

ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

- ▶ Функція двох змінних
- ▶ Частинна похідна.
- ▶ Диференціал функції.
- ▶ Дотична площина і нормаль до поверхні
- ▶ Градієнт
- ▶ Застосування диференціала для наближених обрахунків.
- ▶ Дослідження функції двох змінних на умовний екстремум
- ▶ Найбільше і найменше значення функції в замкненій області

Функція двох змінних

Означення: $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - функція n змінних, яка набору n чисел ставить у відповідність одне число.

Приклад. $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}$.

При $n=2$ $z = f(x, y)$ - функція двох змінних.

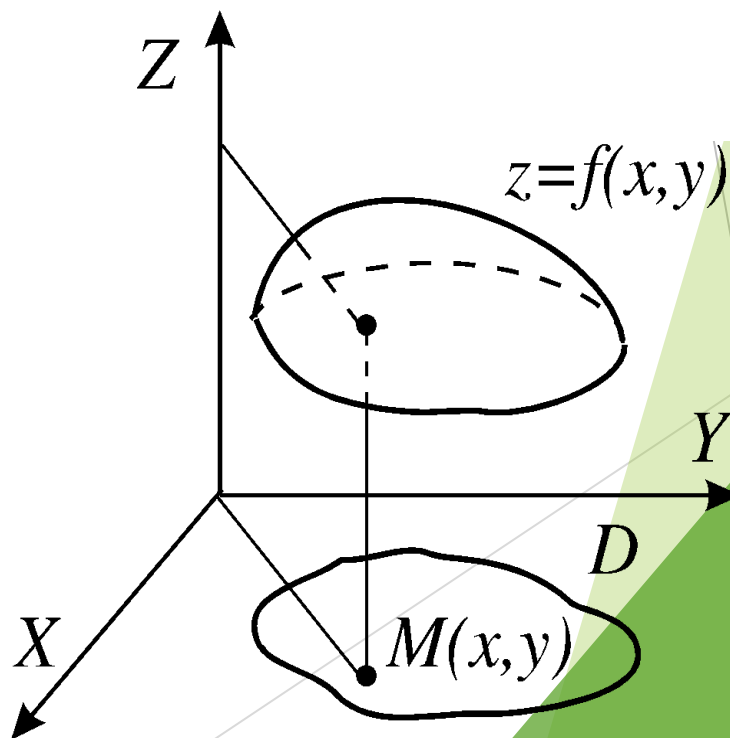
Приклад. $z = x^2 + x \sin y$.

Графік функції двох змінних – це поверхня.

$$z = f(x, y)$$

$$z = f(M)$$

Точки M площини Oxy з координатами $M(x, y)$ ставиться у відповідність число z , яке відкладаємо на осі Oz .



Функція двох змінних

Область визначення функції двох змінних – це область допустимих значень для пар (x, y) , тобто це деяка частина площини Oxy , при яких можна обчислити значення функції.

ОДЗ зображаємо на площині Oxy , заштриховуючи її. Це також проекція графіка функції на площину Oxy .

Приклад: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

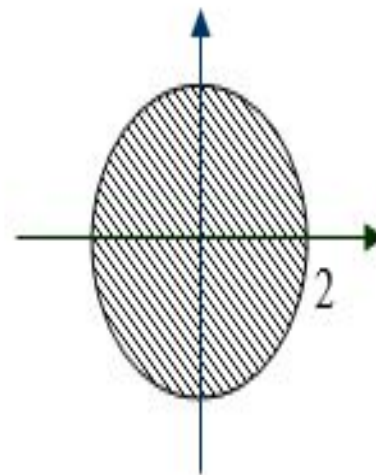
$$4 - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

коло з центром в початку координат і радіусом 2.

ОДЗ -- круг з центром в початку координат і радіусом 2.



Функція двох змінних

Розгляньмо функцію $u = f(M)$, $M(x_1; x_2; \dots; x_n) \in D$. Нехай точка

$$M_0(x_{10}; x_{20}; \dots; x_{n0})$$

є граничною точкою множини D .

Означення : Число A називають *границею функції* f у точці M_0 , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що для всіх точок M з проколеного δ -околу точки M_0 виконано нерівність

$$|f(M) - A| < \varepsilon$$

і позначають

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_{10} \\ \dots \\ x_n \rightarrow x_{n0}}} f(x_1, \dots, x_n) = A.$$

Означення : Функцію $u = f(M)$ називають *неперервною в точці* M_0 , якщо

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0).$$

Якщо позначити

$$\Delta f(M_0) = f(M) - f(M_0),$$

то умову неперервності функції $u = f(M)$ у точці M_0 можна переписати як

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \Delta f(M_0) = 0.$$

Точки, в околі яких функція означена (крім, можливо, самих точок), але не є неперервною називають *точками розриву* функції.

Функція двох змінних

Означення Функцію $z = f(x, y)$ називають *диференційовною в точці* M_0 , якщо в деякому околі цієї точки повний приріст функції можна записати як

$$\Delta f(M_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

де $A = A(M_0)$, $B = B(M_0)$ — сталі щодо $\Delta x, \Delta y$;

$\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ і $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$, коли $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$.

Теорема (необхідні умови диференційовності). Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0; y_0)$, то:

1) в цій точці існують частинні похідні за обома змінними, причому

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = A; \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = B;$$

2) функція неперервна в точці M_0 .

Теорема (достатня умова диференційовності). Якщо функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні в деякому околі точки M_0 , то функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці M_0 .

Частинні прирости і частинні похідні

Якщо $z = f(x, y)$, то частинні прирости за змінними x , y та повний приріст функції визначається за формулами:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y);$$

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y);$$

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Якщо існує $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$, то ця границя називається частинною похідною

функції $z = f(x, y)$ за змінною x і позначається одним із символів: $\frac{\partial z}{\partial x}$, z'_x .

Аналогічно визначається частинна похідна за змінною y . Частинна похідна за однією із змінних знаходиться за правилами диференціювання функцій однієї змінної, при чому друга змінна залишається сталою.

Частинні прирости і частинні похідні

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}; \quad z'_x; \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}; \quad f'_x(x, y).$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}; \quad z'_y; \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}; \quad f'_y(x, y).$$

Частинні прирости і частинні похідні

П р и к л а д: Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

а) $z = 4xy^3 + 2\sqrt{x}y^2 + 7y$; б) $z = e^x \cdot \sqrt{y}$;

в) $z = \frac{\sqrt{x^2 + 3y}}{\sin xy}$.

Розв'язання:

а) $z = 4xy^3 + 2\sqrt{x}y^2 + 7y$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4 \cdot 1 \cdot y^3 + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot y^2 + 0 = 4y^3 + \frac{y^2}{\sqrt{x}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4 \cdot x \cdot 3y^2 + 2\sqrt{x} \cdot 2y + 7 = 12xy^2 + 4y\sqrt{x} + 7.$$

б) $z = e^x \cdot \sqrt{y}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \cdot \sqrt{y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^x \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Частинні прирости і частинні похідні

$$\text{в) } z = \frac{\sqrt{x^2 + 3y}}{\sin xy};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3y}} \cdot \sin xy - \sqrt{x^2 + 3y} \cdot y \cos xy}{\sin^2 xy} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 3y}} \cdot \sin xy - \sqrt{x^2 + 3y} \cdot y \cos xy}{\sin^2 xy};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{3}{2\sqrt{x^2 + 3y}} \cdot \sin xy - \sqrt{x^2 + 3y} \cdot x \cos xy}{\sin^2 xy}.$$

Повний приріст і повний диференціал

Озн. 1: Повним диференціалом функції двох змінних dz називається головна лінійна відносно Δx та Δy частина повного приросту функції, який обчислюється за формулою: $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$.

Озн. 2: Частинними похідними другого порядку від функції $z = f(x, y)$ називають частинні похідні від її перших похідних:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right).$$

Останні дві називають мішаними і вони рівні між собою за умови їх неперервності.

Повний диференціал обчислюється за формулою:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (dx)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (dy)^2 \quad (1)$$

Повний приріст і повний диференціал

П р и к л а д: Знайти похідну другого порядку функції

$$z = 4x^5 y^3 + 2y^2 + 3xy.$$

Розв'язання: Обчислимо похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 20x^4 y^3 + 3y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 12x^5 y^2 + 4y + 3x.$$

Обчислимо похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = 80x^3 y^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = 24x^5 y + 4;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = 60x^4 y^3 + 3.$$

Тоді повна похідна другого порядку:

$$d^2 z = (80x^3 y^3) d^2 x + 2(60x^4 y^3 + 3) dx dy + (24x^5 y + 4) d^2 y$$

Повний приріст і повний диференціал

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

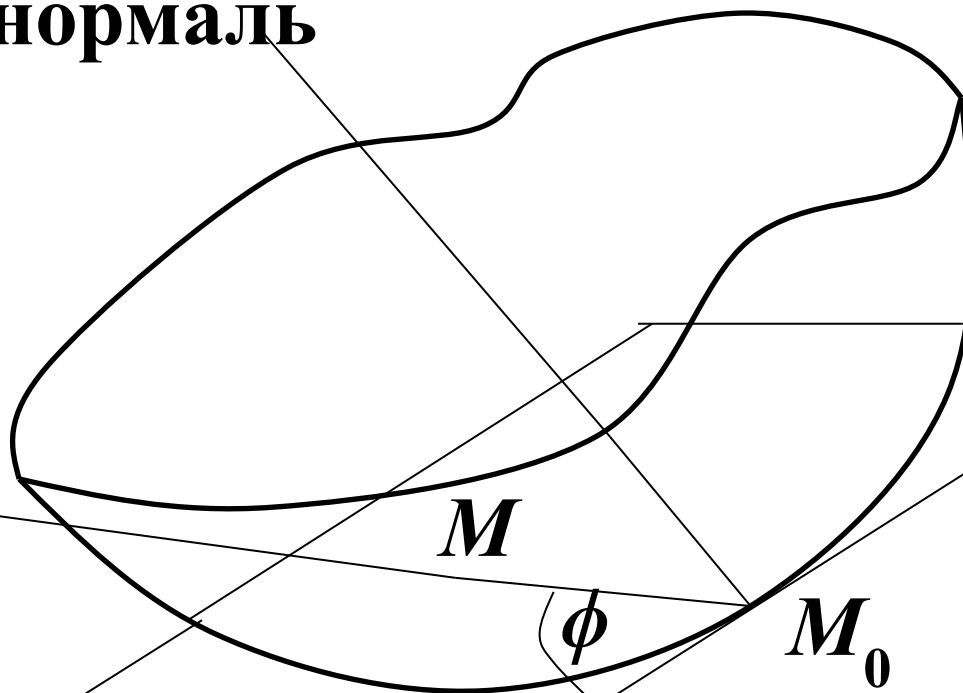
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

Дотична площина і нормаль до поверхні

нормаль



дотична площина

$$F(x, y, z) = 0 \quad M_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$(F'_x)_{M_0} (x - x_0) + (F'_y)_{M_0} (y - y_0) + (F'_z)_{M_0} (z - z_0) = 0$$

$$\frac{x - x_0}{(F'_x)_{M_0}} = \frac{y - y_0}{(F'_y)_{M_0}} = \frac{z - z_0}{(F'_z)_{M_0}}$$

$$z = f(x, y)$$

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

$$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y \quad M(1, 1, 1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = -1; \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = 2;$$

$$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1) \quad \text{или} \quad x - 2y + z = 0$$

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$$