

# Основы теории массового обслуживания

Лекция для магистрантов направления  
«Сервис»



# План лекции

## Учебные вопросы

**1.** Предмет и основные понятия теории массового обслуживания

*1.1. Состав систем массового обслуживания и характеристика её элементов*

*1.2. Типы задач, решаемых на базе теории массового обслуживания*

**2.** Классификация систем массового обслуживания

**3.** Условия работы и характеристики систем массового обслуживания

*3.1. СМО с отказами*

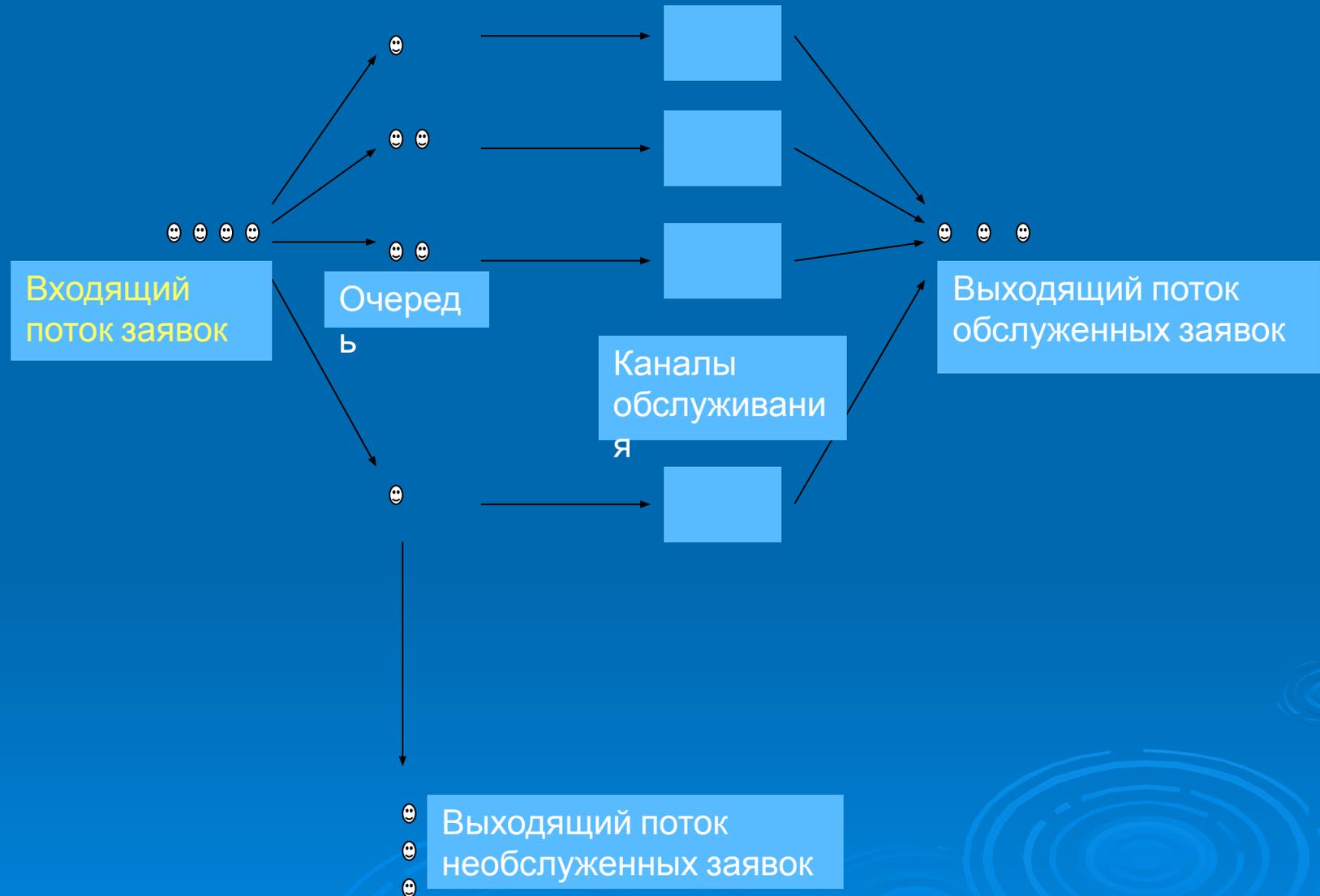
*3.2. СМО с ограниченным временем ожидания*

*3.3. СМО с ожиданием*

▣ **Система массового обслуживания (СМО)**, как правило, состоит из следующих элементов:

- Входящий поток заявок
- Очередь заявок, ожидающих обслуживания
- Каналы обслуживания
- Выходящий поток обслуженных заявок
- Выходящий поток необслуженных заявок

# Система массового обслуживания



# Классификация систем массового обслуживания

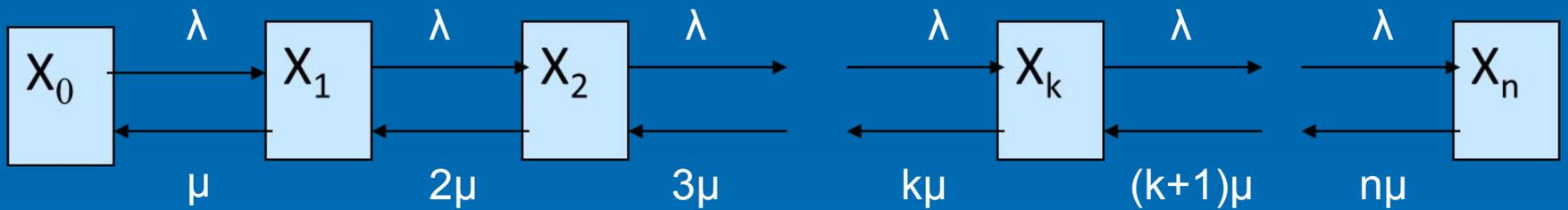
<i>№ п/п</i>	<i>Признак классификации</i>	<i>Тип СМО</i>
1	Поведение заявки, заставшей в момент прихода в систему все каналы занятыми	С отказами
		С ограниченным временем ожидания
		С ожиданием
2	Дисциплина очереди	С приоритетом
		Без приоритета
3	Режим обслуживания	С концентрацией сил
		Без концентрации сил
4	Источник заявок	Замкнутая
		Разомкнутая
5	Число каналов обслуживания	Одноканальная
		Многоканальная
6	Состав каналов обслуживания	Однородная
		Неоднородная
7	Число фаз обслуживания	Однофазная
		Многофазная
8	Возможность восстановления каналов	С восстановлением каналов
		Без восстановления каналов

# СМО с отказами

На вход системы, состоящей из  $n$  каналов обслуживания, поступает простейший поток заявок с плотностью  $\lambda$ . На обслуживание каждой заявки назначается один канал из числа свободных. Время обслуживания заявки случайно и подчиняется показательному закону распределения с параметром  $\mu$ . Заявка, заставшая в момент поступления все каналы занятыми, получает отказ в обслуживании и покидает систему.



# Размеченный граф состояния СМО с отказами



# СМО с отказами

Вероятность того, что система находится в состоянии  $X_k$ , то есть, что в системе находится  $k$  заявок и, соответственно,  $k$  каналов заняты, вычисляется по формуле Эрланга:

$$P_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{m=0}^n \frac{\alpha^m}{m!}}, k = 0 \div n$$

Параметр  $\alpha$  называется *приведенной плотностью входящего потока заявок* и представляет собой среднее число заявок, поступивших в систему за среднее время обслуживания одной заявки.

# СМО с отказами

Если все каналы обслуживания заняты, т.е.  $k = n$ , то очередная заявка получит отказ, *вероятность отказа* вычисляется по формуле:

$$P_{отк} = \frac{\alpha^n}{\sum_{m=0}^n \frac{\alpha^m}{m!}} = \varphi(n, \alpha)$$

*Вероятность обслуживания* как вероятность противоположного события рассчитывается по формуле:  $P_{обс} = 1 - P_{отк} = 1 - \varphi(n, \alpha) = q$ .

# СМО с ограниченным временем ожидания

На вход системы, состоящей из  $n$  каналов обслуживания, поступает простейший поток заявок с плотностью  $\lambda$ . На обслуживание каждой заявки назначается один канал из числа свободных. Время обслуживания заявки случайно и подчиняется показательному закону распределения с параметром  $\mu$ . Заявка, заставшая в момент поступления все каналы занятыми, становится в очередь и ожидает обслуживания в течение случайного времени, распределенного по показательному закону с параметром  $\nu$ . Если за время ожидания обслуживание не началось (ни один канал не освободился), то заявка покидает систему необслуженной; но если обслуживание началось, то оно доводится до конца независимо от времени пребывания заявки в очереди.

# СМО с ограниченным временем ожидания

$$P_{n+s} = \frac{\alpha^{n+s}}{n! \prod_{m=1}^s (n+m\beta)} \bigg/ \left( \sum_{m=0}^n \frac{\alpha^m}{m!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\prod_{m=1}^s (n+m\beta)} \right), k = 0 \div n, s \geq 1$$

Параметр  $\beta$  называется *приведенной плотностью уходов заявок из очереди необслуженными* и представляет собой среднее число заявок, уходящих из очереди необслуженными за среднее время обслуживания одной заявки, при условии, что в очереди в среднем одна заявка.

# СМО с ожиданием

Особенностью функционирования систем данного типа по сравнению со СМО с ограниченным временем ожидания является то, что заявка, заставшая в момент поступления все каналы занятыми, становится в очередь и ожидает обслуживания до тех пор, пока не освободится какой-либо канал. То есть, в СМО с ожиданием обслуживаются все заявки, и поток заявок, уходящих из очереди необслуженными отсутствует ( $\nu = 0$ ).

# СМО с ожиданием

Вероятность того, что система находится в состоянии  $X_{n+s}$ , то есть, что в системе находится  $n+s$  заявок и, соответственно,  $n$  каналов заняты и, кроме того,  $s$  заявок стоят в очереди, вычисляется по формуле Эрланга:

$$P_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^n}{n!} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}{\sum_{m=0}^n \frac{\alpha^m}{m!} + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\alpha}{n-\alpha}}, k = 0 \div n, s \geq 1$$

*Условием существования в системе установившегося режима является  $\alpha < n$ , то есть, среднее число заявок, поступающих в систему за среднее время обслуживания одной заявки не должно превышать количества каналов в системе.*

# Показатели эффективности систем массового обслуживания

Показатель	СМО с отказами	СМО с огр вр ож	СМО с ожид
Вероятность обслуживания заявки = Относительная пропускная способность	$P_{\text{обсл}} = 1 - \varphi(n, \alpha)$	$P_{\text{обсл}} = 1 - \psi(n, \alpha, \beta)$	
Вероятность немедленного обслуживания			
Абсолютная пропускная способность	$Q = \lambda P_{\text{обсл}}$	$Q = \lambda P_{\text{обсл}}$	$Q = \lambda$
Среднее число занятых каналов	$M_3 = \alpha P_{\text{обсл}}$	$M_3 = \alpha P_{\text{обсл}}$	$M_3 = \alpha$
Коэффициент загрузки системы	$K_3 = \alpha P_{\text{обсл}} / n$	$K_3 = \alpha P_{\text{обсл}} / n$	$K_3 = \alpha / n$
Коэффициент простоя системы	$K_{\text{п}} = 1 - \alpha P_{\text{обсл}} / n$	$K_{\text{п}} = 1 - \alpha P_{\text{обсл}} / n$	$K_{\text{п}} = 1 - \alpha / n$
Средняя длина очереди		$m_s = \alpha(1 - P_{\text{обсл}}) / \beta$	$m_s = (1 - P_{\text{но}}) / (n/\alpha - 1)$
Среднее число заявок в системе			$R = m_s + M_3$
Среднее время пребывания заявки в очереди		$t_{\text{оч}} = t_{\text{ож}} (1 - P_{\text{обсл}})$	$t_{\text{оч}} = t_{\text{обс}} (1 - P_{\text{но}}) / (n - \alpha)$
Среднее время пребывания заявки в системе			$t_{\text{преб}} = t_{\text{оч}} + t_{\text{обс}}$