Системы булевых функций

Операции дизъюнкция $+$ и конъюнкция $\cdot$ являются примерами двух из шестнадцати булевых функций от двух переменных, которые перечисляются в следующей таблице:

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		0	$\cdot$	$\to'$	x	$\leftarrow'$	y	$\oplus$	$+$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	y'	$\leftarrow$	x'	$\to$	$\mid$	1

Функция $f_{15}(x,y) = f_2(x,y)'$ - *штрих Шеффера*, обозначается $x \mid y$.

Функция $f_9(x,y) = f_8(x,y)'$ - *стрелка Пирса*, обозначается $x \downarrow y$.

Определение. *Суперпозицией* булевых функций $g(y_1,...,y_m)$ и $h_1(x_1,...,x_n)$, …, $h_m(x_1,...,x_n)$ называется булева функция $f(x_1,...,x_n)$, значения которой определяются по формуле:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = g\big(h_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,h_m(x_1,\ldots,x_n)\big).$$

Для упрощения записи суперпозиции булевых функций скобки по возможности опускаются с учетом следующего приоритета выполнения булевых операций: $'$, $\cdot$ и затем все остальные операции.

Лемма. Булевы функции от двух переменных взаимосвязаны следующими свойствами:

1) $(x+y)' = x'y'$, $(xy)' = x' + y'$ – законы де Моргана;

2) $x + xy = x$, $x(x+y) = x$ – законы поглощения;

3) $x + x' = 1$, $xx' = 0$ – характеристическое свойство отрицания;

4) $x + 1 = 1$, $x \cdot 1 = x$ – характеристическое свойство элемента 1;

5) $x + 0 = x$, $x \cdot 0 = 0$ – характеристическое свойство элемента 0;

6) $x + y = (x'y')'$, $xy = (x' + y')'$ – взаимосвязь конъюнкции и дизъюнкции;

7) $x \to y = x' + y$, $x \to y = (xy')'$ – взаимосвязь импликации с дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием;

8) $x \leftrightarrow y = (x \to y)(y \to x)$, $x \leftrightarrow y = (x' + y)(x + y')$;

9) $x \mid y = (xy)'$, $x' = x \mid x$, $xy = (x \mid y)' = (x \mid y) \mid (x \mid y)$, $x + y = x' \mid y' = (x \mid x) \mid (y \mid y)$ – взаимосвязь штриха Шеффера с дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием;

10) $x \downarrow y = (x + y)'$, $x' = x \downarrow x$, $x + y = (x \downarrow y)' = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$, $xy = x' \downarrow y' = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$ – взаимосвязь стрелки Пирса с дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием;

11) $x \oplus y = y \oplus x$, $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$, $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$, $x \oplus x = 0$, $x \oplus 0 = x$, $x \oplus 1 = x'$, $x \oplus x' = 1$ – характеристическое свойство суммы Жегалкина;

12) $x \oplus y = xy' + x'y$, $x \to y = xy \oplus x \oplus 1$, $x \leftrightarrow y = x \oplus y \oplus 1$, $x + y = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 = x \oplus y \oplus xy$ – взаимосвязь суммы Жегалкина с дизъюнкцией, конъюнкцией, отрицанием, импликацией и эквивалентностью.

Определение. Система булевых функций $F = \{f_1, \ldots, f_k\}$ называется *полной*, если любая булева функция может быть представлена в виде суперпозиции функций из этой системы F.

Теорема Жегалкина. Любая булева функция f от n переменных представима в виде следующего полинома Жегалкина

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigoplus_{(i_1, \ldots, i_k)} x_{i_1} \ldots x_{i_k} \oplus c$$

для некоторых значений $c \in \{0,1\}$ и $1 < i_1 < \ldots < i_k \leq n$. Причем такое представление булевой функции f единственно с точностью до порядка слагаемых.

Определение. Булева функция f называется *линейной*, если ее представление полиномом Жегалкина не содержит произведения переменных.

Множество всех линейных булевых функций обозначим символом ***L***.

Определение. Булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется *самодвойственной*, если $f(x_1,\ldots,x_n)=\left(f(x_1',\ldots,x_n')\right)'$.

Множество всех самодвойственных булевых функций обозначим символом ***S***.

Определение. Булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется *монотонной*, если для любых $x_1,\ldots,x_n,\ y_1,\ldots,y_n\in\{0,1\}$ из $x_1\le y_1,\ldots,x_n\le y_n$ следует $f(x_1,\ldots,x_n)\le f(y_1,\ldots,y_n)$.

Множество всех монотонных булевых функций обозначим символом ***M***.

Пусть $\boldsymbol{P}_0$ - класс всех булевых функций $f(x_1,...,x_n)$, удовлетворяющих условию $f(0,...,0)=0$.

Пусть $\boldsymbol{P}_1$ - класс всех булевых функций $f(x_1,...,x_n)$, удовлетворяющих условию $f(1,...,1)=1$.

<u>Определение</u>. Классы булевых функций $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1$ называются *классами Поста.*

<u>Теорема Поста.</u> Система булевых функций в том и только том случае является полной, если она не содержится ни в одном из классов Поста.

Алгоритм доказательства полноты системы булевых функций $F = \{f_1, \ldots, f_k\}$:

1. Составить таблицу, столбцы которой помечены классами Поста $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1$ и строки – функциями системы $f_1, \ldots, f_n$.

2. Для каждой из функций $f_1, \ldots, f_n$ проверить принадлежность ее к классам Поста и результаты проверки зафиксировать словами «Да» или «Нет» в соответствующей клетке таблицы.

3. По теореме Поста данная система является полной в том и только том случае, если в каждом столбце таблицы имеется слово «Нет».

Пример.

Рассмотрим систему $F=\{\,|\,\}$, состоящую из одной булевой функции $|$ – штрих Шеффера. Составляем таблицу, столбцы которой помечены классами Поста $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1$ и одна строка – функцией $|$.

Функция	Классы Поста				
	$\boldsymbol{L}$	$\boldsymbol{S}$	$\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{P}_0$	$\boldsymbol{P}_1$
$\vert$	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет