sinx

cosx

Тригонометрия

Учебное пособие для техникума

tgx

ctgx

Тригонометрия

- Учебный элемент № 1
- Учебный элемент № 2
- Учебный элемент № 3
- Учебный элемент № 4
- Учебный элемент № 5
- Учебный элемент № 6
- Учебный элемент № 7
- Учебный элемент № 8
- Учебный элемент № 9
- Учебный элемент № 10
- Учебный элемент № 11
- Учебный элемент № 12

Понятие радиана и градуса. Формулы перевода градусной меры угла в радианную меру и обратно.

– ***Цели***

- Усвоить понятие радиана
- Познакомится с формулами перевода градусной меры угла в радианную меру и обратно
- Вычислять значение градусной меры угла и радианной меры угла

– ***Содержание обучения:***

- Понятие радиана.
- Связь радианной и градусной мер углов.
- Распределение точек на единичной окружности.

НА ОГЛАВЛЕНИЕ

ДАЛЬШЕ

§ 1. Радианное измерение угловых величин.

При радианном измерении дуг (и соответствующих им центральных углов) за единицу измерения принимается ***радиан***– дуга, длина которой равна радиусу этой дуги.
Радианная мера дуги вычисляется по формуле: $a = l/R$, (1)
где *а*– радианная мера дуги, *l* – длина дуги окружности, *R* – радиус этой дуги.
Формула перехода от градусного измерения к радианному имеет вид:
$a = (\pi/180^0)\beta$ (2), где β – градусная мера дуги (угла).
Радианная мера 1^0 равна 0,0175 радиана.
Формула перехода от радианного измерения к градусному имеет вид
$\beta = (180^0/\pi)a$ (3) градусная мера 1 радиана равна $57\,^0 17'44'',8 \approx 57^0,3$.
Длина дуги окружности равна радианной мере дуги, умноженной на радиус этой дуги:
$l = aR$ (4)
Площадь кругового сектора равна половине радианной меры дуги сектора, умноженной на квадрат радиуса круга: $S_{сект} = aR^2/2$ (5)
Полный круг составляет 360 градусов, т.е.2п ($2*180^0$).
Если рассматриваемый угол больше 2п, то обозначение 2пn, где n – градусы.
Положительным направлением отсчета углов считается поворот по единичной окружности (т.е. окружности с радиусом равным 1) против часовой стрелки, а отрицательным – по часовой стрелке.

НА ОГЛАВЛЕНИЕ ДАЛЬШЕ

ТРЕНИНГ

1. Выразить в радианной мере величину угла в 90^0.

По формуле (2) $a = (\pi / 180^0)\,\beta$,

$90^0 = (п/180^0)\ 90^0 = п / 2$ (рад)

2. Выразить в градусной мере величину угла в 7п/6 рад.

По формуле (3) $\beta = (180^0 / \pi)\, a$

7п / 6 =(180^0/п)(7п / 6) = 210^0

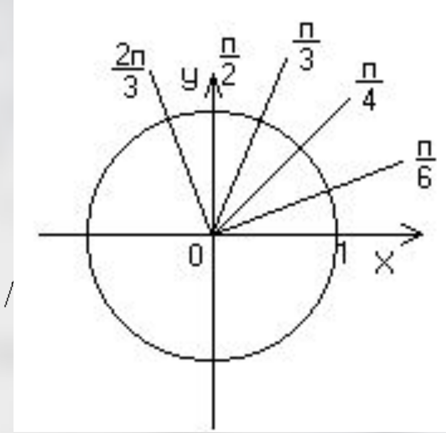
3. Построить на единичной окружности точки:

0, п/ 6, п / 4, п / 3, п / 2, 2п / 3.

Построить единичную окружность;

Зная, что п = 180^0, посчитать чему равны углы в градусах;

Поставить значения углов на окружности.



0 = 0^0

п / 6 = 30^0

п / 4 = 45^0

п / 3 = 60^0

п / 2 = 90^0

2п / … ^{0}.

НА НА ОГЛАВЛЕНИЕ ДАЛЬШЕ

ТЕСТ

задания	ответы
1. переведите градусную меру угла в радианную: 300^0, - 135^0, 210^0.	5п / 3; - 3п / 4; 7п / 6.
2. переведите радианную меру угла в градусную: 5п / 4; 3,5п; - 5п / 9.	225^0; 630^0; - 100^0.
3. назовите координатную четверть, которой принадлежит угол a, равный 1000^0, 2000^0.	IV четверть, III четверть.
4. Вычислите радиус окружности, если ее дуга длиной 0,84 м содержит 1,5 радиана.	0,56
5. Поставьте точки на окружности. -200^0; 500^0; 5п / 9; - п / 2.	

[Посттест на «3»]

[Посттест на «4» и «5»]

НА ОГЛАВЛЕНИЕ

ПОСТТЕСТ на «3»

– 1-й вопрос

- выразите в радианной мере величину угла в 22^0.
- а) $\frac{90\pi}{11}$; б) $\frac{11\pi}{90}$; в) $\frac{4\pi}{30}$.

НА ОГЛАВЛЕНИЕ

Посттест на «4» и «5»

2- й вопрос

- выразите в градусной мере величину угла в $\frac{\pi}{12}$.
- а)25^0; б) 22^0; в) 15^0.

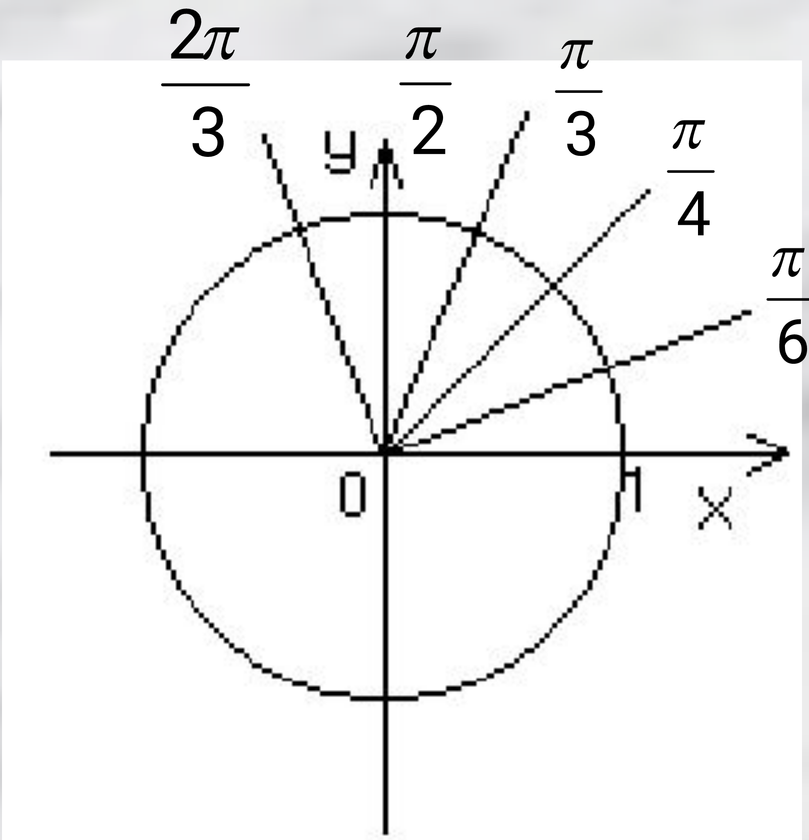
НА ОГЛАВЛЕНИЕ

2 вопрос

- выразите в градусной мере величину угла в $\frac{\pi}{12}$.
- а)25^0; б) 22^0; в) 15^0.

НА ОГЛАВЛЕНИЕ

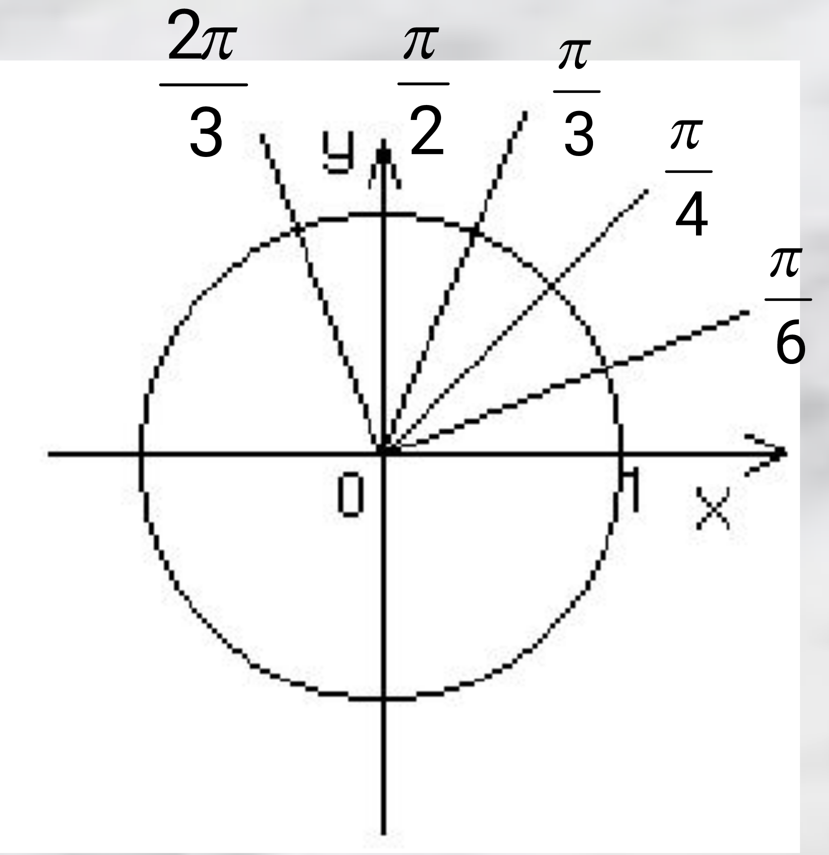
3- й вопрос



- Выберите ответ на вопрос: щелкните по значению угла в 60^0.

НА ОГЛАВЛЕНИЕ

3 вопрос



- Выберите ответ на вопрос: щелкните по значению угла в 60^0.

НА ОГЛАВЛЕНИЕ

Вы выиграли!

ваша оценка "3"

На На оглавление

Вы проиграли!

Попробуйте еще раз!

На На оглавление

НА «4» и «5»

- Выразите в радианной мере величины углов: а) 40^0; б) 120^0; в) 20^0; г) 135^0
- Выразите в градусной мере величины углов: а) π ; б) 2π; в) $\frac{2}{3}\pi$.
- Угловая величина дуги АВ равна 2п/3, а ее радиус равен 3 м. Найдите длину дуги АВ.
- Найдите координаты точки единичной окружности, полученной поворотом точки (1;0) на угол: а) $\frac{\pi}{2}$; б) π ; в) $\frac{3\pi}{2}$; г) 2π .
- Найдите все углы, на которую нужно повернуть точку (1;0), чтобы получить точку с координатами (-1;0).
- НА ОГЛАВЛЕНИЕ

Тригонометрические функции числового аргумента. Основные тригонометрические тождества.

– ***Цели***

- Познакомиться с определением тригонометрических функций;
- Находить значения тригонометрических функций числового аргумента;
- Применять основные тригонометрические тождества для нахождения тригонометрических функций.

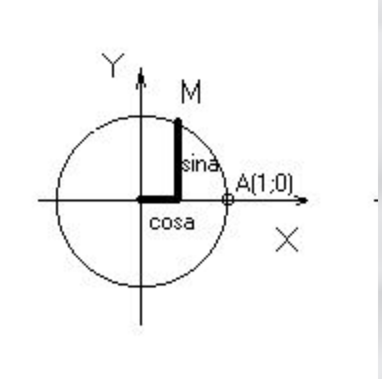
– ***Содержание обучения***:

- Тригонометрические функции числового аргумента;
- Основные тригонометрические тождества.

На На оглавление

Дальше

§ 1. Тригонометрические функции числового аргумента



- Абсцисса X точки M_α числовой единичной окружности (см.рис.) называется *косинусом* числа α: $X = \cos\alpha$ **(1)**
- Ордината Y точки M_α числовой единичной окружности называется *синусом* числа α: $Y = \sin\alpha$ **(2)**

Областью определения косинуса и синуса служит множество всех действительных чисел, т.е. D(*cos α*)=R, D(sin *α*)=R.

Отношение синуса числа *α* к его косинусу называется *тангенсом* числа *α:*

$$tg a = \frac{\sin a}{\cos a} \quad (3)$$

Область определения тангенса – множество всех действительных чисел за исключением чисел вида.

- Отношения косинуса числа *α* к его синусу называется *котангенсом* числа *α*:
- $$ctg a = \frac{\cos a}{\sin a} \quad (4)$$
- Область определения котангенса – множество всех действительных чисел за исключением чисел вида.
- Функции cosa и sina ограничены, т.к. E(cosa) = [–1;1], E(sina) = [-1;1].
- Функции tga и ctga неограничены, т.к. каждая из них может принимать любое действительное значение , т.е. E(tga) = R, E(ctga) = R.

На На оглавление Дальше

§ 2. Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1;$$

$$tga \cdot ctga = 1, a \neq \frac{\pi k}{2}. k \in \mathrm{Z};$$

$$1 + tg^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}, a \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathrm{Z};$$

$$1 + ctg^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}, a \neq \pi k, k \in \mathrm{Z}.$$

На На оглавление Дальше

Тренинг

Найти область определения функций:

1) y=sin3x

2) y=1/sinx

3) y=tg4x

1) Здесь x – любое действительное число, т.к. график синуса расположен вдоль оси абсцисс;

2) sinx не равен 0 (т.к. он в знаменателе), значит x не равно пk, k€Z;

3) т.к. область определения тангенса (-п/2; п/2), то 4x не должно быть равно п/2+пk, значит x не должно быть равно п/8 + пk/4, k€Z;

На На оглавление

Дальше

Дано: sinx=3/5, x принадлежит (п/2; п).

Вычислить: 1) cosx; 2) tg x; 3) ctgx.

- 1)Выразим косинус из первого тригонометрического тождества: (во второй четверти косинус имеет знак “–“). Подставляем известное значение синуса и вычисляем косинус.
- 2) Используем определение тангенса (см.1 параграф); подставим значение синуса и найденное значение косинуса.
- 3) аналогично 2) найдем котангенс.

- 1) $\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x}$

$\cos x = -\sqrt{1-(3/5)^2} = – 4/5.$

2) tg x = (3/5) : (–4/5) = – 3/4

3) ctg x = – 4/3.

На На оглавление

Дальше

Доказать тождество:

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{2}{\sin x}$$

$$\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{2}{\sin x}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{\sin^2 x+1+2\cos x+\cos^2 x}{(1+\cos x)\sin x}=\frac{2}{\sin x}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1+1+2\cos x}{(1+\cos x)\sin x}=\frac{2}{\sin x}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{2(1+\cos x)}{(1+\cos x)\sin x}=\frac{2}{\sin x}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2}{\sin x}=\frac{2}{\sin x}\right);$$

На На оглавление Дальше

Тест

- Упростите выражения:

1. $\sin^2 a + tg^2 a + \cos^2 a;$
2. $\sin^4 a - \cos^4 a + \cos^2 a;$
3. $\dfrac{\cos^3 a - \sin^3 a}{1 + \sin a \cos a};$
4. $\sin a \cos a (tg a + ctg a).$

На На оглавление

- Ответы:
- 1. $\dfrac{1}{\cos^2 a}$
- 2. $\sin^2$ a.
- 3. cos a – sin a.
- 4. 1

Посттест на «3»

Посттест на «4» и «5»

ПОСТТЕСТ НА «3»

- 1 вопрос
- При каких значениях аргумента принимает наименьшее и наибольшее значения следующая функция:
- Y = 0,5 cos2x
- Ответы:
- А) Унаиб.= 0,5; Унаим. = -0,5.
- Б) Унаиб.= 2; Унаим. = -2.
- В) Унаиб.= 5; Унаим. = -5.

На На оглавление

2 вопрос

- Найдите область определения функции
- Y = sinx + cosx ;

- Ответы:
- А) x € [- 1; 1]; [- 1; 1];
Б) x € [- 0,5; 0,5];
- В) x – любое действительное число.

На На оглавление

2 - й вопрос

- Найдите область определения функции
- Y = sinx + cosx ;
- Ответы:
- А) х € [- 1; 1]; [- 1; 1];
Б) х € [- 0,5; 0,5];
- В) х – любое действительное число.

На На оглавление

3 вопрос

- Дано: $tgx = -\frac{3}{4}$, II четверть. Вычислить sinx, cosx, ctgx.
- Ответы:
- А) sinx =-3/5; cosx = -4/5; ctgx = 4/3.
- Б) sinx =3/5; cosx = -4/5; ctgx = -4/3.
- В) sinx =4/3; cosx = -3/5; ctgx = -4/5.

На На оглавление

3 – й вопрос

- Дано: $tgx = -\frac{3}{4}$, II четверть. Вычислить $sinx$, $cosx$, $ctgx$.
- Ответы:
- А) sinx =-3/5; cosx = -4/5; ctgx = 4/3.
- Б) sinx =3/5; cosx = -4/5; ctgx = -4/3.
- В) sinx =4/3; cosx = -3/5; ctgx = -4/5.

На На оглавление

НА «4» и «5»

- 1. Дано: tgx = – ¾, II четверть. Вычислить остальные тригонометрические функции.
- 2. Докажите тождества:

$$\cos^2 x(1-tgx)(1+tgx)=\cos^4 x-\sin^4 x;\qquad \frac{1-(\sin x+\cos x)^2}{\sin x\cos x-ctgx}=2tg^2 x;$$

$$\frac{tgx}{tgx+ctgx}=\sin^4 x$$

-
- 3. Упростите выражения:

$$(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2;$$

$$\sin^2 x+\cos^4 x-\sin^4 x$$

На На оглавление

Основные свойства тригонометрических функций.

Цели

1. Находить знаки значений тригонометрических функций;

2. Какие функции являются четными, нечетными и периодическими;

3. Находить период функции.

Содержание обучения:

1. Знаки значений тригонометрических функций.

2. Четные и нечетные функции.

3. Периодичность тригонометрических функций.

4. Свойства и графики тригонометрических функций.

На На оглавление

Дальше

§ 1. Знаки значений тригонометрических функций.

Знаки тригонометрических функций по четвертям приведены в таблице:

Четверть / Функция	**I** 0<a<п/2	II п/2<a<п	III п<a<3п/2	IV 3п/2<a<2п
sina	+	+	–	–
cosa	+	–	–	+
tga	+	–	+	–
ctga	+	–	+	–

Значения тригонометрических функций некоторых углов приведены в таблице:

	I четверть				90
	0	30	45	60	
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tgα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-
ctgα	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

На На оглавление

Дальше

§ 2. Четные и нечетные функции.

Опр.1: функция *f* называется *четной*, если с каждым значением переменной *x* из области определения *f* значение *(- x)* также входит в область определения этой функции и при этом выполняется равенство: $f(-x) = f(x)$.

Опр.2: функция *f* называется *нечетной*, если с каждым значением переменной *x* из области определения *f* значение *(- x)* также входит в область определения этой функции и при этом выполняется равенство: $f(-x) = --f(x)$.

График любой четной функции симметричен относительно оси ординат, а гарфик любой нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Теорема: *косинус – четная функция, а синус, тангенс и котангенс – нечетные функции.*

Свойства четности и нечетности тригонометрических функций выражаются следующими формулами: sin(–a) = – sina;

cos(–a) = cosa;

tg(–a) = – tga;

ctg(–a) = – ctga.

На На оглавление

Дальше

§ 3. Периодичность тригонометрических функций.

Опр.: функция *f* называется периодической, если существует такое число $\lambda \neq 0$, что при любом α из области определения *f* числа $(\alpha - \lambda)$ и $(\alpha + \lambda)$ также принадлежат этой области и при этом выполняется равенство $f(\alpha - \lambda) = f(\alpha) = f(\alpha + \lambda)$.

В этом случае число λ называется *периодом* функции *f*. Ее периодами являются также числа вида $n\lambda$, $n \in Z$, $n \neq 0$.

Теорема: *функции синус, косинус, тангенс и котангенс являются периодическими.*

Наименьший положительный период синуса и косинуса равен 2π.

Наименьший положительный период тангенса и котангенса равен π..

Свойства периодичности тригонометрических функций можно выразить тождествами:

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi k),\ k \in Z;$$

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi k),\ k \in Z;$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}(\alpha + \pi k),\ k \in Z;$$

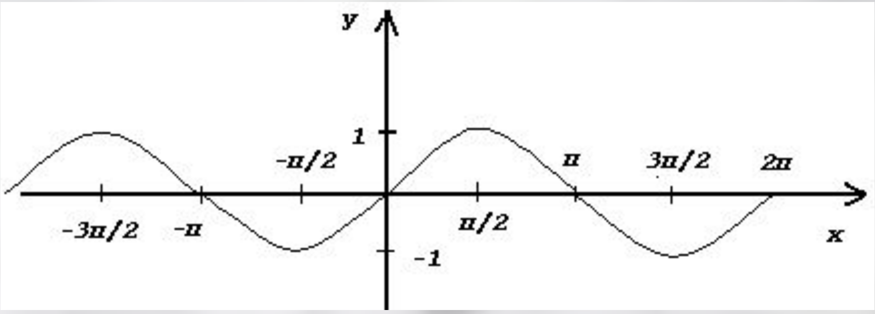
$$\mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{ctg}(\alpha + \pi k),\ k \in Z;$$

На На оглавление

Дальше

§ 4. Свойства и графики тригонометрических функций.

1. *Синус* F(x) = sin x.



Свойства:

1) Область определения: R;

2) Область значений: [– 1; 1];

3) Четность (нечетность): Нечетная;

4) Наименьший положительный период: 2π;

5) Координаты точек пересечения графика *f* с осью Ох: (πn; 0);

6) Координаты точек пересечения графика *f* с осью Оу: (0; 0);

7) Промежутки, на которых *f* принимает положительные значения: (2πn; π + 2πn);

8) Промежутки, на которых *f* принимает отрицательные значения: (–π + 2πn; 2πn);

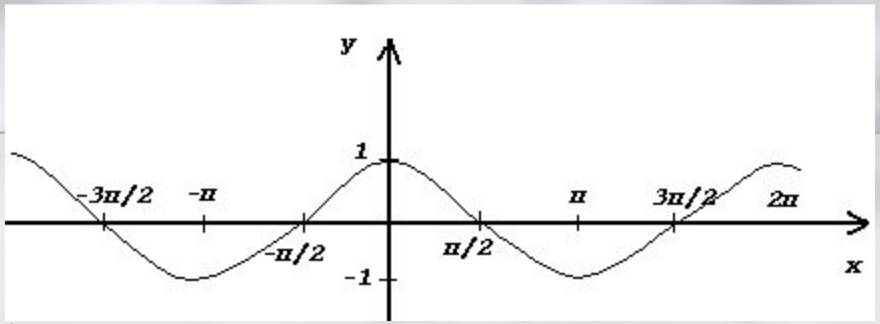
9) Промежутки возрастания: $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$;

10) Промежутки убывания: $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$;

11)Точки минимума: $\left(-1; -\frac{\pi}{2}+2\pi n;\right)$; 12) Точки максимума: . $\left(1; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$

На На оглавление Дальше

1. *Косинус* F(x) = cos x.



Свойства:

1) Область определения: R;

2) Область значений: [– 1; 1];

3) Четность (нечетность): Четная;

4) Наименьший положительный период: 2π;

5) Координаты точек пересечения графика *f* с осью Ox: ($\frac{\pi}{2}$ +πn; 0);

6) Координаты точек пересечения графика *f* с осью Oy: (0; 1);

7) Промежутки, на которых *f* принимает положительные значения: (- $\frac{\pi}{2}$ +2πn; $\frac{\pi}{2}$ + 2πn);

8) Промежутки, на которых *f* принимает отрицательные значения: ($\frac{\pi}{2}$ +2πn; $\frac{3\pi}{2}$ +2πn);

9) Промежутки возрастания: $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$;

10) Промежутки убывания: $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$;

11)Точки минимума: $(-1; \pi + 2\pi n;)$; 12) Точки максимума: $(1; 2\pi n)$.

На На оглавление

Дальше

Тренинг. Решение упражнений.

Алгоритм решения | ***Решение***

Какие знаки имеют следующие выражения:

1) cos 150;
2) sin 320;
3) tg 220;
4) ctg 400.

1) 90<150<180 (II четверть), cos 150<0;
2) 270<320<360 (IV четверть), sin320<0;
3) 180<220<270 (III четверть), tg220>0;
4) 360<400<360+90 (I четверть), ctg 400>0.

Упростить:

Используя формулы параграфа

$1)\ \sin^2(-a) - \cos(-a) + tg(-a);$

$2)\ \sin(-\frac{3\pi}{2}) + \cos(-\pi) + tg(-2\pi).$

$1)\ \sin^2(-a) - \cos(-a) + tg(-a) = (-\sin a)^2 - \cos a - tg a =$
$\sin^2 a - \cos a - tg a.$

$2)\ \sin(-\frac{3\pi}{2}) + \cos(-\pi) + tg(-2\pi) = -\sin\frac{3\pi}{2} + \cos\pi - tg 2\pi =$
$1 + (-1) - 0 = 0$

Вычислить:

По таблице значений находим значение аргумента каждой тригонометрической функции:

$tg^2(\pi/3) + ctg(\pi/6) - 2\sin(\pi/3) +$
$\sin\pi + 4\cos(3\pi/2) - 2\cos(\pi/3).$

$$(\sqrt{3})^2 + \sqrt{3} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 0 + 4\cdot 0 - 2\cdot\frac{1}{2} = 2$$

На На оглавление

Дальше

ТЕСТ

Какие знаки имеют следующие выражения:

1. 1. sin 170 2. cos 300
3. tg 160 4. ctg 315
5. tg 450 6. sin 400
7. sin (7п/3) 8. cos (4п/3)
9. 9. sin (5п/4) 10. cos (7п/5)
11. tg (8п/3) 12. ctg(9g/4)

Упростите:

$$1)\cos(-\pi)\cdot\sin(-\pi/2)\cdot\sin(-3\pi/2);$$
$$2)2\cos(-\pi)\cdot\cos(-2\pi)\cdot\sin(-3\pi/2).$$

Ответы:

1. + 2. + 3. – 4. –
5. Не сущ. 6. + 7. + 8. –
9. – 10. – 11. – 12. +.

1. 1
–2

Посттест на «3», «4» и «5»

На На оглавление

Формулы сложения

Цели

Повторить определения тригонометрических функций;

Познакомится с формулами сложения тригонометрических функций;

Научиться применять формулы сложения

Содержание обучения:

1. Косинус и синус суммы и разности.

2. Тангенс суммы

На На оглавление

Дальше

§ 1. Косинус и синус суммы и разности.

Формула косинуса суммы:

cos(а + в) = cosа cosв – sin а sin в. (1)

Так как cos (– в) = cos в и sin(–в) = – sin в, из этой формулы следует:

cos(а – в) = cosа cosв + sin а sin в. (2)

Формула синуса суммы имеет вид:

sin(а + в) = sin а cosв + cosа sin в. (3)

заменив в формуле (3) в на (–в), приходим к *формуле синуса разности*:

sin(а – в) = sin а cosв – cosа sin в. (4)

На На оглавление Дальше

§ 2. Тангенс суммы.

Вывод формулы тангенса суммы дается с помощью предыдущих формул косинуса и синуса суммы и определения тангенса.

Формула тангенса суммы:

$$\mathbf{Tg\,(a + в) = \frac{tg\,a + tg\,в}{1 - tg\,a\,tg\,в}}, \quad a = п/2(2к+1),\ в = п/2(2к + 1),\ tga\,tgв = 1 \qquad (5)$$

подставляя в формулу (5) вместо в (–в) получим *формулу тангенса разности*:

$$\mathbf{Tg\,(a - в) = \frac{tg\,a - tg\,в}{1 + tg\,a\,tg\,в}}, \quad a = п/2(2к+1),\ в = п/2(2к + 1),\ tga\,tgв = 1 \qquad (6).$$

На На оглавление

Дальше

Тренинг. Решение упражнений

ответы

Вычислить:

$$1.\ \sin(\alpha+\beta),\ если\ \sin\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\beta=-\frac{5}{13},$$

$$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right),\ \beta\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right).$$

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5},\ \sin\beta=-\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{33}{65}.$$

вычислим $\sin 75^0$ и $\cos 75^0$.

Заметим, что $75^0 = 45^0 + 30^0$

Поскольку синусы и косинусы углов 45 и 30 градусов известны, с помощью формул синуса и косинуса суммы находим, чему равны синус 75^0 и косинус 75^0.

$\mathrm{Sin}75^0=\sin(30^0+45)=\sin 30\cos 45+\cos 30\sin 45=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$\mathrm{Cos}75=\cos(30+45)=\cos 30\cos 45-\sin 30\sin 45=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

На На оглавление

Дальше

Вычислим выражения:

$1)\ \sin 20^0\cos 40^0+\cos 20^0\sin 40^0$

$2)\ \cos 47^0\cos 17^0+\sin 47^0\sin 17^0.$

$1)\ \sin 20^0\cos 40^0+\cos 20^0\sin 40^0=\sin(20^0+40^0)=$

$=\sin 60^0=\sqrt{3}/2.$

$2)\ \cos 47^0\cos 17^0+\sin 47^0\sin 17^0=\cos(47^0-17^0)=$

$=\cos 30^0=\sqrt{3}/2.$

Доказать тождества:

$$1)\ \frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)}{2\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)-\sqrt{2}\sin\alpha}=tg\alpha;$$

Упрощая левую часть равенства, получим

$$\frac{2(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha))}{2(\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha)}=\frac{\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha+}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha-}$$

$$\frac{+\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha}{-\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha}=tg\alpha.$$

тождество доказано.

На На оглавление

Дальше

ТЕСТ

задания

1. вычислите: а)sin105^0; б)cos15^0.

2. вычислите:
а) cos25^0 sin65^0 +sin25^0 cos65^0;
б) cos 7п/10 cosп/5 + sin 7п/10 sinп/5

3. Докажите тождество:
а) cos(а+в)cos(а – в)+ sin(а + в) sin(а – в)=cos2в
б) $\frac{\text{tg}a + \text{tg}(45^0 - a)}{1 - \text{tg}a\,\text{tg}(45^0 - a)} = 1$

ответы

а)sin(45+60)=sin45cos60+cos45sin60= $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
б)cos(60-45)= $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

а) sin(65+25)= sin90 = 1;
б) cos (п/2) =0

Посттест на «3»

Посттест на «4» и «5»

На На оглавление

ПОСТТЕСТ НА «3»

1 вопрос

1. вычислите:
sin п/6 cos п/3 + cos п/6 sin п/3

Ответы:

А) 1 А) 1 Б) 0,5

А) 1 Б) 0,5 В)-1

2 вопрос

2. вычислите cos(а + в), если известно, что sin а =sin в = 5/13 и 0<а<п/2, п/2<в<п

Ответы:

А) 1А) 1 Б) –1А) 1 Б) –1

В) 0

2-й вопрос

2. вычислите cos(а + в), если известно, что sin а =sin в = 5/13 и 0<а<п/2, п/2<в<п

Ответы:

А) 1А) 1 Б) –1А) 1 Б) –1

В) 0

ПОСТТЕСТ НА «4» И «5»

1. вычислите: $\cos п/7 \sin 8п/7 – \sin п/7 \cos 8п/7$
2. вычислите $\cos(п/3 – a)$, если известно, что $\cos a = 2/5$ и $3п/2<a<2п$.
3. докажите тождество: $\cos(a + в) \cos(a – в) = \cos^2 в – \sin^2 a$
4.упростите выражение: $\cos(a + п/3) – \cos(a – п/3)$

На На оглавление

Формулы двойного и половинного аргументов

Цели:

Повторить определения тригонометрических функций;

Повторить формулы сложения тригонометрических функций;

Познакомится с формулами двойного и половинного аргументов тригонометрических функций;

Научиться применять формулы двойного и половинного аргументов

Содержание обучения:

1. Тригонометрические функции двойного аргумента.
2. Тригонометрические функции половинного аргумента

На На оглавление

Дальше

§ 1. Тригонометрические функции двойного аргумента

Формулы сложения позволяют выразить sin 2a, cos 2a и tg 2a через тригонометрические функции угла a. Положим в формулах:

$$\cos(a + в) = \cos a \cos в - \sin a \sin в; \quad \sin(a + в) = \sin a \cos в + \cos a \sin в;$$

$$\mathrm{Tg}\,(a + в) = \frac{\mathrm{tg}\, a + \mathrm{tg}\, в}{1 - \mathrm{tg}\, a\, \mathrm{tg}\, в}$$

в равным a. Получим тождества:

$$\mathbf{\sin 2a = 2 \sin a \cos a,} \qquad (1)$$

$$\mathbf{\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a,} \qquad (2)$$

$$\mathbf{\mathrm{tg}\, 2a = \frac{2\, \mathrm{tg}\, a}{1 - \mathrm{tg}^2 a}}, \ a= п/2+пk, a=п/4+пk/2. \qquad (3)$$

$$\mathbf{\mathrm{ctg} 2a = \frac{\mathrm{ctg}^2 a - 1}{2\, \mathrm{ctg} a}}, \ a= пk/2 \qquad (4)$$

Эти тождества называют *формулами двойного угла.*

Если выразить правую часть формулы (2) через синус или косинус, то приходим к следующим тождествам:

$$\mathbf{\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1} \qquad (5)$$

$$\mathbf{\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a} \qquad (6)$$

На На оглавление Дальше

§ 2. Тригонометрические функции половинного аргумента

Если из формул (5) и (6) выразить $\cos^2 a$ и $\sin^2 a$, получим:

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \qquad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

заменим теперь а на а/2, получим:

$$\sin^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos 2a}{2} \qquad \cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

значит :

$$\sin \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} \quad (7) \qquad \cos \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\sin a/2}{\cos a/2} = \frac{\sin a}{1+\cos a.} \quad (9) \qquad \operatorname{tg} \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}, \ a=\pi(2k+1) \quad (10)$$

$$\operatorname{ctg} \frac{a}{2} = \frac{\cos a/2}{\sin a/2} = \frac{\sin a}{1-\cos a.} \quad (11) \qquad \operatorname{ctg} \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a}}, \ a=2\pi \quad (12)$$

В формулах (7) и (8), знак перед корнем определяется по знаку четверти, которой принадлежит дуга а/2.

В формулах (10) и (12), знак перед корнем берется так, чтобы он совпадал со знаком tg(a/2), т.е. +, если I

На На оглавление

Дальше

Тренинг. Решение упражнений

1. известно, что sin a = 0,6, и 0<a<п/2. Вычислите sin2a, cos2a, tg2a.

Из основного тригонометрического тождества: $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ выразим cosa и вычислим его значение: cosa = 0,8

найдем sin 2a = 2 sin a cos a: sin 2a = 2*0,6*0,8 =0,96

Найдем $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$: cos 2a = 0,64 – 0,36 = 0,28

Найдем $\mathrm{tg}\, 2a = \dfrac{\sin 2a}{\cos 2a}$: tg 2a = 0,96/0,28 = 24/7

2. упростите: $\dfrac{1+\cos a}{1-\cos a}\,\mathrm{tg}^2\dfrac{a}{2} - \cos^2 a$

разложим тангенс половинного угла: $\mathrm{tg}^2\dfrac{a}{2} = \dfrac{1-\cos a}{1+\cos a}$

Сократим, приведем подобные: $\dfrac{1+\cos a}{1-\cos a} \cdot \dfrac{1-\cos a}{1+\cos a} - \cos^2 a = 1 - \cos^2 a = \sin^2 a$

3. Вычислить tg(a/2), если: sina = 4/5 и п/2<a<п;

Находим $\cos\alpha = -\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} = -\frac{3}{5}$ По формуле (9) $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5} \div (1-\frac{3}{5}) = 2.$

На На оглавление Дальше

ТЕСТ

Задания	Ответы
1. известно, что cos a = –5/13 и sin a >0. Найдите sin2a, cos2a, tg2a.	sin2a= $-\frac{120}{169}$; cos2a= $-\frac{119}{169}$; tg2a= $\frac{120}{119}$
2. найдите sina/2, cosa/2 и tga/2, если cosa= – 12/13 и a принадлежит IIIчетверти.	$\sin\frac{a}{2}=-\sqrt{\frac{25}{26}}$; $\cos\frac{a}{2}=-\sqrt{\frac{1}{26}}$; $tg\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{25}{1}}=5$
3.упростите выражение: $\frac{1-\cos a}{1+\cos a}\cdot ctg\frac{a}{2}-\sin^2 a$	$\cos^2 a$
4. упростите выражение: $1-2\sin^2 a+\cos 2a$	2 cos2a

На На оглавление Дальше

ПОСТТЕСТ

На «3» решить первые 3 задания.
На «4-5» решить соответственно 4 и 5 заданий.

I вариант	II вариант
1. пусть cos a= –0,6 и a – угол III четверти, найдите sin2a, cos2a, tg2a.	1. пусть tg a= 3/4 и a – угол III четверти, найдите sin2a, cos2a, tg2a.
2. вычислите 2 sin 15 cos 15	2. вычислите 2 sin 30 cos 30
3. докажите тождество: (sin a + cos a) – sin 2a = 1	3. докажите тождество: 4 sin a cos a cos 2a = sin 4a.
4. Упростите выражение: 4 sin a/2 sin (п – a)/2 sin (3п/2 – a)	4.упростите выражение: 4 cos a/4 cos (2п + a)/4 cos (2п +a)/2
5. упростите выражение: $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$	5. упростите выражение: $\frac{2\sin^2\alpha-1}{1-2\cos^2\alpha}$

На На оглавление

Формулы приведения

Цели

Узнать свойства полупериода синуса и косинуса.

Познакомиться с формулами приведения;

Применять формулы для нахождения тригонометрических функций

Содержание обучения:

1. Свойства полупериода синуса и косинуса.

2. Формулы приведения.

На На оглавление

Дальше

§ 1. Свойства полупериода синуса и косинуса

Функции синус и косинус при уменьшении или увеличении аргумента на π изменяются только по знаку:

$$\text{Sin}a = -\sin(a \pm \pi) \qquad (1)$$

$$\text{Cos}a = -\cos(a \pm \pi) \qquad (2)$$

Если к аргументу прибавить π, умноженное на любое нечетное число, то получатся формулы:

$$\text{Sin}a = -\sin[a \pm \pi\,(2k+1)] \qquad (3)$$

$$\text{Cos}a = -\cos[a \pm \pi\,(2k+1)] \qquad (4)$$

Т.е. функции синус и косинус при изменении аргумента на π (2k+1) изменяются только по знаку.

На На оглавление Дальше

§ 2. Формулы приведения

Формулы приведения позволяют выразить тригонометрические функции углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \pi \pm \alpha, \frac{3\pi}{2} \pm \alpha, 2\pi \pm \alpha$ через тригонометрические функции угла α.

Функция / Аргумент	sin	cos	tg	ctg
– α	– sinα	cosα	– tgα	–ctgα
(90 – α) $\frac{\pi}{2} - \alpha$	cosα	sinα	ctgα	tgα
(90 + α) $\frac{\pi}{2} + \alpha$	cosα	– sinα	– ctgα	– tgα
(180 – α) $\pi - \alpha$	sinα	– cosα	– tgα	– ctgα
(180 +α) $\pi + \alpha$	– sinα	– cosα	tgα	ctgα

На На оглавление Дальше

Тренинг. Решение упражнений

Вычислить:

$1)\sin 150^0;$

$2)\sin(-120^0);$

$3)\cos 225^0;$

$4)\cos(-240^0).$

В примерах 1) – 4) используем формулы (1) и (2), а также свойства четности и нечетности тригонометрических функций:

$$1)\sin 150^0 = -\sin(150^0 - 180^0) = -\sin(-30^0) = 1/2;$$

$$2)\sin(-120^0) = -\sin(-120^0 + 180^0) = -\sin 60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$3)\cos 225^0 = -\cos(225^0 - 180^0) = -\cos 45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$4)\cos(-240^0) = -\cos(-240^0 + 180^0) = -\cos(-60^0) = -\cos 60^0 = -1/2.$$

Вычислить:

$1)\sin(-\frac{7\pi}{6});$

$2)\cos(-\frac{2\pi}{3}).$

$$1)\sin(-\frac{7\pi}{6}) = -\sin(-1\frac{1}{6}\pi + \pi) = -\sin(-\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

$$2)\cos(-\frac{2\pi}{3}) = -\cos(-\frac{2\pi}{3} + \pi) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

На На оглавление

Дальше

ТЕСТ

Вычислить:

$1)\sin 135^0;$

$2) ctg 150^0;$

$3)\cos 70^0.$

$1)\frac{\sqrt{2}}{2};$

$2)-\sqrt{3};$

$3)\sin 20^0.$

Вычислить:

$1)\sin(-\frac{2\pi}{3});$

$2)\cos(-\frac{3\pi}{4}).$

$1)-\frac{\sqrt{3}}{2};$

$2)-\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Вычислить:

$1)\sin(-810^0)+\cos(-900^0)+tg(-395^0)\cdot ctg575^0;$

$2)\sin(-\frac{13\pi}{6})+\cos(\frac{17\pi}{3})+tg(\frac{22\pi}{3})-ctg(\frac{37\pi}{4}).$

$1)-3;$

$2)\sqrt{3}-1.$

Посттест на «3»

Посттест на «4» и «5»

На На оглавление

Посттест на «3»

1. Вычислить:

$$\cos 240^0.$$

Ответы:

А) -1/2 Б) 1/2 В) 1

2 задание

Вычислить:

$$\sin(-2383^0)+\cos(-495^0)-\sin(-2023^0).$$

Ответы:

$A)-\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$ $Б)-\sqrt{3}.$ $B)-1/2.$

2-е задание

Вычислить:

$$\sin(-2383^0) + \cos(-495^0) - \sin(-2023^0).$$

$A) -\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$ $Б) -\sqrt{3}.$ $В) -1/2.$

Посттест на «4» и «5»

Вычислить:

$$1)\ \sin 1200^0 - \cos 1410^0 + 3tg 930^0.$$

Упростите:

$$\frac{tg(\alpha - \frac{\pi}{2}) - ctg(\pi - \alpha) + \cos(\alpha - \frac{3\pi}{2})}{\sin(\pi + \alpha)}$$

Докажите тождество:

$$\frac{1 - ctg^2(\alpha - \frac{3\pi}{2})}{ctg(\alpha + \frac{\pi}{2})} \cdot \frac{tg(\alpha - \frac{\pi}{2})}{1 - ctg^2(\alpha - 2\pi)} = -1$$

На оглавление

Формулы суммы и разности тригонометрических функций

Цели

Познакомиться с формулами суммы и разности тригонометрических функций;

Применять формулы для нахождения тригонометрических функций.

Содержание обучения:

Формулы суммы и разности косинусов (синусов)

Преобразование произведения тригонометрических функций в алгебраическую сумму.

На оглавление

Дальше

§ 1. Формулы суммы и разности тригонометрических функций.

Сумму и разность синусов и косинусов можно представить в виде произведения.

Чтобы представить в виде произведения сумму sin а + sin в, положим а = х+у и в = х–у и воспользуемся формулами сложения. Получим:

Sin a + sinв = sin (x+y) + sin (x –y) = sinxcosy + cosxsiny + sinxcosy – cosxsiny = 2sinxcos

Из условий а = х + у и в = х– у находим, что х = (а + в) /2 и у = (а – в)/2. Тогда

$$\mathbf{\sin a + \sin в = 2 \sin \frac{a + в}{2} \cos \frac{a - в}{2}} \qquad (1)$$

получили *формулу суммы синусов двух углов.*

Аналогично можно вывести *формулы разности синусов, суммы и разности косинусов.*

$$\mathbf{\sin a - \sin в = 2 \sin \frac{a - в}{2} \cos \frac{a + в}{2}} \qquad (2)$$

$$\mathbf{\cos a + \cos в = 2 \cos \frac{a + в}{2} \cos \frac{a - в}{2}} \qquad (3)$$

$$\mathbf{\cos a - \cos в = -2 \sin \frac{a + в}{2} \sin \frac{a - в}{2}} \qquad (4)$$

На оглавление Дальше

Часто используются также следующие формулы:

$$tga + tgb = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}, a \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, b \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$tga - tgb = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}, a \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, b \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

Часто используются также следующие формулы:

$$1 + \cos a = 2\cos^2 \frac{a}{2};$$

$$1 - \cos a = 2\sin^2 \frac{a}{2};$$

$$1 + \sin a = 2\cos^2 (\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2});$$

$$1 - \sin a = 2\sin^2 (\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}).$$

На оглавление

Дальше

§ 2. Преобразование произведения тригонометрических функций в алгебраическую сумму.

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

На оглавление

Дальше

Тренинг. Решение упражнений

Алгоритм решения	Решение
1. упростим сумму: sin 10 + sin 50 воспользуемся формулой суммы синусов	sin10+sin50=2sin(10+50)/2cos(10–50)/2 =2sin30cos(–20) = 2 * ½ * cos 20= cos 20
2. представьте в виде произведения: cos 0,3п – sin 0,6п 1. sin 0,6п = sin 6п/10 = sin 3п/5, переведем его в градусы. 2. cos 0,3п тоже переведем в градусы. 3. Представим синус в виде суммы sin 108 = sin (90+18), разложим по формуле синуса суммы. 4. Получилось выражение: cos 54 – cos18, разложим его по формуле разность косинусов. 5. Упростим выражение и получим: –2 sin 36 cos 18	1. sin 3п/5= sin 108 2. cos 0,3п = cos 54 3. sin 108 = sin (90+18)=sin90cos18 + +cos90 sin18 = cos18, т.к. косинус 90 равен нулю. 4. cos54–cos18= –2sin(54+18)/2*sin(54 –-18)/2 5. cos54–cos18= –2 sin 36 cos 18

На оглавление

Дальше

Тест

Задания	Ответы
1. разложите на множители выражение: а)sin 3a + sin a; б) cos y – cos 3y.	а) 2sin(2a)cosa; б) –2sin(2y)sin(-y)=2sin(2y)siny
2. представьте в виде произведения: sin 15 + cos 65.	Sin15 = sin(90-75) = sin90cos75–cos90sin75 = = cos75, cos75 + cos65 = 2 cos70cos5
3. докажите, что: $\frac{\sin a - \sin 2a - \sin 4a + \sin 5a}{\cos a - \cos 2a - \cos 4a + \cos 5a} = tg3a.$	
4. вычислите: $4\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}; \cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}.$	. $\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}$
5. проверьте, что: sin 10 + sin 50 – cos 20 = 0	

[Посттест на «3», «4» и «5»](#)

Выбрать 2 вариант

[На оглавление](#)

Обратные тригонометрические функции. Построение дуги (угла) по данному значению тригонометрической функции.

Цели

Узнать обратные тригонометрические функции.

Познакомиться со способом построения и нахождением дуги (угла) по данному значению тригонометрической функции;

Применять формулы для нахождения дуг (углов).

Содержание обучения:

1. Обратные тригонометрические функции.
2. Построение дуги (угла) по заданному значению тригонометрической функции.

На оглавление

Дальше

§ 1. Обратные тригонометрические функции

Функция $y = \sin x$ на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ обратима, т.е. имеет обратную функцию, которая называется арксинусом и обозначается $y = \arcsin x$:

$$D(\arcsin x) = [-1; 1],\ E(\arcsin x) = [-\pi/2; \pi/2];$$

$$\sin(\arcsin x) = x, \text{ где } x \in [-1; 1];\ \arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

Функция $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ обратима, т.е. имеет обратную функцию, которая называется арккосинусом и обозначается $y = \arccos x$:

$$D(\arccos x) = [-1; 1],\ E(\arccos x) = [0; \pi];$$

$$\cos(\arccos x) = x, \text{ где } x \in [-1; 1];\ \arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

Функция $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $(-\pi/2; \pi/2)$ обратима, т.е. имеет обратную функцию, которая называется арктангенсом и обозначается $y = \operatorname{arctg} x$:

$$D(\operatorname{arctg} x) = R,\ E(\operatorname{arctg} x) = (-\pi/2; \pi/2);$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \text{ где } x \in R;\ \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x.$$

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0; \pi)$ обратима, т.е. имеет обратную функцию, которая называется арккотангенсом и обозначается $y = \operatorname{arcctg} x$:

$$D(\operatorname{arcctg} x) = R,\ E(\operatorname{arcctg} x) = (0; \pi);$$

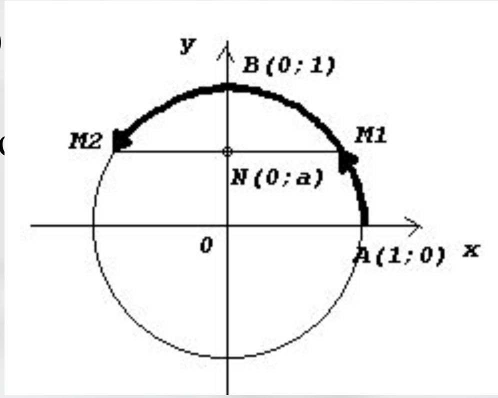
$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \text{ где } x \in R;\ \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

На оглавление Дальше

§ 2. Построение дуги (угла) по данному значению тригонометрической функции

1. **Найти множество дуг α, синус которых равен а.**

На оси OY единичной окружности построим точку N (0;a) и проведем через нее прямую, параллельную оси ОХ.



1. Пусть |a| < 1; тогда прямая у = а пересечет единичную окружность в точках M_1 и M_2 (см.рис.), симметричных относительно оси OY.

Точке M_1 соответствует дуга $AM_1 = \arcsin a$, а точке M_2 – дуга $\pi - \arcsin a$. Каждая из этих дуг имеет синус равный а. Множество дуг, оканчивающихся в точке M_1 и имеющих синус, равный а, выражается формулой:

$$\alpha = \arcsin a + 2\pi k \ (k \in Z),$$

а множество дуг, оканчивающихся в точке M_2 и имеющих синус, также равный а, выражается формулой: $\alpha = \pi - \arcsin a + 2\pi k \ (k \in Z)$,

т.к. $(-1)^n = 1$ при $n = 2k$ (т.е. если n – четное) и $(-1) = -1$ при $n = 2k + 1$ (n – нечетное), то эти две формулы можно объединить в одну: $\alpha = (-1)^n \arcsin a + \pi n \ (n \in Z)$.

Частные случаи: а) если а = 1, то $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, (k \in Z)$

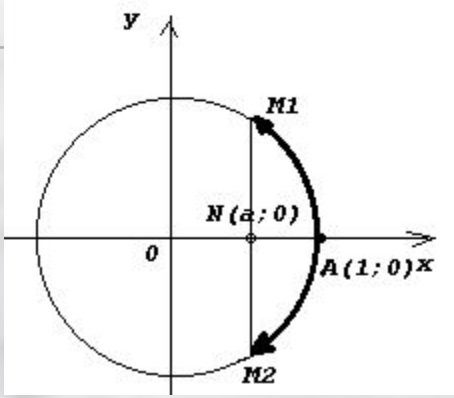
б) если а = –1, то $\alpha = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, (k \in Z)$

На оглавление

Дальше

2. Найти множество дуг α, косинус которых равен а.

На оси ОХ единичной окружности построим точку N (a;0) и проведем через нее прямую, параллельную оси OY.



1. Пусть $|a| < 1$; тогда прямая $x = a$ пересечет единичную окружность в точках M_1 и M_2 (см.рис.), симметричных относительно оси ОХ.

Точке M_1 соответствует дуга $AM_1 = \arccos a$, а точке M_2 – дуга $-\arccos a$. Каждая из этих дуг имеет косинус равный а. Множество дуг, оканчивающихся в точке M_1 и имеющих косинус, равный а, выражается формулой:

$$\alpha = \arccos a + 2\pi k \ (k \in Z),$$

а множество дуг, оканчивающихся в точке M_2 и имеющих косинус, также равный а, выражается формулой: $\alpha = -\arccos a + 2\pi k \ (k \in Z)$,

эти две формулы можно объединить в одну:

$$\alpha = \pm \arccos a + 2\pi n \ (n \in Z).$$

Частные случаи: а) если $a = 1$, то $\alpha = 2\pi k, (k \in Z)$

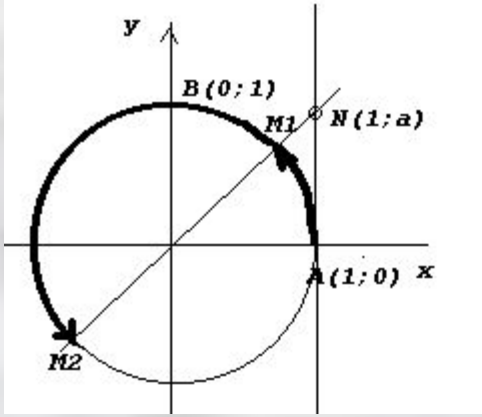
б) если $a = -1$, то $\alpha = \pi + 2\pi k, (k \in Z)$

На оглавление

Дальше

3. Найти множество дуг α, тангенс которых равен а.

На оси тангенсов построим точку N (1;a).Проведем через эту точку и начало координат прямую, которая пересечет единичную окружность в точках M_1 и M_2 (см.рис.).



Тангенс дуг AM_1 и AM_2 равен ординате a точки N – точке пересечения продолжения радиуса OM_1 с осью тангенсов.

Точке M_1 соответствует дуга AM_1= arctg a,

а точке M_2 соответствует дуга AM_2= arctg a + π.

Каждая из этих дуг имеет тангенс равный а.

Множество дуг, оканчивающихся в точках M_1 и M_2 записывается общей формулой:

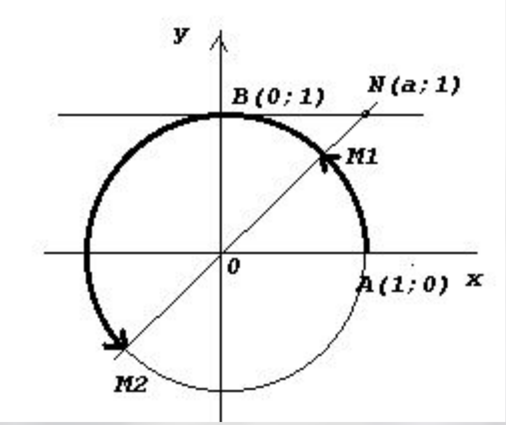
$\alpha = \operatorname{arctg} a + \pi n \ (n \in Z)$.

На оглавление

Дальше

4. Найти множество дуг α, котангенс которых равен a.

На оси котангенсов построим точку N (a;1). Проведем через эту точку и начало координат прямую, которая пересечет единичную окружность в точках M_1 и M_2 (см.рис.).



Котангенс дуг AM_1 и AM_2 равен абсциссе a точки N – точке пересечения продолжения радиуса OM_1 с осью котангенсов.

Точке M_1 соответствует дуга AM_1= arcctg a,

а точке M_2 соответствует дуга AM_2= arcctg a + π.

Каждая из этих дуг имеет котангенс равный a.

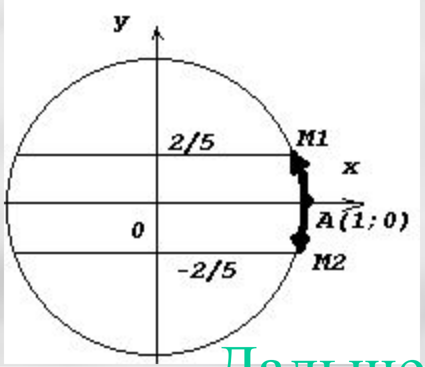
Множество дуг, оканчивающихся в точках M_1 и M_2 записывается общей формулой:

$\alpha = \text{arcctg } a + \pi n \ (n \in Z)$.

На оглавление

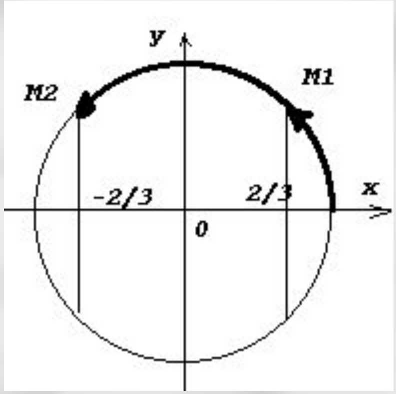
Дальше

Тренинг. Решение упражнений

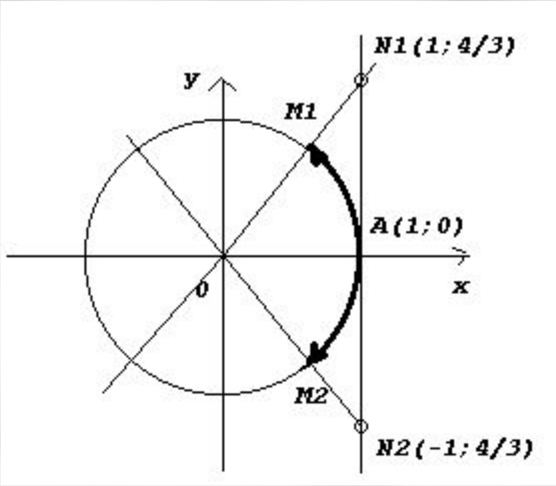
Алгоритм решения	Решение
Записать главные дуги, синус которых равен: 1) 0; 2) –1; 3) 1; 4) $\sqrt{3}/2$; 5) –1/2.	1) α= arcsin0 = 0; 2) α= arcsin(–1)= –arcsin1 = –π/2; 3) α= arcsin1 = π/2; 4) α= arcsin$\sqrt{3}/2$ = π/3; 5) α= arcsin(–1/2) = – arcsin(1/2)= – π/6.
Записать множество дуг, синус которых равен ½.	На окружности имеются две точки, служащие концами дуг α1 и α2, синус которых равен ½: α1= arcsin1/2 = π/6 и α2= π– arcsin1/2 =π – π/6. Следовательно, искомое множество дуг выражается формулами: $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ и $\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k = -\frac{\pi}{6} + \pi(2k+1)$ или $\alpha = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, (n \in Z)$
Построить главные дуги arcsin (2/5) и arcsin (–2/5).	

На оглавление

Дальше

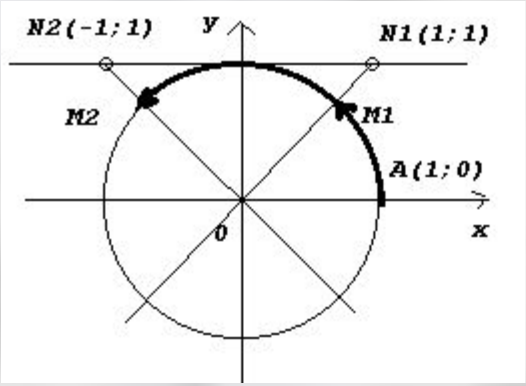
Записать главные дуги, косинус которых равен: 1) 0; 2) 1; 3) –1; 4) $-\sqrt{2}/2$; 5) 1/2.	1) α= arccos0 = π/2; 2) α= arccos1=0; 3) α= arccos(–1) = π; 4) α= arccos($-\sqrt{2}/2$) = π– arccos($-\sqrt{2}/2$)= π–π/4=3π/4 ; 5) α= arccos1/2 = π/3.
Записать множество дуг, косинус которых равен ½.	На окружности имеются две точки, служащие концами дуг α1 и α2, косинус которых равен ½: α1= arccos1/2 = π/3 и α2= – arccos1/2 = – π/3. Следовательно, искомое множество дуг выражается формулой: $\alpha = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, (n \in Z)$
Построить главные дуги arccos (2/3) и arccos (–2/3).	

[На оглавление](#) [Дальше](#)

Записать главные дуги, тангенс которых равен: 1) 0; 2) 1; 3) –1; 4) $-\sqrt{3}/3$; 5) $\sqrt{3}$.	1) $\alpha = \mathrm{arctg}\,0 = 0$; 2) $\alpha = \mathrm{arctg}\,1 = \pi/4$; 3) $\alpha = \mathrm{arctg}(-1) = -\mathrm{arctg}\,1 = -\pi/4$; 4) $\alpha = \mathrm{arctg}(-\sqrt{3}/3) = -\mathrm{arctg}(\sqrt{3}/3) = -\pi/6$; 5) $\alpha = \mathrm{arctg}\,\sqrt{3} = \pi/3$.
Записать множество дуг, тангенс которых равен $\sqrt{3}$.	На окружности имеются две точки, служащие концами дуг $\alpha 1$ и $\alpha 2$, тангенс которых равен $\sqrt{3}$: $\alpha 1 = \mathrm{arctg}\sqrt{3} = \pi/3$ и $\alpha 2 = \mathrm{arctg}\sqrt{3} + \pi = \pi/3 + \pi$. Следовательно, искомое множество дуг выражается формулой: . $\alpha = \frac{\pi}{3} + \pi n, (n \in Z)$
Построить главные дуги arctg (4/3) и arctg (– 4/3).	

На оглавление

Дальше

Записать главные дуги, котангенс которых равен: 1) √3/3; 2) –1; 3) √3; 4) —√3.	1) α= arcctg(√3/3) = π/3; 2) α= arcctg(–1)= π– arcctg1=π–π/4=3π/4; 3) α= arcctg√3 = π/6; 4) α= arcctg(–√3)= π– arcctg √3= π–π/6= 5π/6.
Записать множество дуг, котангенс которых равен √3.	На окружности имеются две точки, служащие концами дуг α1 и α2, косинус которых равен √3: α1= arcctg√3 = π/6 и α2= arcctg√3 + π= π/6 +π. Следовательно, искомое множество дуг выражается формулой: . $\alpha = \frac{\pi}{6} + \pi n, (n \in Z)$
Построить главные дуги arcctg1 и arcctg (–1).	

[На оглавление](#)

[Дальше](#)

Тест

Задания	Ответы
Записать главные дуги, синус которых равен: 1) 1/2; 2) $\sqrt{2}/2$; 3) $-\sqrt{2}/2$.	1) $\pi/6$; 2) $\pi/4$; 3) $-\pi/4$.
Записать множество дуг, синус которых равен $\sqrt{3}/2$.	$\alpha = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, (k \in Z)$
Построить главные дуги arcsin (1/3) и arcsin (–1/3).	
Записать множество дуг, косинус которых равен 1)–½; 2) $\sqrt{3}/2$.	1) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, (k \in Z)$; 2) $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, (k \in Z)$.
Построить главные дуги arccos (4/5) и arccos (–4/5).	
Записать главные дуги, тангенс которых равен: 1) ½; 2) $\sqrt{3}/3$; 3) $-\sqrt{3}$.	1)arctg(1/2); 2)$\pi/6$; 3)$-\pi/3$.

На оглавление

Посттест

Посттест на «3», «4» и «5»

На «3» выполнить первые два задания.
На «4» выполнить первые три задания.
На «5» выполнить все задания.

Построить дуги, косинус которых равен (0,6).
Записать множество дуг, тангенс которых равен 1)–1; 2)√3.
Записать главные дуги, котангенс которых равен √3/3
Вычислить cos(a/2), если cos a= $-\frac{369}{625}$ и . $180^0 < a < 270^0$

На оглавление

Тригонометрические уравнения и тригонометрические неравенства

Цели

Решать простейшие тригонометрические уравнения.

Решать простейшие тригонометрические неравенства

Содержание обучения:

Тригонометрические уравнения.

Тригонометрические неравенства.

На оглавление

Дальше

§ 1. Тригонометрические уравнения

Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения

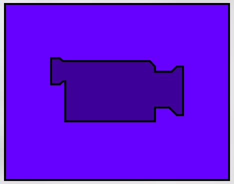
$$\sin x = m,\ \cos x = m,\ \mathrm{tg}\, x = m,\ \mathrm{ctg}\, x = m,$$

где m – данное число.

Решить простейшее тригонометрическое уравнение – значит найти множество всех значений аргументов (дуг или углов), при которых данная тригонометрическая функция принимает заданное значение m.

1. *Решить уравнение sinx = m.*

Решение: Если $|m| \le 1$, то на единичной окружности имеются две дуги arcsin m и π – arcsin m, синус которых равен m и концы которых симметричны относительно оси OY.



Наименьшая по абсолютной величине дуга arcsin m из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которой равен m, называется главным решением уравнения sinx = m. Множество всех искомых дуг, удовлетворяющих уравнению sinx = m, находится прибавлением к найденным двум дугам любого целого числа периодов синуса:

$$x = \left\{ \frac{\arcsin m + 2\pi k,}{\pi - \arcsin m + 2\pi k,} \right. \quad \text{или} \quad x = \left\{ \frac{\arcsin m + 2\pi k,}{-\arcsin m + \pi(2k+1).} \right.$$

Множество корней уравнения можно записать одной формулой:

$x = (-1)^n \arcsin m + \pi n\ (n \in Z)$.

На оглавление

Дальше

Если |m|>1, то уравнение решения не имеет.

Частные случаи:

1) $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, (k \in Z)$;

2) $\sin x = 0$, $x = \pi k, (k \in Z)$;

3) $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, (k \in Z)$

На оглавление

Дальше

2. *Решить уравнение cosx = m.*

Решение: Если $|m| \le 1$, то на единичной окружности имеются две дуги arccos m и – arccos m, косинус которых равен m и концы которых симметричны относительно оси OX.

Наименьшая по абсолютной величине дуга arccos m из промежутка $[0;\pi]$, косинус которой равен m, называется главным решением уравнения cosx = m. Множество всех искомых дуг, удовлетворяющих уравнению cosx = m, находится прибавлением к найденным двум дугам любого целого числа периодов косинуса

$x = \pm \arccos m + \pi k \ (k \in Z).$

Если $|m|>1$, то уравнение решения не имеет.

Частные случаи:

1) cosx = –1; $x = \pm\pi + 2\pi k,$ или $x = \pi(2k+1), k \in Z$;

2) cosx = 0; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, (k \in Z)$;

3) cosx = 1; $x = 2\pi k, (k \in Z)$

На оглавление

Дальше

3. *Решить уравнение tgx = m.*

Решение: Наименьшая по абсолютной величине дуга arctg m из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которой равен m, называется главным решением уравнения tgx = m. Множество всех искомых дуг, удовлетворяющих уравнению tgx = m, находится прибавлением любого целого числа периодов тангенса

$$x = \operatorname{arctg} m + \pi k \ (k \in Z).$$

Частный случай:

tgx = 0, $x = \pi k, (k \in Z)$

4. *Решить уравнение ctgx = m.*

Решение: Наименьшая положительная дуга arcctg m из промежутка $(0;\pi)$, котангенс которой равен m, называется главным решением уравнения ctgx = m. Множество всех искомых дуг, удовлетворяющих уравнению ctgx = m, находится прибавлением любого целого числа периодов котангенса

$$x = \operatorname{arcctg} m + \pi k \ (k \in Z).$$

Частный случай:

ctgx = 0, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, (k \in Z)$

На оглавление

Дальше

§ 2. Тригонометрические неравенства.

Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства

$\sin x < m,\ \sin x > m,\ \cos x < m,\ \cos x > m,\ \mathrm{tg}\, x < m,\ \mathrm{tg}\, x > m,\ \mathrm{ctg}\, x < m,\ \mathrm{ctg}\, x > m,$

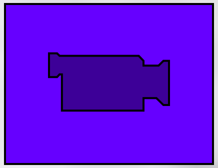
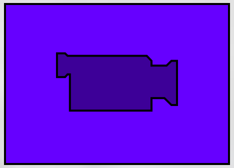
где m – данное число.

Решить простейшее тригонометрическое неравенство – значит найти множество всех значений аргументов (дуг или углов), которые обращают данное неравенство в верное числовое неравенство.

На оглавление

Дальше

Тренинг. Решение упражнений

Алгоритм решения	Решение
1) Решить уравнение $\sin x = ½$. Главным решением является дуга $AM_1 = \pi/6$ из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которой ½. Множество корней уравнения имеет вид: $x = (-1)^n \arcsin 1/2 + \pi n,\ (n \in Z)$ $x = (-1)^n \pi/6 + \pi n,\ (n \in Z)$.	
2) Решить неравенство: $\sin x < ½$. Учитывая свойство ограниченности синуса, данное неравенство можно переписать так: $-1 \leq \sin x < ½$. Имеем: $AM_1 = \pi/6$, $AM_2 = -\pi - \pi/6 = -7\pi/6$. Неравенству $\sin x < ½$ удовлетворяют дуги из промежутка $\left(-\frac{7\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$. Т.к. синус периодическая функция, то надо добавить период: $\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k \in Z$.	

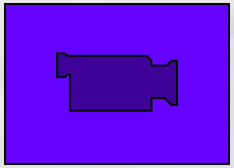
[На оглавление](#)

[Дальше](#)

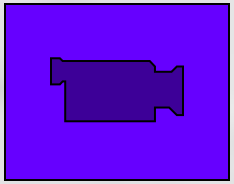
3). Решить неравенство: $|\sin x| > \frac{1}{2}$.

Это неравенство выполняется для всех дуг $x_1 < x < x_2$ и $x_3 < x < x_4$, где $x_1 = \pi/6$,
$x_2 = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$,
$x_3 = x_1 + \pi = \pi/6 + \pi$,
$x_4 = x_2 + \pi = 5\pi/6 + \pi$, т.е.
$\pi/6 < x < 5\pi/6$, и $\pi/6 + \pi < x < 5\pi/6 + \pi$. Общим решением служит множество дуг вида:

$$\left(\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{5\pi}{6} + \pi k\right), k \in Z.$$



4) Решить уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$.
Главным решением является дуга $AM_1 = \pi - \pi/3 = 2\pi/3$ из промежутка $[0; \pi]$
косинус которой $-\frac{1}{2}$.
Множество корней уравнения имеет вид:
$x = \pm \arccos(-1/2) + 2\pi n, (n \in Z)$
$x = \pm 2\pi/3 + 2\pi n, (n \in Z)$.

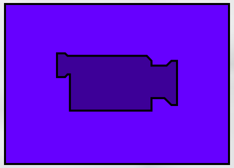


На оглавление

Дальше

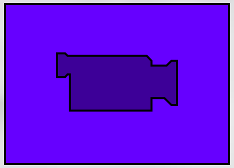
5) Решить неравенство: cosx >– ½. Перепишем данное неравенство так: –1/2< cosx ≤ 1. Неравенству cosx >–½ удовлетворяют дуги из промежутка $\left(-\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right)$. Общим решением будет:

$$\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$$, k∈Z.



6) Решить неравенство: cosx <– ½. Перепишем данное неравенство так: –1≤ cosx < -1/2. Имеем: AM_1 = π–π/3=2π/3, AM_2 =π + π/3= 4π/3. Неравенству cosx < –½ удовлетворяют дуги из промежутка $\left(\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right)$. Т.к. косинус периодическая функция, то:

$$\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\frac{4\pi}{3}+2\pi k\right)$$, k∈Z.



На оглавление

Дальше

7) Решить неравенство: $|\cos x| > \sqrt{2}/2$.

Это неравенство выполняется для всех дуг $x_1 < x < x_2$ и $x_3 < x < x_4$, где $x_1 = \pi/4$,
$x_2 = -\pi/4$,
$x_3 = x_1 + \pi = \pi/4 + \pi$,
$x_4 = x_2 - \pi = -\pi/4 - \pi$, т.е. для
$-\pi/4 < x < \pi/4$, и $-\pi/4 - \pi < x < \pi/4 + \pi$.

Общим решением служит множество дуг вида:

$$\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right), k \in Z.$$

8) Решить уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

Главным решением является дуга $\pi/3$ из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ тангенс которой равен $\sqrt{3}$. Множество корней уравнения имеет вид: $x = \pi/3 + \pi k$, $k \in Z$.

9) Решить неравенство: $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$.

Учитывая свойство неограниченности тангенса, запишем $\sqrt{3} < \operatorname{tg} x < +\infty$. Неравенству $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$ удовлетворяют дуги из промежутка: $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$, учитывая период:

$$\left(\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z.$$

На оглавление

Дальше

10) Решить уравнение ctgx = –1.
Главным решением является дуга $\pi-\pi/4=3\pi/4$ из промежутка $(0;\pi)$, котангенс которой равен –1. Множество корней уравнения имеет вид: $x=3\pi/4+\pi k,\ k\in Z$.

11) Решите неравенство ctgx >1.
Учитывая свойство неограниченности котангенса, запишем $1< ctgx <+\infty$. Неравенству $ctgx > 1$ удовлетворяют дуги из промежутка: $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$, учитывая период:

$$\left(\pi k;\frac{\pi}{4}+\pi k\right)$$, $k\in Z$.

На оглавление

Дальше

Тест

Задания	Ответы
Решить уравнение $\sin x = \sqrt{2}/2$;	$x = (-1)^n \pi/4 + \pi n, (n \in Z)$.
Решите неравенства: 1) $\lvert\sin x\rvert<1/2$; 2)$\sin x > -\sqrt{3}/2$.	1) $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi k; \frac{\pi}{6}+\pi k\right)$, $k \in Z$.; 2) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{4\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k \in Z$.
Решить уравнение 1)$\cos x = -\sqrt{2}/2$; 2) $\cos x = \sqrt{3}/2$;	1) $x = \pm 3\pi/4 + 2\pi n, (n \in Z)$. 2) $x = \pm\pi/6 + 2\pi n, (n \in Z)$.
Решите неравенства: 1) $\lvert\cos x\rvert<1/2$; 2)$\cos x > -1$.	1) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi k; \frac{2\pi}{3}+\pi k\right)$, $k \in Z$.; 2) $(2\pi k-\pi; 2\pi k+\pi)$, $k \in Z$.
Решить уравнение $\mathrm{tg}x = -\sqrt{3}/3$	$-\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in Z$
Решите неравенство $\mathrm{tg}x<-\sqrt{3}$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k; -\frac{\pi}{3}+\pi k\right)$, $k \in Z$.

На оглавление

Дальше

Посттест

На «3» решить по 2 любых уравнения и неравенства (без построений), (всего 4 примера).
На «4» решить по три любых уравнения и неравенства (можно уравнения без построений), (всего 6 примеров).
На «5» выполнить все с построениями.

Решить уравнения 1) $\sin x = -\sqrt{3}/2$; 2) $\cos x = 1/2$; 3) $\operatorname{tg} x = 1$; 4) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$.
Решите неравенства 1) $\sin x < -\sqrt{3}/2$; 2) $\cos x < 1/2$; 3) $\lvert \operatorname{tg} x \rvert < \sqrt{3}$; 4) $\lvert \operatorname{ctg} x \rvert < 1$.

На оглавление

Решение тригонометрических уравнений и тригонометрических неравенств

Цели

1. Решать тригонометрические уравнения.

2. Решать тригонометрические неравенства

Содержание обучения:

Примеры решения различных тригонометрических уравнений.

Примеры решения различных тригонометрических неравенств

На оглавление

Дальше

§ 1. Примеры решения различных тригонометрических уравнений

1. *Решить уравнение $\sin^2 x = m. (0 \le m \le 1)$*

Решение: Данное уравнение сводится к двум простейшим уравнениям $\sin x = \sqrt{m}$ и $\sin x = -\sqrt{m}$. Записав решение каждого из них по общей формуле, получим:

$x = \pi k + (-1)^k \arcsin\sqrt{m}$ и $x = \pi k - (-1)^k \arcsin\sqrt{m}$

Множество корней уравнения можно записать одной формулой:

$$x = \pi n \pm \arcsin \sqrt{m}, \quad (n \in Z).$$

2. *Решить уравнение $\cos^2 x = m. (0 \le m \le 1)$*

Решение: Данное уравнение сводится к двум простейшим уравнениям $\cos x = \sqrt{m}$ и $\cos x = -\sqrt{m}$. Записав решение каждого из них по общей формуле, получим

$x = 2\pi k \pm \arccos\sqrt{m}$ $\quad x = 2\pi k \pm (\pi - \arccos\sqrt{m}) = \pi(2k \pm 1) \pm \arccos\sqrt{m}$

Множество корней уравнения можно записать одной формулой:

$$x = \pi n \pm \arccos \sqrt{m}, \quad (n \in Z).$$

На оглавление

Дальше

3. *Решить уравнение* $tg^2\, x = m$.

Решение: Данное уравнение сводится к двум простейшим уравнениям $tgx = \sqrt{m}$ и $tgx = -\sqrt{m}$.
Записав решение каждого из них по общей формуле, получим:

$$x = \pi k + arctg\sqrt{m} \quad \text{и} \quad x = \pi k - arctg\sqrt{m}$$

Множество корней уравнения можно записать одной формулой:

$$x = \pi k \pm arctg\sqrt{m}, \quad (k \in Z).$$

4. *Решить уравнение* $ctg^2\, x = m$.

Решение: Данное уравнение сводится к двум простейшим уравнениям $ctgx = \sqrt{m}$ и $ctgx = -\sqrt{m}$.
Записав решение каждого из них по общей формуле, получим:

$$x = \pi k + arcctg\sqrt{m} \quad \text{и} \quad x = \pi k - arcctg\sqrt{m}$$

Множество корней уравнения можно записать одной формулой:

$$x = \pi k \pm arcctg\sqrt{m}, \quad (k \in Z).$$

На оглавление

Дальше

§ 2. Примеры решения различных тригонометрических неравенств

1) $\sin\frac{x}{2} > \frac{1}{2}$. Имеем: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < \frac{x}{2} < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k;$ домножим выражение на 2:

$\frac{\pi}{3} + 4\pi k < x < \frac{5\pi}{3} + 4\pi k;$ или x $\in \left(\frac{\pi}{3} + 4\pi k; \frac{5\pi}{3} + 4\pi k\right)$, k$\in$Z.

2) $tg\,2x < -1$. Имеем: $\frac{\pi}{2} + \pi k < 2x < -\frac{\pi}{4} + \pi k;$ разделим все выражение на 2:

$-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} < x < -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2};$ или x $\in \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right)$.

На оглавление

Дальше

Тренинг. Решение упражнений

Алгоритм решения	Решение
1) Решить уравнение sin2x = ½. $2x = (-1)^n \arcsin 1/2 + \pi n$, ($n \in Z$) $2x = (-1)^n \pi/6 + \pi n$, ($n \in Z$). Разделим выражение на 2.	Множество корней уравнения имеет вид: $x = (-1)^n \pi/12 + \pi n/2$, ($n \in Z$).
2) Решить уравнение tg(3x + 2)= –1. $3x + 2 = -\frac{\pi}{4} + \pi k;$ $3x = -\frac{\pi}{4} - 2 + \pi k;$	Множество корней уравнения имеет вид: $x = -\frac{\pi}{12} - \frac{2}{3} + \frac{\pi k}{3};$ (k∈Z).
3) Решить уравнение ctg x^2 =0 $x^2 = \frac{\pi}{2} + \pi \mid k \mid,$	Множество корней уравнения имеет вид: $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + \pi \mid k \mid},$ (k∈Z).
4) Решить уравнение cos(cosx) = ½. $x = \pm \arccos(1/2) + 2\pi n$, ($n \in Z$) $x = \pm \pi/3 + 2\pi n$, ($n \in Z$).	Это уравнение не имеет корней, т.к. при любом k его правая часть превосходит единицу по абсолютной величине.

На оглавление

Дальше

5) Решить уравнение $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$ Сделаем замену: sinx = t. Имеем: $2t^2 - 7t + 3 = 0$. Данное квадратное уравнение решаем относительно t. Получаем корни: $t_1 = ½$; $t_2 = 3$. Возвращаемся к исходной величине: $\sin x_1 = ½$; $\sin x_2 = 3$. sin x = ½; $x = (-1)^n \pi/6 + \pi n$, $(n \in Z)$ Уравнение sinx = 3 решения не имеет, т.к. область значений [–1;1].	Множество корней данного уравнения имеет вид: $x = (-1)^n \pi/6 + \pi n$, $(n \in Z)$
6)Решить уравнение $4\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$ Воспользуемся тригонометрическим тождеством и получим: $4(1 - \sin^2 x) + \sin x - 1 = 0$, после преобразования имеем: $4\sin^2 x - \sin x - 3 = 0$ Решаем аналогично предыдущему и получаем: sin x = – ¾ и sin x = 1.	Множество корней данного уравнения имеет вид: $x = (-1)^{n+1} \arcsin 3/4 + \pi n$, $(n \in Z)$ и $x = \pi/2 + \pi n$, $(n \in Z)$
7) Решить уравнение $3ctg3x + tg3x + 3 = 0$ Из определения tgx и ctgx, знаем, что знаменатели sin3x и cos 3x. Знаменатель не должен быть равен 0, поэтому: $3x \neq \pi k$, $3x \neq \pi/2 + \pi k$, т.е. $x \neq \pi k/3$, $x \neq \pi/6 + \pi k/3$. Заменяя ctg3x на 1/tg3x, получим:	Множество корней данного уравнения имеет вид: $\left\{-\frac{1}{3}arctg2 + \frac{\pi k}{3}; -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3} \middle| k \in Z\right\}$

$$2 \cdot \frac{1}{tg3x} + tg3x + 3 = 0; tg^2 3x + 3tg3x + 2 = 0;$$

$$tg3x = -2, 3x = -arctg2 + \pi k, x = -\frac{1}{3}arctg2 + \frac{\pi k}{3};$$

$$tg3x = -1, 3x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$$

На оглавление

Дальше

8) Решить уравнение $tgx\cos x + tgx - \cos x - 1 = 0$. По определению тангенса в знаменателе cosx $\neq 0$, x$\neq$ π/2+πk. Разложим левую часть на множители, а затем приравняем каждый из сомножителей к нулю: $tgx(\cos x + 1) - (\cos x + 1) = 0; (\cos x + 1)(tgx - 1) = 0;$ $\cos x + 1 = 0, \cos x = -1, x = \pi(2k+1)$ $tgx - 1 = 0, tgx = 1, x = \frac{\pi}{4} + \pi k$	Уравнению удовлетворяет множество корней вида: $\left\{\pi(2k+1), x = \frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in Z\right\}$
9) Решить уравнение $tg^3 x = tgx$. По определению тангенса в знаменателе cosx $\neq 0$, x$\neq$ π/2+πk. Имеем: $tg^3 x - tgx = 0, tgx(tg^2 x - 1) = 0, tgx = 0, tg^2 x - 1 = 0$ $x = \pi k, x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k.$	Уравнению удовлетворяет множество корней вида: $\left\{\pi k, x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in Z\right\}$
10) Решить уравнение $\sin x - \cos x = 0$. Имеем $\sin x = \cos x, \frac{\sin x}{\cos x} = 1$, $\cos x \neq 0, (x \neq \pi/2 + \pi k), tgx = 1$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in Z$

На оглавление

Дальше

11) Решить уравнение $\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$ Поделим все слагаемые на $\cos^2$ x, получим: $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{4\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0; (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k),$ $tg^2 x - 4tgx + 3 = 0,$ решаем его аналогично 5) и 6) примерам, получим: tgx = 1; tg x = 3. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, x = arctg3 + \pi k, k \in Z$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$ $x = arctg3 + \pi k, k \in Z$
12) Решить уравнение $2\sin^2 x + 5\sin x\cos x + \cos^2 x - 4 = 0$.Свободный член можно представить как 4*1, где 1 разложить по основному тригонометрическому тождеству. Получим: · $2\sin^2 x + 5\sin x\cos x + \cos^2 x - 4(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$ После преобразований получим однородное уравнение: $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$ Поделим все слагаемые на $\cos^2$ x, получим: решаем его аналогично 5) и 6) примерам, получим: $\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{5\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0; (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k),$ $2tg^2 x - 5tgx + 3 = 0,$ tgx = 1; tg x = 3/2. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$ $x = arctg\frac{3}{2} + \pi k, k \in Z$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, x = arctg\frac{3}{2} + \pi k, k \in Z$

На оглавление

Дальше

Тест

Задания	Ответы
Решить уравнения: 1) $\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{4}$ 2) tg(3x + 1) = 1; 3) sin(cosx)=0.	1) x = $2(-1)^n$ arcsin(1/4)–π/3 + 2πn, (n∈Z); 2) x = π/12 – 1/3 + πn/3, (n∈Z); 3) $\varnothing$
Решите неравенства: 1) sin2x < –1/2; 2) cos(x/2) >–1/2;	1) $\left(-\frac{5\pi}{12}+\pi k; -\frac{\pi}{12}+\pi k\right)$, k∈Z.; 2) $\left(-\frac{4\pi}{3}+4\pi k; \frac{4\pi}{3}+4\pi k\right)$, k∈Z.
Решить уравнение 1) $\sin^2 x$ = 1/2; 2) $tg^2 x$ = 1; 3) $ctg^2 x$ = 3.	1) x = ±π/4 + πn, (n∈Z). 2) x = ±π/4 + πn, (n∈Z). 3) x = ±π/6 + πn, (n∈Z).
Решить уравнения: 1) $2\sin^2 x + 3\sin x - 3 = 0$; 2) $2\sin x - 3\cos x = 0$; 3) $\sin^2 x - 6\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 0$; 4) $9\sin^2 x + 32\sin x\cos x + 25\cos^2 x = 25$. ;	1) $\left\{2\pi k; \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right\}$, k∈Z. 2) $x = arctg1,5 + \pi k, k \in Z$; 3) $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k, arctg5+\pi k \mid k \in Z\right\}$; 4) $\{\pi k, arctg2+\pi k \mid k \in Z\}$;

На оглавление

Посттест (выбрать 3 вариант)

Смешанные задания

Цели

Повторить:

1. Решение тригонометрических уравнений.
2. Решение тригонометрических неравенств.
3. Основные формулы.
4. Правила упрощения выражений.
5. Правила доказательства тождеств.

На оглавление

Дальше

Тренинг. Решение упражнений

1) $\sin(\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{4}{5})=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=1$

[обозначим arcsin3/5= α и arcsin4/5=β, имеем sinα=3/5, α∈ [–π/2; π/2] и sinβ=4/5, β∈[–π/2; π/2].
Находим $\cos\alpha=\sqrt{1-(3/5)^2}=4/5$ и $\cos\beta=\sqrt{1-(4/5)^2}=3/5$.]

2) $\cos(\arccos\frac{3}{5}+\arcsin\frac{8}{17})=$

[обозначим arccos3/5= α и arcsin8/17=β, имеем cosα=3/5, α∈[0;π] и sinβ=8/17, β∈[–π/2; π/2].
Находим $\sin\alpha=\sqrt{1-(3/5)^2}=4/5$ и $\cos\beta=\sqrt{1-(8/17)^2}=15/17$] =

$$=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{17}-\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{17}=\frac{13}{85}$$

3) $$tg(arctg\frac{1}{2}+arctg\frac{3}{2})=\frac{tgarctg\frac{1}{2}+tgarctg\frac{3}{2}}{1-tgarctg\frac{1}{2}\cdot tgarctg\frac{3}{2}}=\frac{1/2+3/2}{1-(1/2)\cdot(3/2)}=8$$

4) $ctg(\arcsin\frac{4}{5}+arctg3)=$ [обозначим arcsin4/5= α и arctg3=β, имеем sinα=4/5,

α∈ [–π/2; π/2] и tgβ=3, β∈(–π/2; π/2). Находим ctgα = 4/3 и ctgβ = 1/3]

$$=ctg(\alpha+\beta)=\frac{4/3\cdot 1/3-1}{4/3+1/3}=-\frac{1}{3}$$

На оглавление

Дальше

5) Решить уравнения:

А) $\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2})-\cos(\pi+x)+1=0 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}+\cos x+1=0 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}(1+2\cos\frac{x}{2})=0 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}=0$ или $1+2\cos\frac{x}{2}=0;$

$\cos\frac{x}{2}=0, \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k, x=\pi(2k+1);$

$1+2\cos\frac{x}{2}=0; \cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}, \frac{x}{2}=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k, x=\pm\frac{4\pi}{3}+4\pi k, x=\frac{4\pi}{3}(3k\pm1).$

Уравнению удовлетворяет множество корней вида $\left\{\pi(2k+1); x=\frac{4\pi}{3}(3k\pm1) \mid k\in Z\right\}$

Б) $\sin x+\cos x=1 \Leftrightarrow \sin x=1-\cos x \Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\sin^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}=0$ или $\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow$ второе уравнение поделим на косинус половинного угла:

$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}=0$ или $tg\frac{x}{2}=0$

$\sin\frac{x}{2}=0; \frac{x}{2}=\pi k; x=2\pi k;$

$tg\frac{x}{2}=1; \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi k; x=\frac{\pi}{2}+2\pi k.$

Уравнению удовлетворяет множество корней вида $\left\{2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k \mid k\in Z\right\}$

На оглавление

Дальше

В) 3 sin x + 4 cos x = 4. Выразим sin x и cos x через z = tg(x/2); имеем $\sin x=\dfrac{2z}{1+z^2}$ $\cos x=\dfrac{1-z^2}{1+z^2}$.

Тогда $\dfrac{6z}{1+z^2}+\dfrac{4-4z^2}{1+z^2}=4; 4z^2-3z=0; z_1=0, z_2=\dfrac{3}{4}$.

Данное уравнение равносильно совокупности уравнений tg(x/2)=0 и tg(x/2)=3/4, откуда x/2=πk и x/2=arctg(3/4)+πk. Уравнению удовлетворяет множество корней вида

$$\left\{2\pi k; 2arctg\frac{3}{4}+2\pi k \mid k\in Z\right\}$$

6) Преобразовать в произведение: $\sin 2\alpha\cos 3\alpha-2\sin^2\alpha\sin 3\alpha$

$$\sin 2\alpha\cos 3\alpha-2\sin^2\alpha\sin 3\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\cos 3\alpha-2\sin^2\alpha\sin 3\alpha=$$
$$=2\sin\alpha(\cos\alpha\cos 3\alpha-\sin\alpha\sin 3\alpha)=2\sin\alpha\cos 4\alpha$$

7) Доказать тождество:

$$1)\ \frac{\sin\alpha-\sin 2\alpha-\sin 4\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha-\cos 2\alpha-\cos 4\alpha+\cos 5\alpha}=tg 3\alpha$$

.

$$\frac{(\sin 5\alpha+\sin\alpha)-(\sin 4\alpha+\sin 2\alpha)}{(\cos 5\alpha+\cos\alpha)-(\cos 4\alpha+\cos 2\alpha)}=\frac{2\sin 3\alpha\cos 2\alpha-2\sin 3\alpha\cos\alpha}{2\cos 3\alpha\cos 2\alpha-2\cos 3\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin 3\alpha(\cos 2\alpha-\cos\alpha)}{2\cos 3\alpha(\cos 2\alpha-\cos\alpha)}=$$
$$=tg 3\alpha$$

$$2)\ \sin 47^0+\sin 61^0-\sin 11^0-\sin 25^0=4\cos 7^0\cos 36^0\sin 18^0$$

$$(\sin 47^0+\sin 61^0)-(\sin 11^0+\sin 25^0)=2\sin 54^0\cos 7^0-2\sin 18^0\cos 7^0=$$
$$=2\cos 7^0(\sin 54^0-\sin 18^0)=4\cos 7^0\cos 36^0\sin 18^0$$

На оглавление

Дальше

Тест

Задания	Ответы
Вычислите: 1) $\cos(\arccos\frac{1}{7} - \arccos\frac{11}{14})$; 2) $\sin(\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{12}{13})$	1) 71/98; 2) 1.
Решите уравнения: 1) $1 - cos x = \sin\frac{x}{2}$ 2) $1 + cos x = cos\frac{x}{2}$	1) $\left\{2\pi k; -(1)^k\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right\}$, k∈Z. 2) $\left\{\pi(2k+1); \frac{2\pi}{3}(6k \pm 1) \mid k \in Z\right\}$
Преобразуйте в произведение: 1) $\sin\alpha\cos\beta + 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\beta$ 2) $\sin 10^0 + 2\sin 5^0\cos 15^0 + cos 50^0$	1) $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(\frac{\alpha}{2} - \beta)$; 2) $cos 10^0$
Докажите тождество: 1) $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha} = ctg\alpha$	

На оглавление

Дальше

Посттест

По количеству выполненных заданий выставляется соответствующая оценка. (1 задание – «3»)

Докажите тождество: $\frac{2\sin x + \sin 2x}{2\sin x - \sin 2x} = ctg^2 \frac{x}{2};$
Решите уравнение: $3\sin x = 2\cos^2 x.$
Докажите тождество: $\frac{4\sin 25^0 \sin 65^0}{\cos 40^0} = 2;$

[На оглавление]

Смешанные задания

Цели

Повторить:

Решение тригонометрических уравнений.

Решение тригонометрических неравенств.

Основные формулы.

Правила упрощения выражений.

Правила доказательства тождеств

На оглавление

Дальше

Тренинг. Решение упражнений

1) Вычислите значения sin3x, cos3x, tg3x и ctg3x, если sinx = ½, угол принадлежит I четверт

Формула для вычисления **sin3x = 3sinx – 4 sin³ x**:

$\sin 3x = 3*1/2 - 4*(1/2)^3 = 1{,}5 - 0{,}5 = 1;$

Формула для вычисления **cos3x = 4 cos³ x – 3cosx**:

$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - ¼} = \sqrt{3}/2;$

$\cos 3x = 4*3\sqrt{3}/8 - 3*\sqrt{3}/2 = 0.$

Формула для вычисления **tg3x = sin3x/cos3x**:

tg3x не существует.

Формула для вычисления **ctg3x = cos3x/sin3x**:

ctg3x = 0.

2) Упростите выражение: $\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)tg(\frac{\pi}{2}-\alpha)-\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)+ctg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)-ctg(\frac{\pi}{2}-\alpha) =$

$= \sin\alpha \cdot ctg\alpha - \cos\alpha + tg\alpha - tg\alpha = 0$

3) Доказать тождество: $1)\ \frac{\sin(\pi-\alpha)}{tg(\pi+\alpha)} \cdot \frac{ctg(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{tg(\frac{\pi}{2}+\alpha)} \cdot \frac{\cos(2\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \sin\alpha$

$$\frac{\sin(\pi-\alpha)}{tg(\pi+\alpha)} \cdot \frac{ctg(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{tg(\frac{\pi}{2}+\alpha)} \cdot \frac{\cos(2\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{tg\alpha} \cdot \frac{tg\alpha}{-ctg\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{ctg\alpha} = \sin\alpha$$

Тест

Задания	Ответы
Вычислите: $\sin(\arccos(-\frac{1}{2}) + 3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2})$	$-\sqrt{3}/2$
Решите уравнение: $\sin 2x = \cos x - \cos 3x$	$\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right\}$, k∈Z.
Преобразуйте в произведение: $\sin 80^0 + \sin 30^0$	$2\sin 55^0 \cos 25^0;$
Докажите тождество: 1) $\frac{\sin^2(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}{ctg^2(\alpha-2\pi)} + \frac{\sin^2(-\alpha)}{ctg^2(\alpha-\frac{3\pi}{2})} = 1$	

На оглавление

Дальше

Посттест

По количеству выполненных заданий выставляется соответствующая оценка

Докажите тождество: $$\frac{1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x}{2\cos^2 x+\cos x-1}=2\cos x;$$
Решите уравнение: $$\sin^2 x-\sin x\cos x=0.$$
Дано: sina=0,8, sinb=0,96, a$\in$ Iчетверти, b $\in$ Iчетверти. Найти sin(a – b).

На оглавление