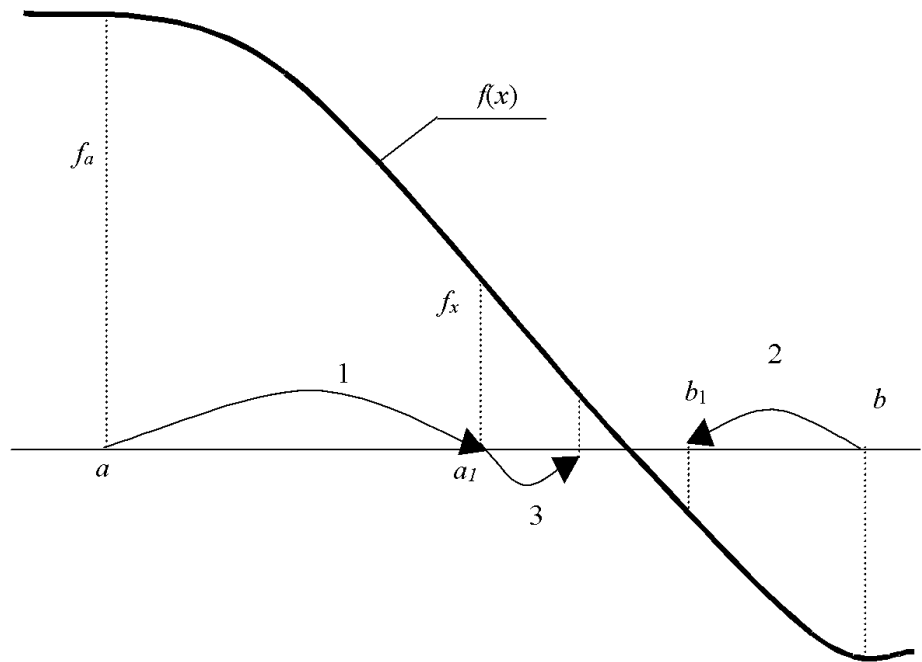


Рис. 1.2. Схема, иллюстрирующая метод половинного деления

Характеристикой качества решения уравнения является *невязка*, которая определяется величиной $f(x)$, т. е. значением функции $f(x)$ при аргументе, равном уточненному с заданной точностью ε значению корня. При уточнении корня методом половинного деления невязка равна f_x – последнему вычисленному значению функции $f(x)$ при последнем делении отрезка.

Необходимое количество операций деления отрезка $[a, b]$ пополам для уточнения корня с точностью ε определяется следующим образом. Так как при каждом делении отрезка длина его уменьшается вдвое, то после n делений она будет равна

$$(b - a) / 2^n$$

Эта величина должна быть меньше ε , т. е. должно выполняться условие (неравенство):

$$\varepsilon > \frac{(b - a)}{2^n}$$

или

$$2^n > \frac{b - a}{\varepsilon}$$

Отсюда:

$$n \geq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} \quad (1.2)$$

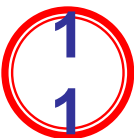
– количество делений отрезка пополам при уточнении корня методом половинного деления должно быть не меньше, чем логарифм по основанию два (двоичный логарифм) величины $(b-a)/\varepsilon$, где a и b – границы отрезка, на котором уточняется корень (на котором корень отделен), ε – допустимая погрешность (заданная точность). Так, при $b-a = 1$ и $\varepsilon = 0.001$, $n = 10$, так как $(b-a)/\varepsilon = 1000$, а $2^{10} = 1024$.

1.3.2. Метод итераций

Итерация – это результат повторного применения совокупности математических (вычислительных) операций. Метод итераций – это метод последовательных приближений.

Основными этапами алгоритма уточнения корня методом итераций являются следующие:

1. уравнение $f(x) = 0$ преобразовывают к виду $x = \phi(x)$;
2. на отрезке $[a, b]$, на котором отделен корень, выбирают произвольную точку x_0 – начальное (нулевое) приближение корня;



3. последовательно вычисляют $x_1 = \phi(x_0)$, $x_2 = \phi(x_1), \dots$, $x_i = \phi(x_{i-1})$ – очередные (последовательные) приближения корня уравнения;

1
2

4. после вычисления очередного приближения корня производят проверку условия прекращения итераций (как правило, $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$);

5. если условие прекращения итераций не выполняется, то переходят к вычислению очередного приближения корня – пункту 3) данного алгоритма;

6. если условие прекращения итераций выполняется, то вычисляют невязку уравнения, выводят результаты на экран и прекращают вычисления.

Доказано, что если величина $|x_i - x_{i-1}|$ уменьшается при увеличении i , то при $i \rightarrow \infty$ разность $x_i - \xi$ станет сколь угодно малой по абсолютной величине, т. е. уточнение корня нелинейного уравнения методом итераций с заданной точностью возможно. Напомним, что ξ – точное значение корня.

Достаточным условием сходимости метода итераций является следующее:

$$|\phi'(x)| \leq q < 1, \quad a < x < b \quad (1.3)$$

– первая производная функции $\phi(x)$ на отрезке $[a, b]$ должна быть *меньше единицы* (по абсолютной величине). При невыполнении условия (1.3) процесс итерации может не сходиться, как показано на рис. 1.4.

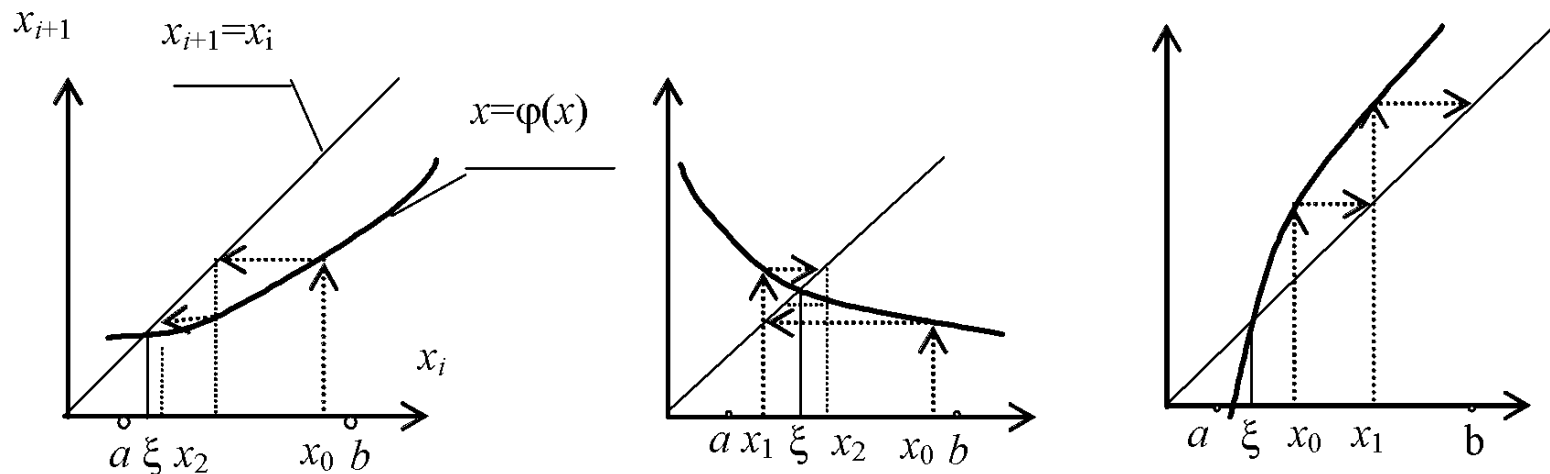


Рис. 1.4. Геометрическая иллюстрация метода итераций

Процесс итерации следует продолжать до тех пор, пока не выполнится условие

$$|x_i - x_{i-1}| < \frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon \quad (1.4)$$

где ε – заданная точность (допустимая погрешность); q – максимальное (по модулю) значение $\phi'(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Если $q \leq 0.5$, то вместо условия (1.4) можно пользоваться условием

$$|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon. \quad (1.5)$$

При использовании метода итераций уравнение $f(x) = 0$ необходимо стараться преобразовать к виду $x = \phi(x)$ таким образом, чтобы условие (неравенство) $|\phi'(x)| < 1$ выполнялось на всем отрезке $[a, b]$. Например, уравнение $x^3 + x - 1000 = 0$, имеющее корень на отрезке $[9, 10]$, можно преобразовать двумя способами:

$$x = 1000 - x^3, \text{ т. е. } \phi_1(x) = 1000 - x^3;$$

$$x = \sqrt[3]{1000 - x}, \text{ т. е. } \phi_2(x) = \sqrt[3]{1000 - x}.$$

Совершенно очевидно, что для $\phi_1(x)$ условие (1.3) не выполняется, так как $\phi'_1(x) = -3x^2$ и $|\phi'_1(x)|$ при $9 < x < 10$ много больше единицы. В то же время

$$|\phi'_2(x)| = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(1000 - x)^2}}$$

и при $9 < x < 10$ $|\phi'_2(x)| < q \ll 1$ – производная $\phi'_2(x)$ по абсолютной величине *много меньше* единицы, следовательно, можно задавать довольно *большую* допустимую погрешность ε , что приведет к *уменьшению* количества итераций.

Уточнение корня данного уравнения методом итераций при $x_0 = 9.5$, $\varepsilon = 0.001$ и использовании функции

$$\varphi_2(x) = \sqrt[3]{1000 - x}$$

приводит к результату $\tilde{x} = 9.967$ и получим $f(\tilde{x}) = 1.1504 \cdot 10^{-4}$ после трех итераций.