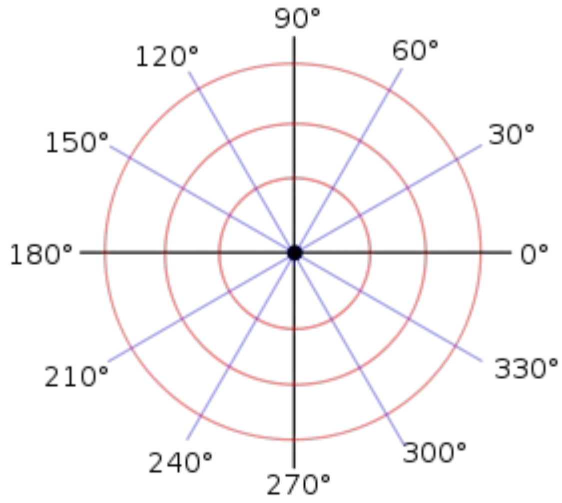
ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

- *Полярная система координат — двумерная система координат, в которой каждая точка на плоскости определяется двумя числами — полярным углом и полярным радиусом.*

- *Полярная система координат задаётся лучом, который называют нулевым или полярной осью. Точка, из которой выходит этот луч, называется началом координат или полюсом. Любая точка на плоскости определяется двумя полярными координатами: радиальной и угловой.*

- *Определённая таким образом радиальная координата может принимать значения от нуля до бесконечности, а угловая координата изменяется в пределах от 0° до 360°. Однако, для удобства область значений полярной координаты можно расширить за пределы полного угла, а также разрешить ей принимать отрицательные значения, что отвечает повороту полярной оси по часовой стрелке.*



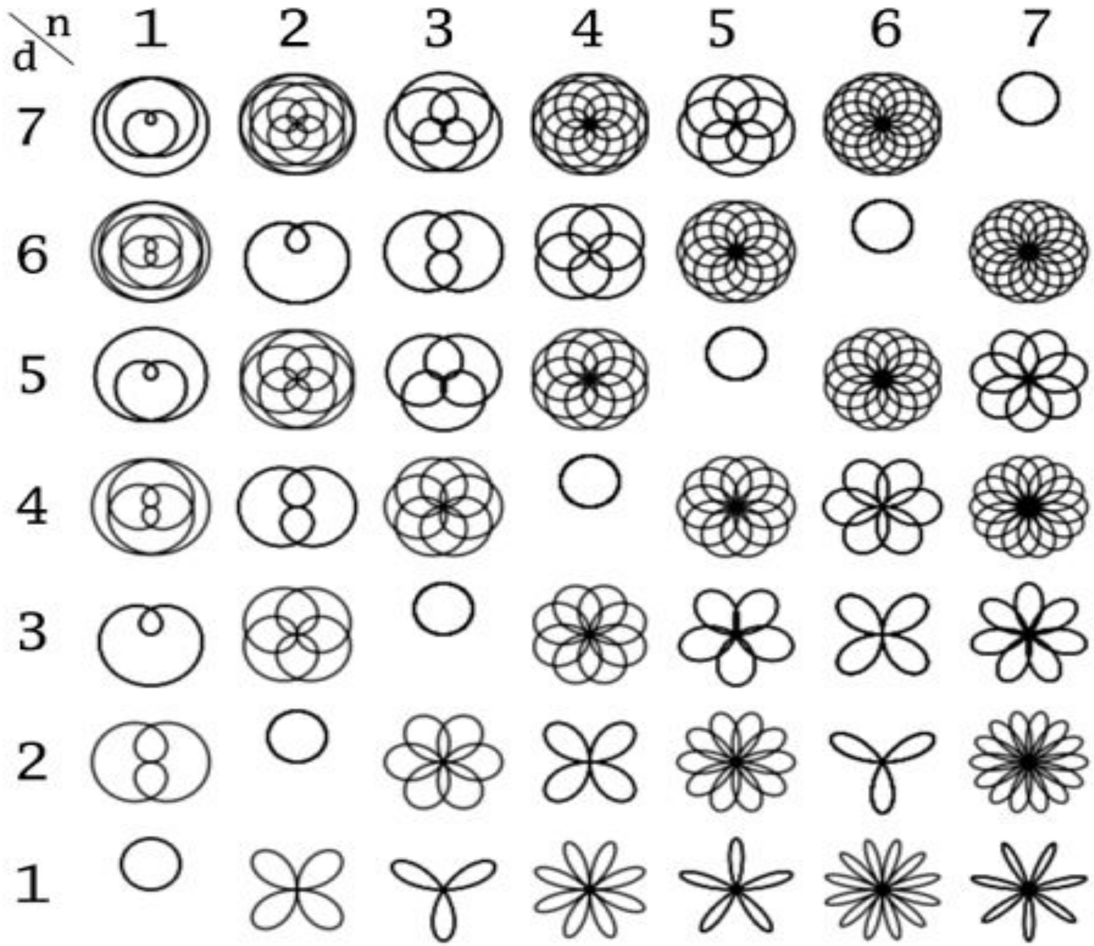
Полярная сетка, на которой отложено несколько углов с пометками в градусах

НЕМНОГО ИЗ ИСТОРИИ

- *Существуют разные версии о введении полярных координат в качестве формальной системы координат. Полная история возникновения и исследования описана в работе профессора из Гарварда Джулиан Лоувел Кулидж «Происхождение полярных координат».*
- *Грегуар де Сен-Венсан и Бонавентура Кавальери независимо друг от друга пришли к похожей концепции в середине XVII века. Сен-Венсан описал полярную систему в личных заметках в 1625 году, напечатав свои труды в 1647; а Кавальери напечатал свои труды в 1635 году, и исправленную версию в 1653 году.*

- *Введение термина «полярные координаты» приписывают Грегорио Фонтана. В XVIII веке он входил в лексикон итальянских авторов. В английский язык термин попал через перевод трактата Сильвестра Лакруа «Дифференциальное и интегральное исчисление», выполненного в 1816 году Джорджем Пикоком. Среди самых известных кривых: полярная роза, архимедова спираль, Лемниската, улитка Паскаля и кардиоида.*

КРИВЫЕ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ



ОКРУЖНОСТЬ

Круг, заданный уравнением $r(\varphi)=1$.

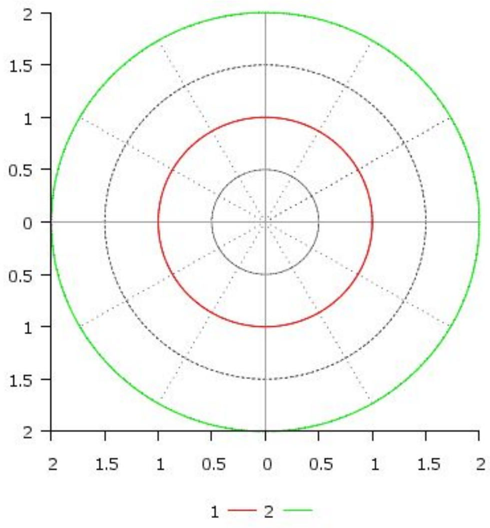
Общее уравнение окружности с центром в (r_0, θ) и радиусом a имеет вид:

$$r^2 - 2rr_0\cos(\varphi - \theta) + r_0^2 = a^2.$$

Это уравнение может быть упрощено для частных случаев, например

$$r(\varphi) = a$$

является уравнением, определяющим окружность с центром в полюсе и радиусом a.



ПРЯМАЯ

Радиальные прямые (те, которые проходят через полюс) определяются уравнением

$$\varphi = \theta,$$

где θ— угол, на который прямая отклоняется от полярной оси, то есть, $\theta = \operatorname{arctg} m$где m— наклон прямой в прямоугольной системе координат. Нерадиальная прямая, перпендикулярно пересекает радиальную прямую $\varphi = \theta$в точке $(r_0,\ \theta)$определяется уравнением

$$r(\varphi) = r_0 \sec(\varphi - \theta).$$

ПОЛЯРНАЯ РОЗА

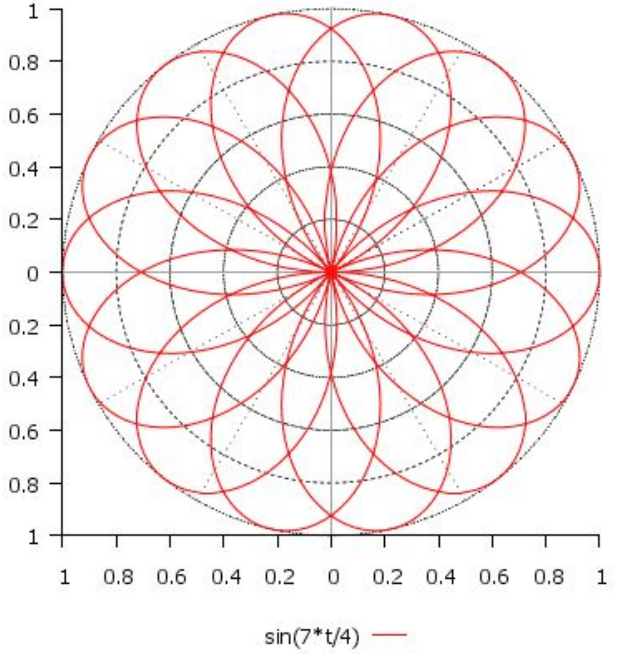
Полярная роза задана уравнением $r(\varphi)=2\sin 4\varphi$.

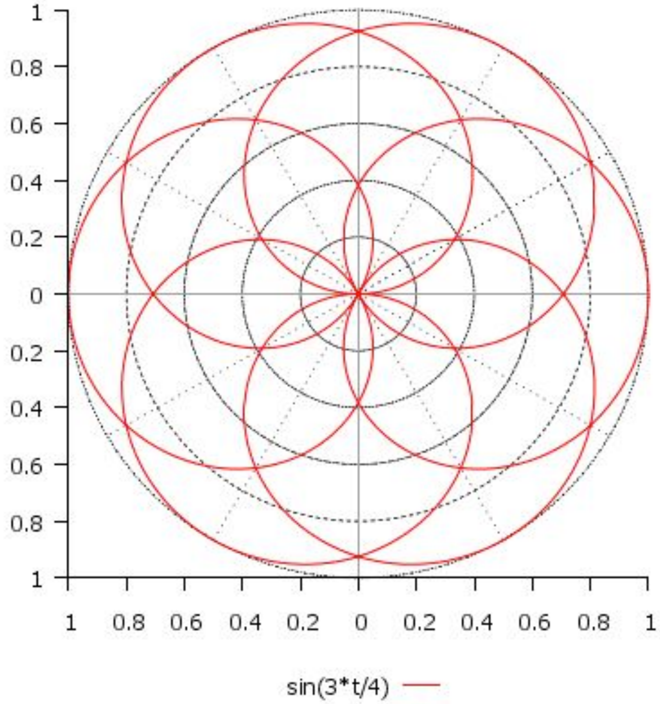
Полярная роза — известная математическая кривая, похожая на цветок с лепестками. Она может быть определена простым уравнением в полярных координатах:

$$r(\varphi) = a\cos(k\varphi + \theta_0)$$

для произвольной постоянной θ_0(включая 0). Если k— целое число, то это уравнение будет определять розу с kлепестками для нечётных k, либо с $2k$лепестками для чётных k. Если k— рациональное, но не целое, график, заданный уравнением, образует фигуру, подобную розе, но лепестки будут перекрываться. Розы с 2, 6, 10, 14 и т. д. лепестками этим уравнением определить невозможно. Переменная aопределяет длину лепестков.

Если считать, что радиус не может быть отрицательным, то при любом натуральном kмы будем иметь k- лепестковую розу. Таким образом, уравнение $r(\varphi) = \cos(2\varphi)$будет определять розу с двумя лепестками. С геометрической точки зрения радиус - это расстояние от полюса до точки и он не может быть отрицательным.


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1 0.8 0.6 0.4 0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8 1
sin(7*t/4)


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1 0.8 0.6 0.4 0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8 1
sin(3*t/4)

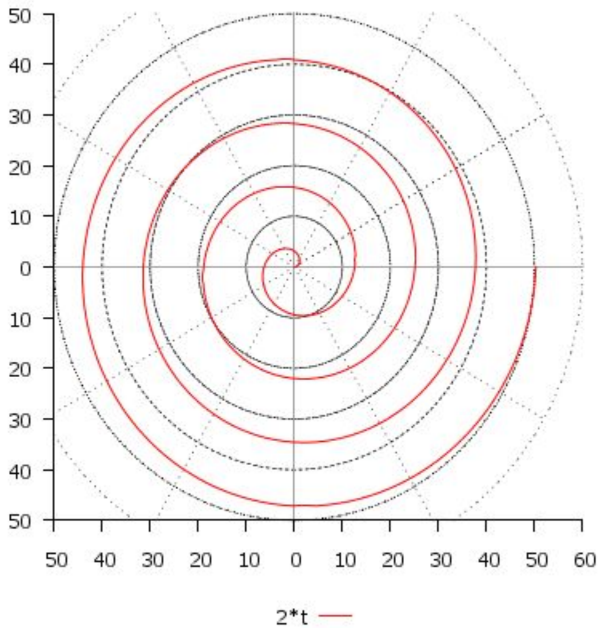
СПИРАЛЬ АРХИМЕДА

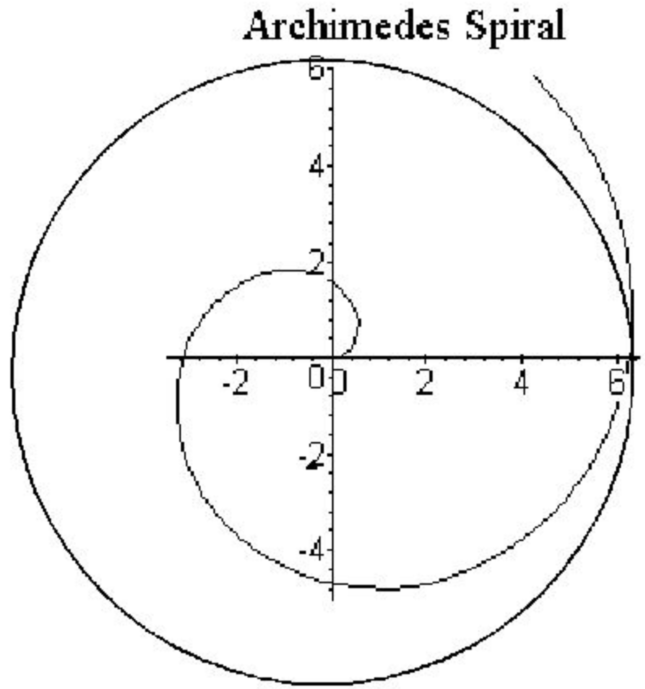
Одна из ветвей спирали Архимеда, задаваемая уравнением $r(\varphi)=\varphi$ для $0<\theta<6\pi$.

Архимедова спираль названа в честь её изобретателя, древнегреческого математика Архимеда. Эту спираль можно определить с помощью простого полярного уравнения:

$$r(\varphi) = a + b\varphi.$$

Изменения параметра a приводят к повороту спирали, а параметра b — расстояния между витками, которое является константой для конкретной спирали. Спираль Архимеда имеет две ветви, одну для $\varphi > 0$ а другую для $\varphi < 0$. Две ветви плавно соединяются в полюсе. Зеркальное отображение одной ветви относительно прямой, проходящей через угол 90°/270°, даст другую ветвь. Эта кривая интересна тем, что была описана в математической литературе одной из первых, после конического сечения, и лучше других определяется именно полярным уравнением.


50
40
30
20
10
0
10
20
30
40
50
50 40 30 20 10 0 10 20 30 40 50 60
2*t

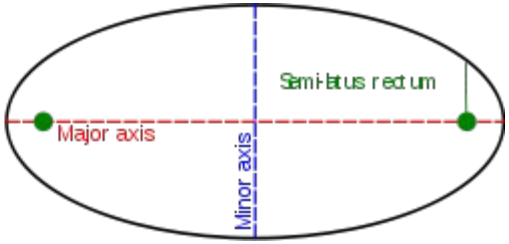

Archimedes Spiral
6
4
2
-2
-4
-2 0 0 2 4 6

КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

Коническое сечение, один из полюсов которого находится в полюсе, а другой где-то на полярной оси (так, что малая полуось лежит вдоль полярной оси) задаётся уравнением:

$$r = \frac{\ell}{1 - e\cos\varphi},$$

где e— эксцентриситет, а ℓ— фокальный параметр. Если $e > 1$, это уравнение определяет гиперболу; если $e = 1$, то параболу; если $e < 1$, то эллипс. Отдельным случаем является $e = 0$, определяющее окружность с радиусом ℓ.



АСТРОИДА

Астро́ида (от греч. αστρον — звезда и ειδος — вид, то есть звездообразная) — плоская кривая, описываемая точкой окружности радиуса r, катящейся по внутренней стороне окружности радиуса $R = 4r$. Иначе говоря, астроида — это гипоциклоида с модулем $k = 4$

Уравнение в декартовых прямоугольных координатах:

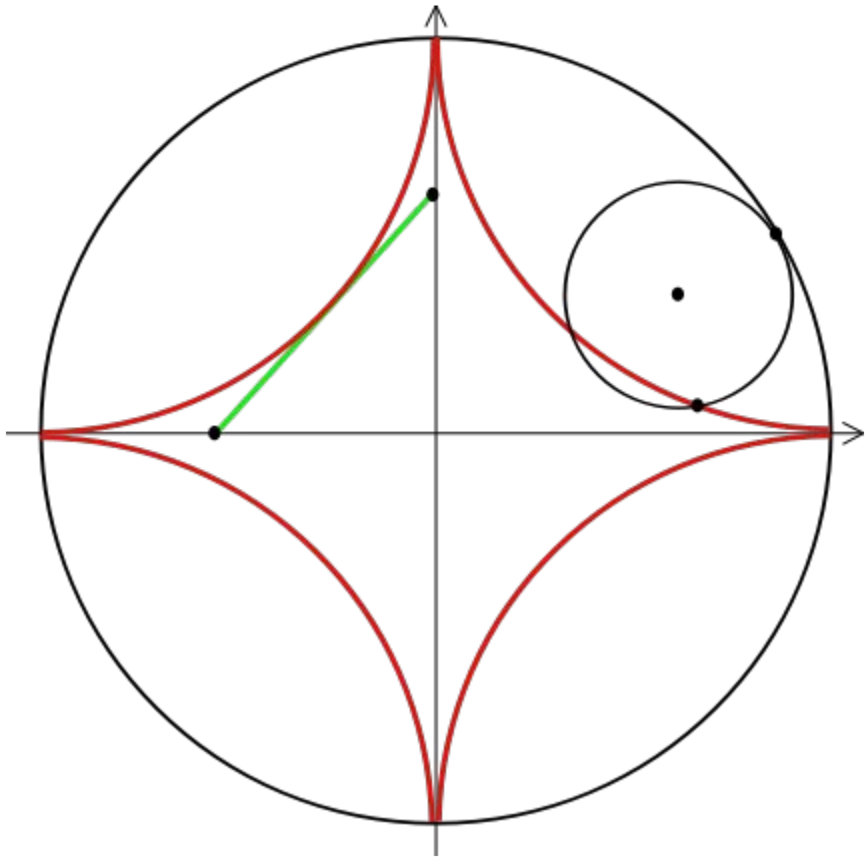
$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$$

Параметрическое уравнение:

$$x = R\cos^3 t; \quad y = R\sin^3 t$$

Уравнение в рациональном виде:

$$(x^2 + y^2 - R^2)^3 + 27R^2x^2y^2 = 0$$



ЦИКЛОИДА

Цикло́ида — плоская трансцендентная кривая. Циклоида определяется кинематически как траектория фиксированной точки производящей окружности радиуса, катящейся без скольжения по прямой.

- Циклоида описывается параметрически

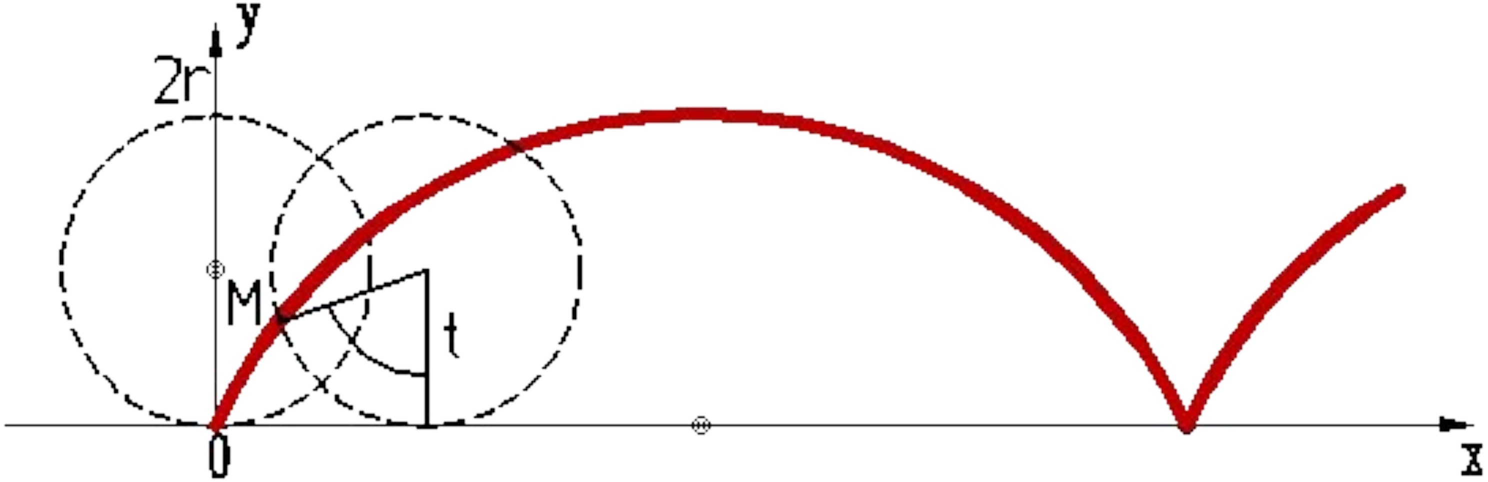
$$x = rt - r\sin t,$$
$$y = r - r\cos t.$$

- Уравнение в декартовых координатах:

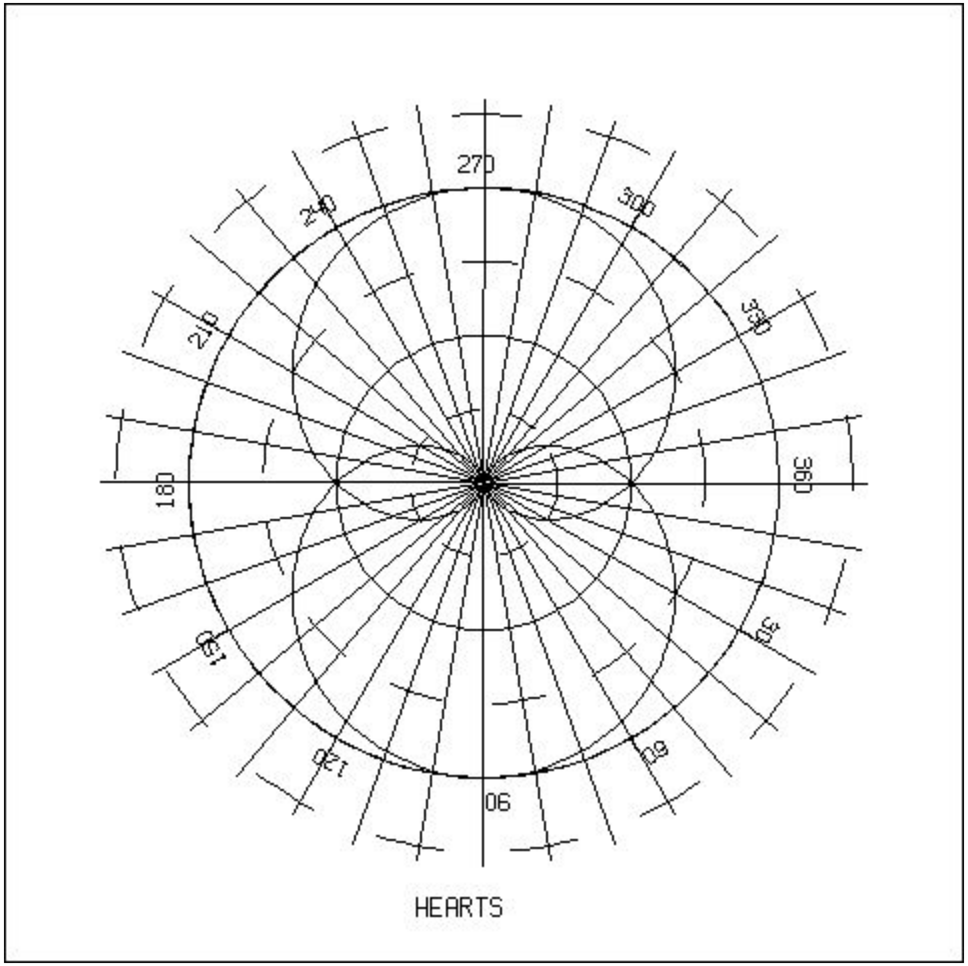
$$x = r\arccos\frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}$$

- Циклоида может быть получена как решение дифференциального уравнения:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2r-y}{y}.$$


y
2r
M
t
0
x

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!



СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- ru.wikipedia.org
- pm298.ru
- a-geometry.narod.ru