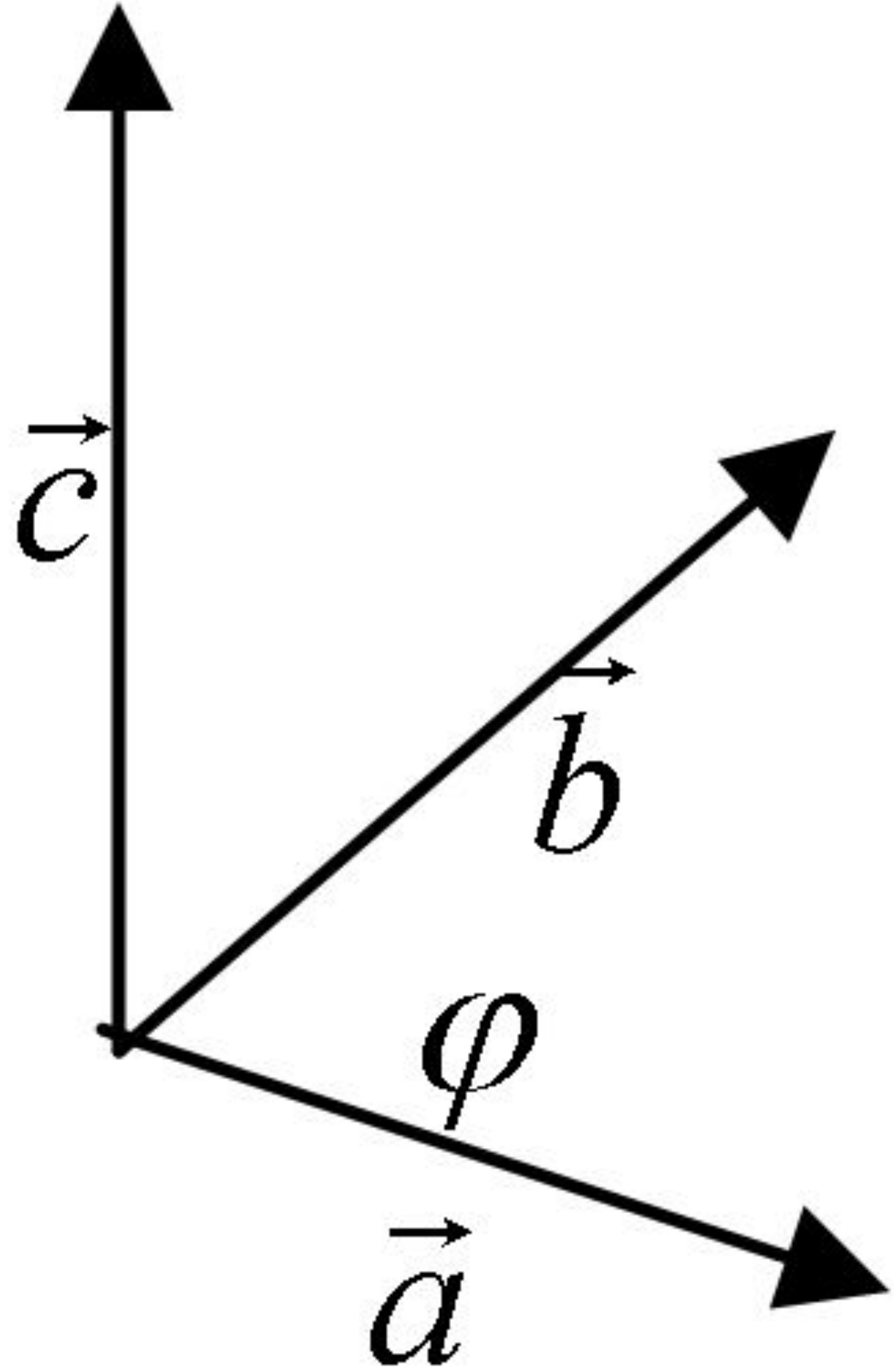
Векторное произведение векторов

- *Векторным произведением* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который удовлетворяет следующим трём условиям:

- **1.** $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$;
- **2.** $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$,
- **3.** тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая (т.е. при наблюдении из конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки.



$\vec{c}$
$\vec{b}$
φ
$\vec{a}$

Свойства векторного произведения

- 1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
- 2. $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$
- 3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- 4. $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \parallel \vec{b}$

- Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$

$$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

то векторное произведение вычисляется по формуле

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Приложения векторного произведения к задачам геометрии и механики.

- ***Площадь параллелограмма*** (геометрический смысл векторного произведения).

$$S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

- Площадь треугольника

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$$

- ***Момент силы*** (механический смысл векторного произведения).
- Пусть точка A твердого тела закреплена, а в точке B приложена сила $\vec{F}$. Тогда возникает вращающий момент

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}$$

- **Пример.** Вычислить площадь треугольника с вершинами A(7,3,4), B(1,0,6) , C(4,5,-2).

- **Решение.** Находим векторы

$$\overrightarrow{AB} = (-6, -3, 2), \ \overrightarrow{AC} = (-3, 2, -6).$$

- Вычисляем векторное произведение

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -6 & -3 & 2\\ -3 & 2 & -6\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 2 & -6\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-6 & 2\\ -3 & -6\end{vmatrix}+$$

$$+\vec{k}\begin{vmatrix}-6 & -3\\ -3 & 2\end{vmatrix}=$$

$$= 14\vec{i} - 42\vec{j} - 21\vec{k}.$$

- Тогда

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{14^2 + 42^2 + 21^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2} = \frac{49}{2} = 24{,}5.$$

Смешанное произведение векторов

- **Определение.** *Смешанным произведением* трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

- Если

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2),$$

$$\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$$

- то

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Приложения смешанного произведения к задачам геометрии

- ***Объём параллелепипеда***, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (геометрический смысл смешанного произведения).

$$V = |\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,|$$

- Объём пирамиды

$$V = \frac{1}{6}|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,|$$

- ***Условие компланарности векторов в координатной форме:***

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны

$$\Leftrightarrow \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

- **Пример**. Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках A(2,0,0), B(0,3,0), C(4,0,6), D(2,3,8).

- **Решение.** Находим векторы

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 3, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (2, 0, 6)$$

$$\overrightarrow{AD} = (0, 3, 8)$$

Вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} + 0 = -2(0-18) -$$

$$-3(16-0) = 36 - 48 = -12$$

- Тогда

$$V = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD} \right| = \frac{|-12|}{6} = 2.$$

Модуль 2

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Плоскость и её основные уравнения

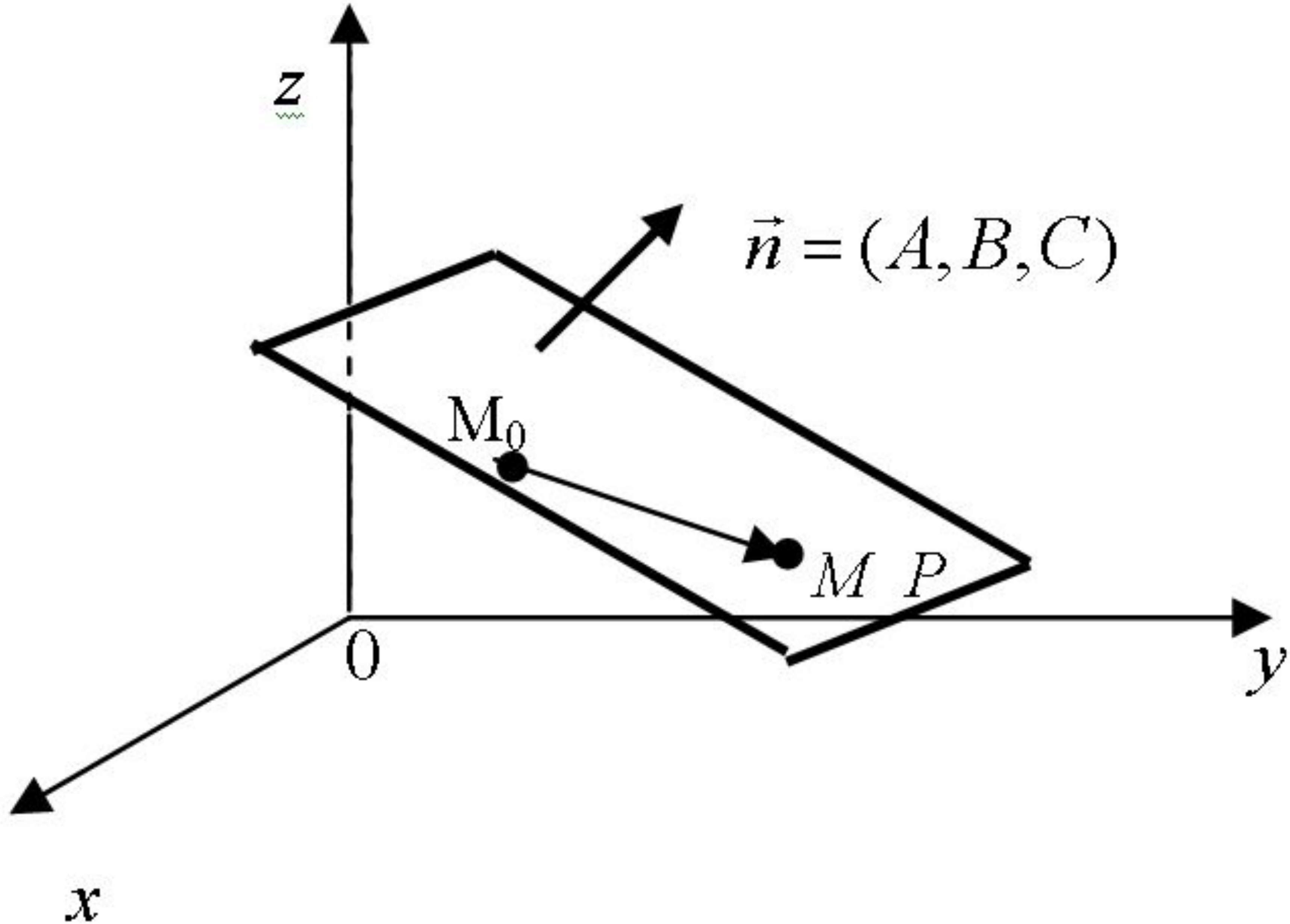
- Рассмотрим плоскость *P* в прямоугольной декартовой системе координат.

- Положение плоскости вполне определяется

точкой $M_0(x_0, y_0, z_0) \in P$

и *вектором нормали*

$$\vec{n} = (A, B, C) \perp P \quad (\vec{n} \neq \vec{0})$$



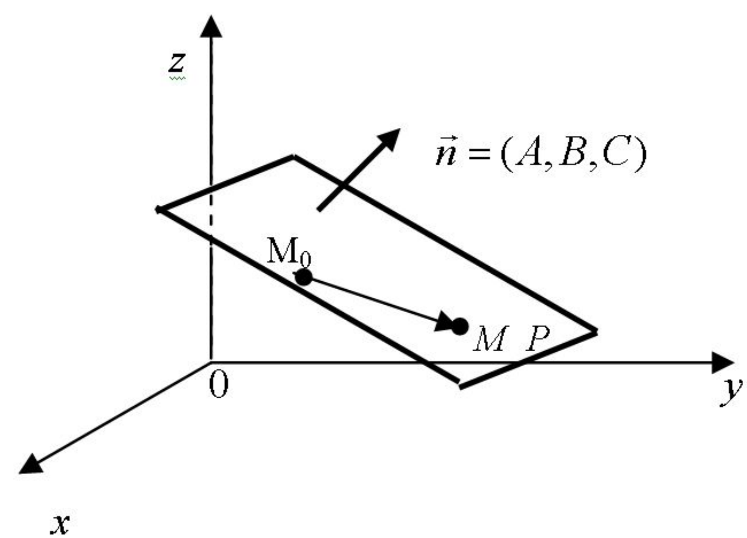
z
$\vec{n} = (A, B, C)$
M_0
M P
0
y
x

- Возьмём любую точку

$$M(x, y, z) \in P$$

и построим вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

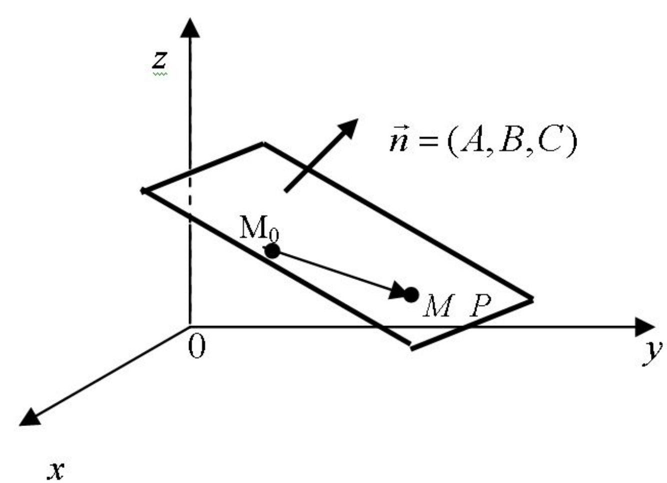


- Так как $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$, то скалярное произведение

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0,$$

или

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$



- Получили *уравнение плоскости, заданной*

точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$

и вектором нормали $\vec{n} = (A, B, C)$

- Если в уравнении

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

раскрыть скобки и обозначить

$$D=-Ax_0-By_0-Cz_0$$

то получим *общее уравнение плоскости*:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

$$(A^2+B^2+C^2>0)$$

- **Теорема**. *Всякое уравнение вида*

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$(A^2 + B^2 + C^2 > 0)$$

определяет некоторую плоскость в пространстве.

- Если в этом уравнении какой-либо из коэффициентов A, B, C равен нулю, то плоскость расположена параллельно той оси, координата которой отсутствует в уравнении.

- Например, при $A = 0$ плоскость $By + Cz + D = 0$ параллельна оси Ox; при $A = B = 0$ плоскость $Cz + D = 0$ параллельна осям Ox и Oy, т.е. плоскости xOy и т.д.

- Пусть в уравнении

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ни один из коэффициентов не равен 0. Перепишем это уравнение в виде

$$Ax + By + Cz = -D$$

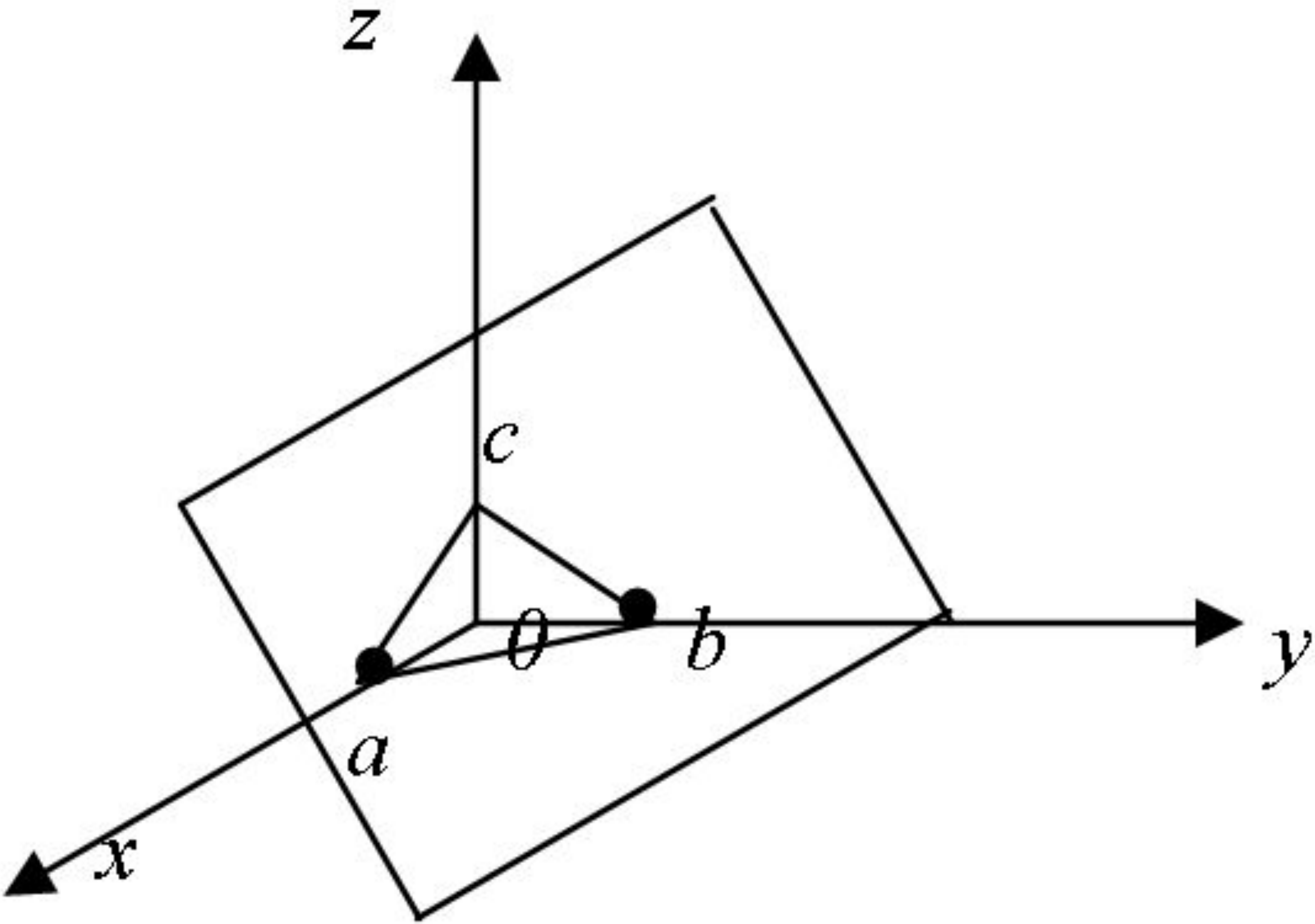
разделим обе части этого равенства на - D и обозначим

$$-\frac{D}{A}=a,\ -\frac{D}{B}=b,\ -\frac{D}{C}=c$$

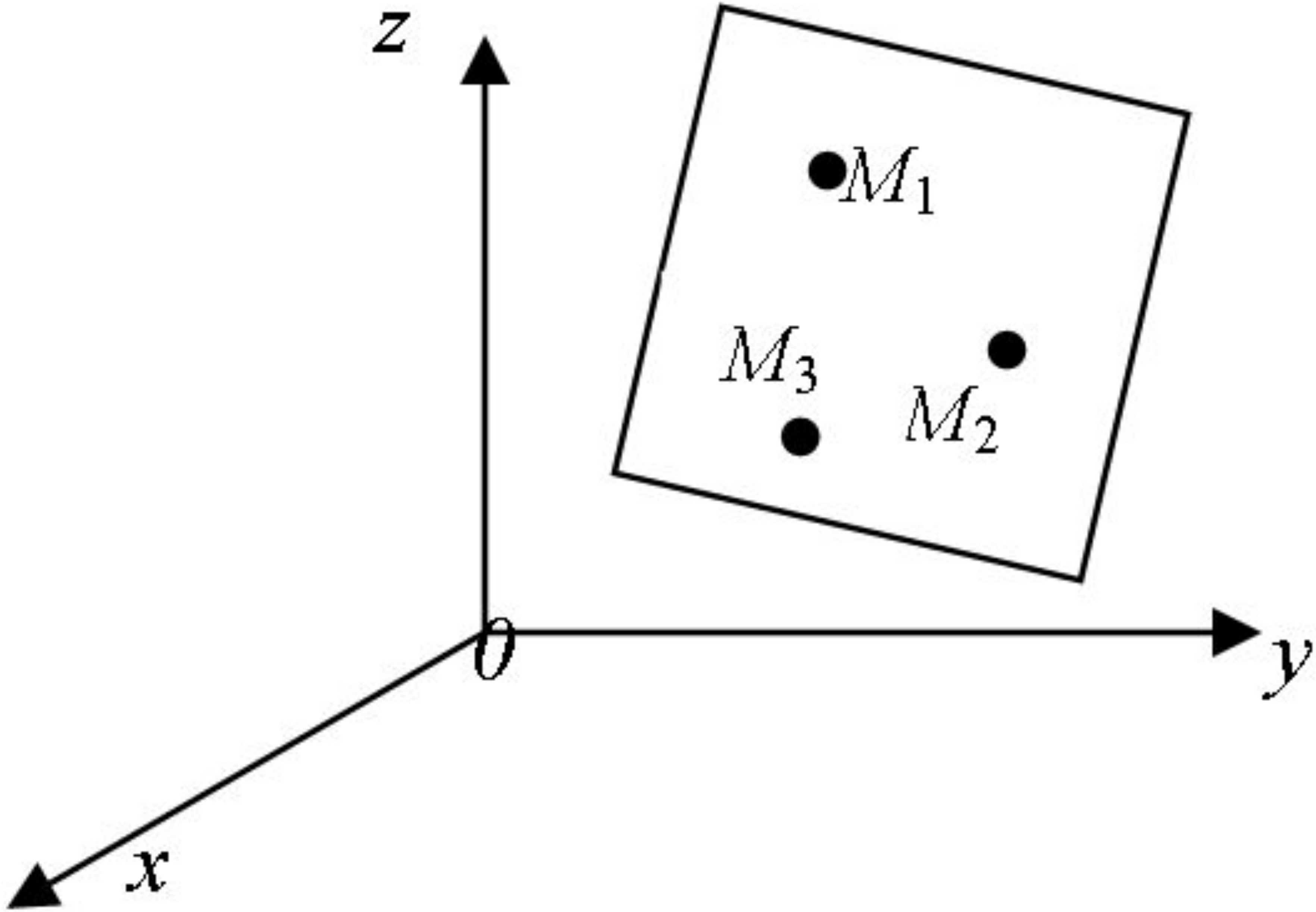
Получим *уравнение плоскости в отрезках*:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

- где a, b, c – это величины направленных отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат


z
c
0
b
y
a
x

- Если три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ $M_2(x_2, y_2, z_2)$ $M_3(x_3, y_3, z_3)$ не лежат на одной прямой, то через эти точки проходит единственная плоскость:



z
M_1
M_3
M_2
0
y
x

- *Уравнение плоскости, проходящей через три точки*, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

- Пусть даны две плоскости

$$P_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

и

$$P_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

- *Угол φ между двумя плоскостями* равен углу между их векторами нормали:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} =$$

$$= \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

- *Расстояние d от точки*

$$M_1(x_1, y_1, z_1)$$

до плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

определяется по формуле

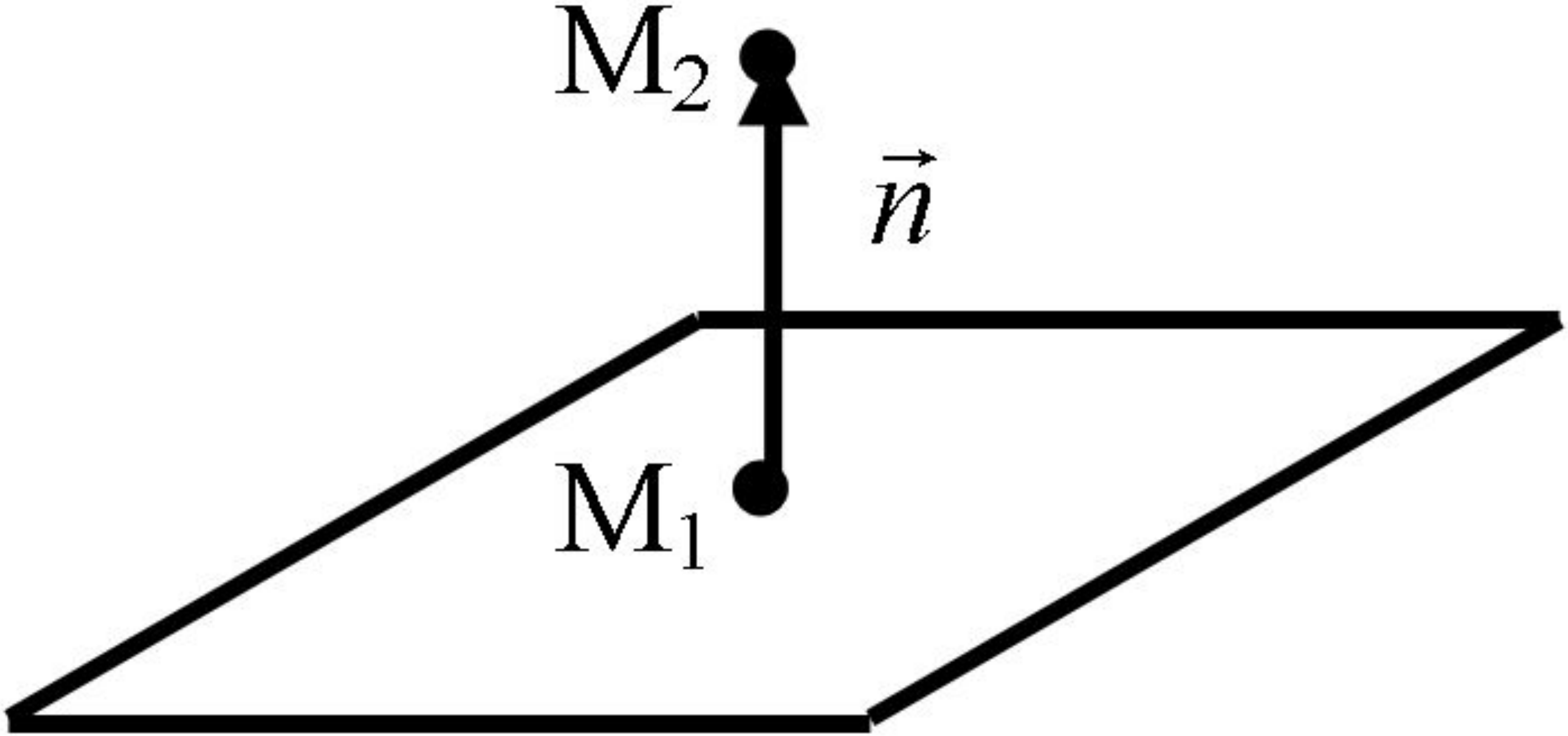
$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- **Пример.** Даны две точки

$$M_1(-2, 0, 1) \qquad M_2(1, 4, 2)$$

Записать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

- **Решение.** Поскольку искомая плоскость перпендикулярна вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, то в качестве вектора нормали $\vec{n}$ возьмем вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (3, 4, 1)$



M_2
$\vec{n}$
M_1

- Подставив теперь в уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$A = 3, \quad B = 4, \quad C = 1$$

а также координаты точки M_1:

$$x_0 = -2, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 1$$

получим уравнение

$$3(x+2)+4(y-0)+1(z-1)=0$$

или

$$3x+4y+z+5=0$$

– это и есть искомое общее уравнение плоскости