Логарифмические неравенства и методы их решения

Логарифмические неравенства

Определение: неравенства, содержащие неизвестное под знаком логарифма (и) или в основании логарифма называются ***логарифмическими***.

Простейшее логарифмическое неравенство имеет вид

$$\log_a x > b$$

Знак неравенства может быть любым ($<, \geq, \leq$), где $a > 0$, $a \neq 1$

Решение логарифмических неравенств основано на строгой монотонности логарифмической функции. Известно, что

1. При основании, большем единицы, логарифмическая функция возрастает;
2. При положительном основании, меньшем единицы, логарифмическая функция убывает.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$

$(a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0)$

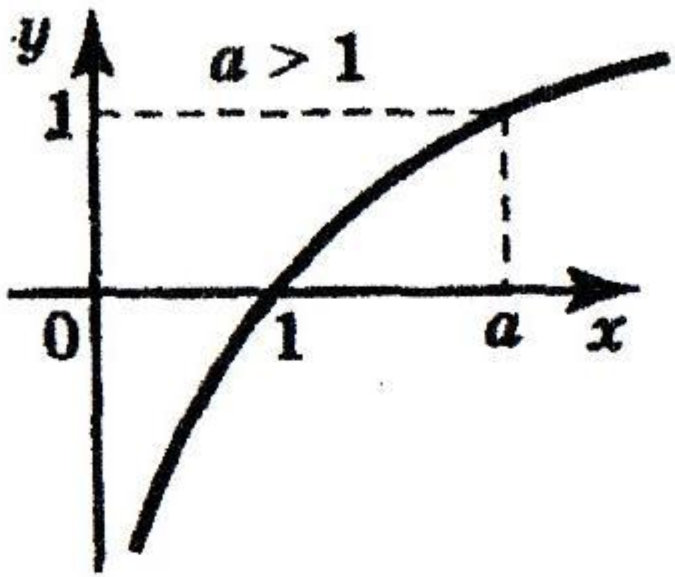


Рис. 1

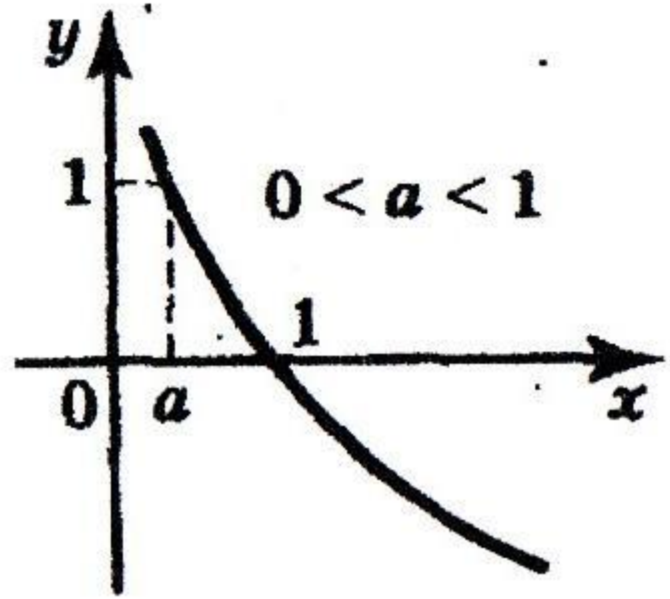


Рис. 2

Логарифмическое неравенство вида

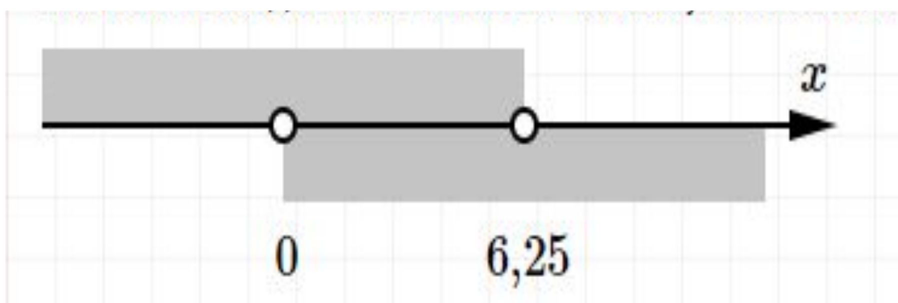
$$\log_a x < b \qquad \textbf{(1)}$$

эквивалентно следующим системам неравенств:

a > 1	**0 < a < 1**
$\begin{cases} x < a^b \\ x > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x > a^b \\ x > 0 \end{cases}$

Решить неравенство: $\log_{2,5} x < 2.$

Решение: $\begin{cases} x < 2,5^2 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 6,25 \\ x > 0 \end{cases}$



Ответ: $x \in (0; 6,25).$

Логарифмическое неравенство вида

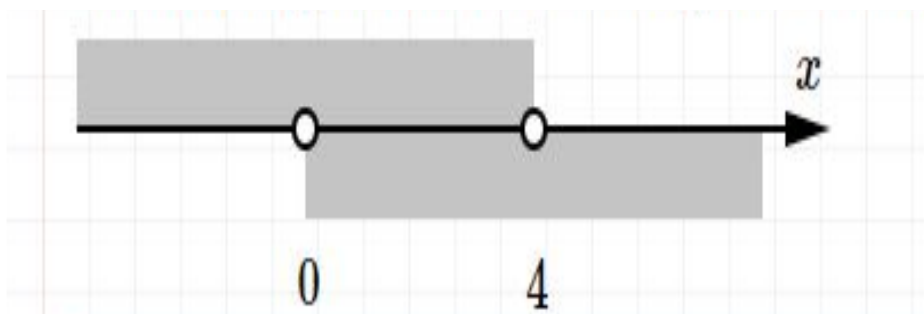
$$\log_a x > b \quad \textbf{(2)}$$

эквивалентно следующим системам неравенств:

$a > 1$	$0 < a < 1$
$\begin{cases} x > a^b \\ x > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x < a^b \\ x > 0 \end{cases}$

Решить неравенство: $\log_{0,5} x > -2.$

Решение: $\begin{cases} x < 0,5^{-2} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \dfrac{1}{0,5^2} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 0 \end{cases}$



Ответ: $x \in (0; 4).$

Методы решения логарифмических неравенств

1. Метод использования определения логарифма.
2. Метод потенцирования.
3. Метод введения новой переменной.
4. Графический метод.

1. Метод использования определения логарифма

Логарифмическое неравенство вида

$$\boxed{\log_a f(x) > c} \qquad \textbf{(3)}$$

$$f(x) > 0, a > 0, a \neq 1.$$

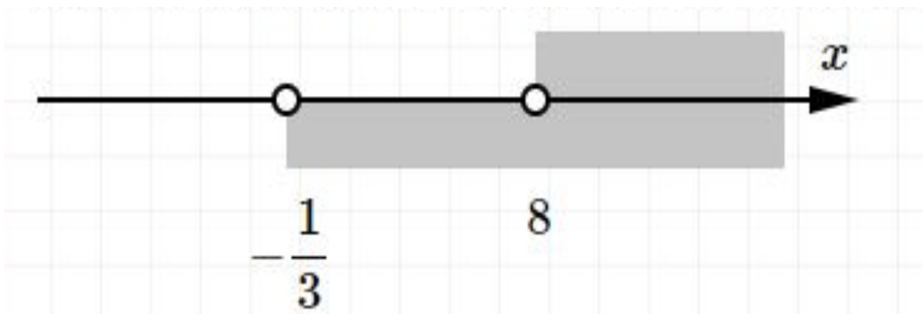
Равносильно системам неравенств:

a > 1	0 < a < 1
$\begin{cases} f(x) > a^c \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) < a^c \\ f(x) > 0 \end{cases}$

Решить неравенство: $\log_5(3x+1) > 2$

Решение:

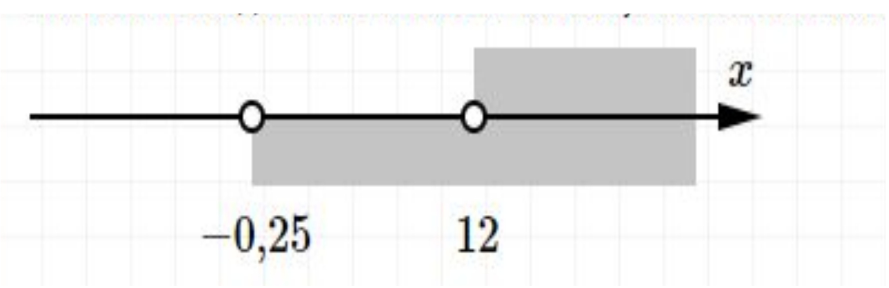
$$\begin{cases} 3x+1 > 5^2 \\ 3x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x > 25-1 \\ 3x > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 8 \\ x > -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$



Ответ: $x \in (8; +\infty)$.

Решить неравенство: $\log_{\frac{1}{7}}(4x+1) < -2$

Решение: $\begin{cases} 4x+1 > \left(\dfrac{1}{7}\right)^{-2} \\ 4x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+1 > 7^2 \\ 4x > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 12 \\ x > -\dfrac{1}{4} \end{cases}$



Ответ: $x \in (12; +\infty)$.

2. Метод потенцирования

Определение: под ***потенцированием*** понимается переход от равенства, содержащего логарифмы, к равенству, не содержащему их.

Логарифмическое неравенство вида

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \qquad \textbf{(5)}$$

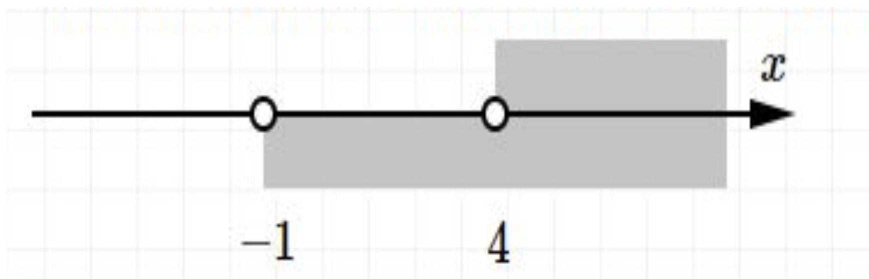
$$f(x) > 0, g(x) > 0, a > 0, a \neq 1.$$

Равносильно системе неравенств:

a > 1	**0 < a < 1**
$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$

Решить неравенство: $\lg(2x-3) > \lg(x+1)$

Решение: $\begin{cases} 2x-3 > x+1 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-x > 1+3 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x > -1 \end{cases}$



Ответ: $x \in (4; +\infty)$.

Логарифмическое неравенство вида

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \qquad \textbf{(6)}$$

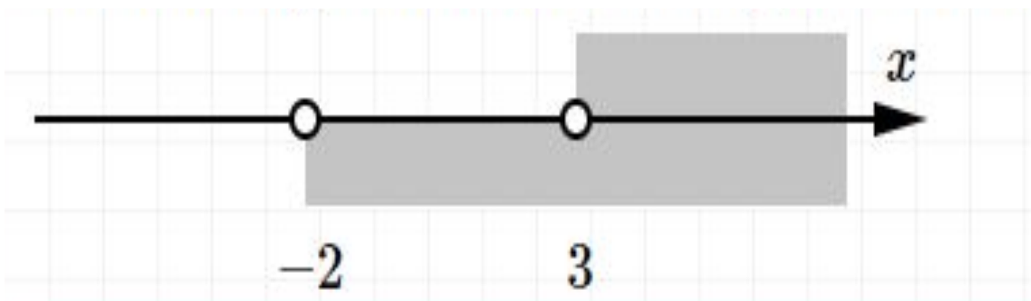
$$f(x) > 0, g(x) > 0, a > 0, a \neq 1.$$

Равносильно системе неравенств:

a > 1	**0 < a < 1**
$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Решить неравенство: $\log_{0,5}\left(4x-7\right)<\log_{0,5}\left(x+2\right)$

Решение: $\begin{cases}4x-7>x+2\\x+2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x-x>2+7\\x>-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>3\\x>-2\end{cases}$



Ответ: $x\in\left(3;+\infty\right).$

3. Метод введения новой переменной

Решить неравенство: $\log_2^2 x > 4\log_2 x - 3$

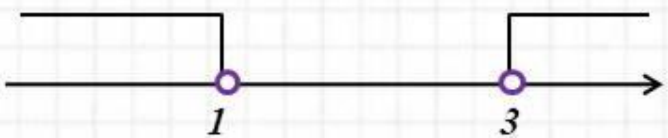
$\boxed{x > 0}$

Замена : $\log_2 x = t$

$t^2 > 4t - 3$

$t^2 - 4t + 3 > 0$

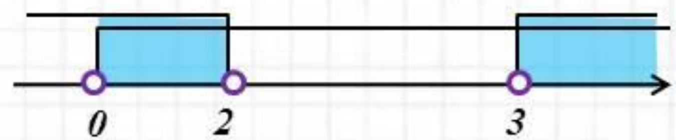
$(t-1)(t-3) > 0$



$\left[\begin{array}{l} t < 1 \\ t > 3 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \log_2 x < 1 \\ \log_2 x > 3 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \log_2 x < \log_2 2 \\ \log_2 x > \log_2 8 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x < 2 \\ x > 8 \end{array}\right.$

Учтем ОДЗ



Ответ : $(0;2) \cup (8;+\infty)$

4. Графический метод

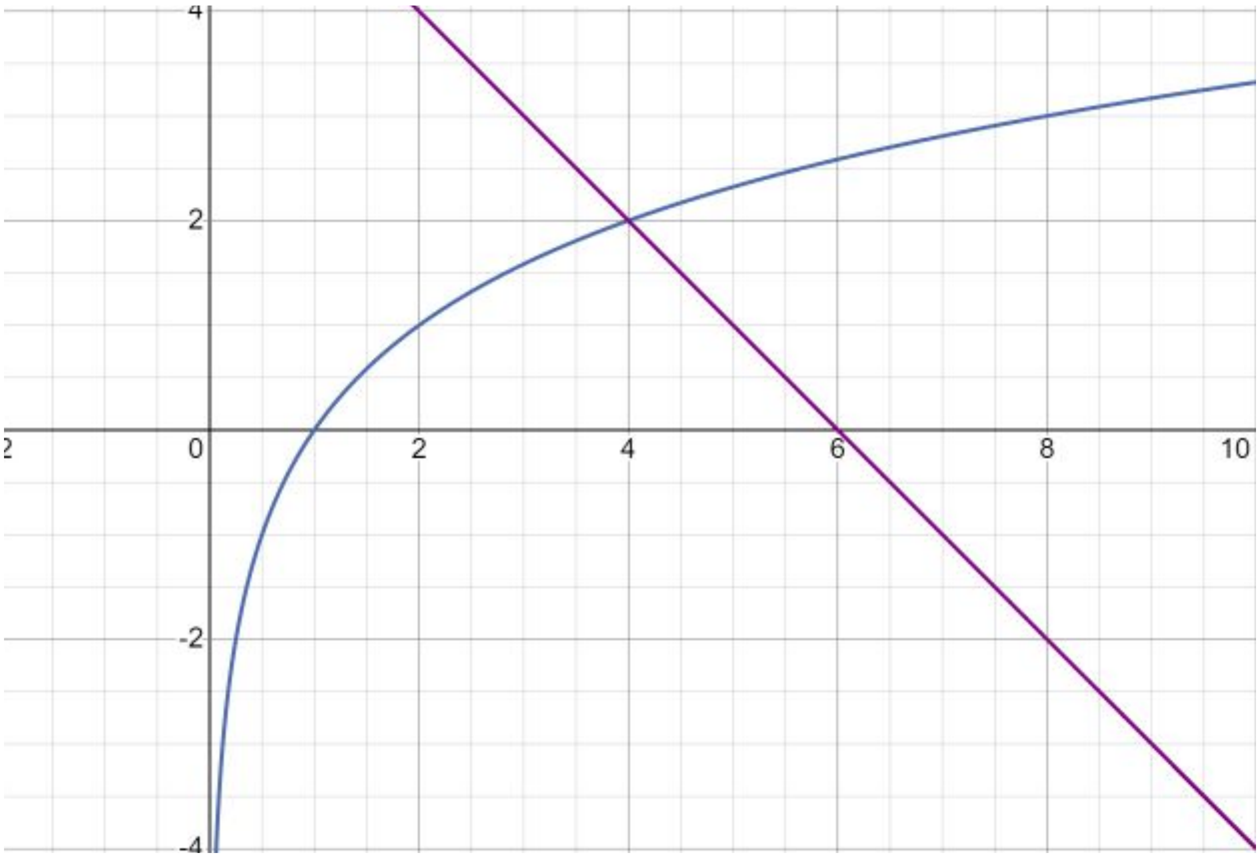
В одной системе координат строят графики двух функций. В зависимости от знака неравенства выбирается интервал.

Решить неравенство: $\log_2 x < 6 - x$

Решение:

$$y = \log_2 x$$

$$y = 6 - x$$



$$y = \log_2 x$$

$$y = 6 - x$$

Ответ: $x \in (0; 4)$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!