

Занимательная математика

АЛГЕБРА
9 КЛАСС.

УРОК НА ТЕМУ:
ЧИСЛОВЫЕ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.
АРИФМЕТИЧЕСКАЯ
ПРОГРЕССИЯ.

$$a_n = a_{n-1} + d$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

Арифметическая прогрессия.

Ребята, мы продолжаем дальше изучать числовые последовательности. Сегодня остановимся на важной числовой последовательности, которой дали свое название – *арифметическая прогрессия*.

Так что же такое арифметическая прогрессия?

Числовая последовательность, в которой каждый член, начиная со второго, равен сумме предыдущего и некоторого фиксированного числа, называется арифметической прогрессией.

Арифметическая прогрессия – рекуррентно заданная числовая прогрессия.

Давайте запишем рекуррентную форму:

$$a_1 = a; a_n = a_{n-1} + d$$

Число d – разность прогрессии.

a и d – определенные заданные числа.

Арифметическая прогрессия.

Пример. 1,4,7,10,13,16...

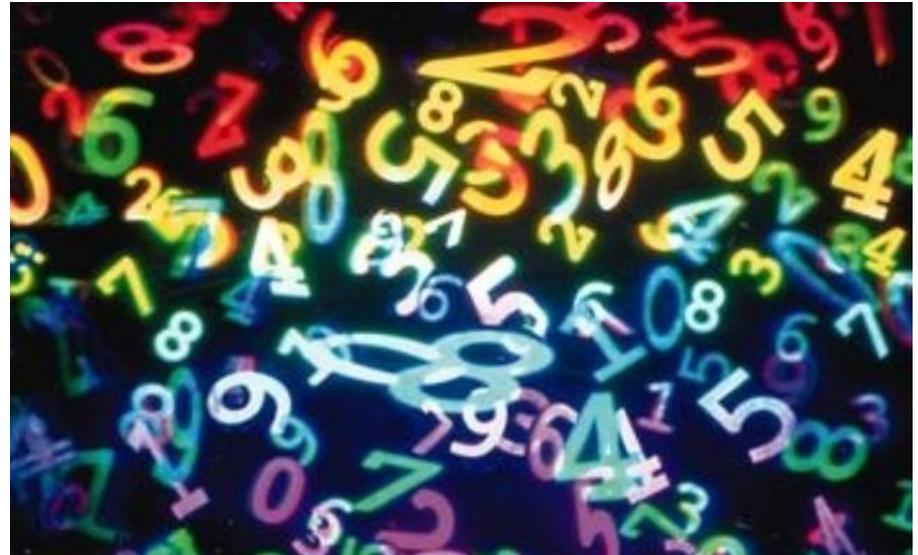
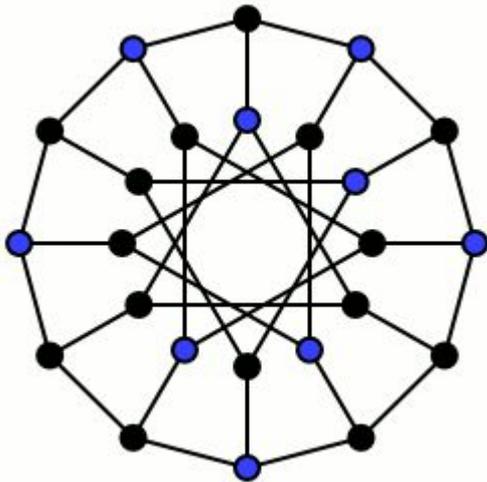
Арифметическая прогрессия у которой $a=1$ $d=3$.

Пример. 3,0,-3,-6,-9...

Арифметическая прогрессия у которой $a=3$ $d=-3$.

Пример. 5,5,5,5,5...

Арифметическая прогрессия у которой $a=5$ $d=0$.



Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия обладает свойствами монотонности, если разность прогрессии больше нуля то последовательность возрастающая, если разность прогрессии меньше нуля то последовательность убывающая.

Если в арифметической прогрессии **количество элементов конечно**, то **прогрессия называется конечной арифметической прогрессией**.

Если задана последовательность и она является арифметической прогрессией. То **принято обозначать**:

$$\div a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \cdot$$

Арифметическая прогрессия.

Формула n -ого члена арифметической прогрессии.

Арифметическую прогрессию так же можно задавать и в аналитической форме. Давайте посмотрим, как это сделать:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

$$a_5 = a_4 + d = a_1 + 4d$$

Мы легко замечаем закономерность:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Наша формула называется – формулой n -ого члена арифметической прогрессии.

Арифметическая прогрессия.

Давайте вернемся к нашим примерам и запишем нашу формулу для каждого из примеров.

Пример. 1,4,7,10,13,16...

Арифметическая прогрессия у которой $a=1$ $d=3$.

$$a_n = 1 + (n - 1)3 = 3n - 2$$

Пример. 3,0,-3,-6,-9...

Арифметическая прогрессия у которой $a=3$ $d=-3$

$$a_n = 3 + (n - 1)(-3) = -3n + 6$$

Арифметическая прогрессия.

Пример. Дана арифметическая прогрессия

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Найти:

- а) Известно, что $a_1 = 5$ $d = 3$. Найти a_{23}
б) Известно, что $a_1 = 4$ $d = 5$ $a_n = 109$. Найти n
в) Известно, что $d = -1$ $a_{22} = 15$. Найти a_1
г) Известно, что $a_1 = -3$ $a_{10} = 24$. Найти d

Решение:

- а) $a_{23} = a_1 + 22d = 5 + 66 = 71$
б) $a_n = a_1 + (n - 1)d = 4 + 5(n - 1) = 5n - 1 = 109$ $5n = 110 \Rightarrow n = 22$
в) $a_{22} = a_1 + 21d = a_1 - 21 = 15 \Rightarrow a_1 = 36$
г) $a_{10} = a_1 + 9d = -3 + 9d = 24 \Rightarrow d = 3$

Арифметическая прогрессия.

Пример.

При делении девятого члена арифметической прогрессии на второй член в частном остается 7, а при делении девятого члена на пятый в частном получается 2, а в остатке 5. Найти тридцатый член прогрессии.

Решение.

Запишем последовательно формулы 2, 5 и 9 членов нашей прогрессии.

$$\text{Так же из ус. } a_2 = a_1 + d \quad a_5 = a_1 + 4d \quad a_9 = a_1 + 8d$$

$$\text{Или: } a_9 = 7a_2 \quad a_9 = 2a_5 + 5$$

$$\text{Составим систему уравнений: } a_1 + 8d = 7(a_1 + d) \quad a_1 + 8d = 2(a_1 + 4d) + 5$$

Решив систему получаем:

$$\begin{cases} a_1 + 8d = 7(a_1 + d) \\ a_1 + 8d = 2(a_1 + 4d) + 5 \end{cases} \quad \begin{cases} d = 6a_1 \\ d = a_1 + 5 \end{cases} \quad d = 6a_1 = 1$$

Найдем a_{30}

$$a_{30} = a_1 + 29d = 175$$

Арифметическая прогрессия.

Сумма конечной арифметической прогрессии.

Пусть у нас есть конечная арифметическая прогрессия. Возникает вопрос, **а можно ли посчитать сумму всех ее членов?**

Давайте попробуем разобраться в этом вопросе.

Пусть дана конечная арифметическая прогрессия:

$$a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$$

Введем **обозначение суммы ее членов:**

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Арифметическая прогрессия.

Давайте рассмотрим, на конкретном примере, чему равна сумма.

Пусть нам дана арифметическая прогрессия 1,2,3,4,5...100

Сумма ее членов тогда представим вот так:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 \\ &= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots + (50 + 51) \\ &= 101 + 101 + \dots + 101 = 50 \cdot 101 = 5050 \end{aligned}$$

Но схожая формула применима для любой арифметической прогрессии:

Давайте запишем $a_3 + a_{n-2} = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n \text{ где } k > 1$$

Арифметическая прогрессия.

Давайте **выведем формулу для вычисления суммы членов арифметической прогрессии**, запишем два раза формулу в разных порядках:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$$

Сложим между собой эти формулы:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

В правой части нашего равенства n слагаемых, и мы знаем что каждый из них равен $a_1 + a_n$

Тогда:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Так же нашу формулу можно переписать в виде:

Так как $a_n = a_1 + (n - 1)d$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n$$

Чаще всего удобнее пользоваться именно этой формулой, поэтому **хорошо бы ее запомнить!**

Арифметическая прогрессия.

Пример. Дана конечная арифметическая прогрессия

Найти:

а) s_{22} , если $a_1 = 7$ $d = 2$

б) d , если $a_1 = 9$ $s_8 = 144$

Решение.

а) Воспользуемся второй формулой суммы

$$S_{22} = \frac{2a_1 + d(22 - 1)}{2} \cdot 22 = \frac{14 + 2(22 - 1)}{2} \cdot 22 = 616$$

б) В этом примере воспользуемся первой формулой:

$$S_8 = \frac{8(a_1 + a_8)}{2} = 4a_1 + 4a_8$$

$$144 = 36 + 4a_8$$

$$a_8 = 27$$

$$a_8 = a_1 + 7d = 9 + 7d$$

$$d = 2\frac{4}{7}$$

Арифметическая прогрессия.

Пример. Найти сумму всех нечетных двухзначных чисел.

Решение.

Члены нашей прогрессии представляют собой:

$$a_1 = 11, a_2 = 13, \dots, a_n = 99$$

Давайте найдем номер последнего члена прогрессии:

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

$$99 = 11 + 2(n - 1)$$

$$n = 45$$

Теперь найдем сумму:

$$S_{45} = \frac{45(11 + 99)}{2} = 2475$$

Арифметическая прогрессия.

Пример. Ребята отправились в поход, известно, что за первый час они прошли 500м, после они стали проходить на 25 метров меньше. За сколько часов они пройдут 2975 метров.

Решение.

Путь, пройденный за каждый час можно представить в виде арифметической прогрессии:

$$a_1 = 500, a_2 = 475, a_3 = 450 \dots$$

Разность арифметической прогрессии $d = -25$

Путь, пройденный в 2975 метров представляет собой сумму арифметической прогрессии.

$$S_n = 2975, \text{ где } n \text{ — часы потраченные на путь.}$$

Тогда:

$$S_n = \frac{1000 - 25(n - 1)}{2} n = 2975$$

$$1000n - 25(n - 1)n = 5950$$

Разделим обе части на 25

$$40n - (n - 1)n = 238$$

$$n^2 - 41n + 238 = 0$$

$$n_1 = 7 \quad n_2 = 34$$

Очевидно, что логичнее выбрать $n=7$.

Ответ. Ребята были в пути 7 часов.

Арифметическая прогрессия.

Характеристическое свойство арифметической прогрессии.

Ребята, пусть у нас дана арифметическая прогрессия, давайте рассмотрим *три произвольных последовательных члена прогрессии*:

$$a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$$

Мы знаем что:

$$a_{n-1} = a_n - d \qquad a_{n+1} = a_n + d$$

Давайте сложим наши выражения:

$$a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Если прогрессия конечная, то это равенство выполняется для всех членов кроме первого и последнего.

Арифметическая прогрессия.

Если заранее неизвестно, какой вид у последовательности, но известно что:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Тогда можно смело говорить, что это арифметическая прогрессия.

Числовая последовательность является арифметической прогрессией только когда каждый член этой прогрессии равен среднему арифметическому двух соседних членов нашей прогрессии. (не забываем, что для конечной прогрессии не выполняется для первого и последнего)

Арифметическая прогрессия.

Пример.

Найти такие x , что $3x+2; x-1; 4x+3$ – три последовательных члена арифметической прогрессии.

Решение.

Воспользуемся нашей формулой

$$x - 1 = \frac{3x + 2 + 4x + 3}{2}$$

$$2x - 2 = 7x + 5$$

$$-5x = 7$$

$$x = -1\frac{2}{5} = -1.4$$

Проверим, наши выражения примут вид: $-2, 2; -2, 4; -2, 6$

Очевидно, что это члены арифметической прогрессии и $d = -0.2$

Арифметическая прогрессия.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите двадцать первый член арифметической прогрессии $38; 30; 22 \dots$

2. Найдите пятнадцатый член арифметической прогрессии $10, 21, 32 \dots$

3. Известно, что $a_1 = 7$ $d = 8$. Найдите a_{31}

4. Известно, что $a_1 = 8$ $d = -2$ $a_n = -54$. Найдите n

5. Найдите сумму первых семнадцати членов арифметической прогрессии $3; 12; 21 \dots$

6. Ребята отправились в поход на велосипедах, известно, что за первый час они проехали 400 м, после они стали проезжать на 30 метров больше. За сколько часов они проедут 2850 метров.

7. Найти такие x , что $2x-1; 3x+1; 5x-7$ – три последовательных члена арифметической прогрессии.