СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система *n* линейных уравнений с *n* переменными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1.1)$$

где x_1, x_2, …, x_n переменные,

a_{ij} **числовые коэффициенты**

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.2)$$

Краткая запись:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = 1, 2, \ldots m, \quad j = 1, 2, \ldots n$$

Коэффициенты при неизвестных составляют прямоугольную таблицу

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots. & \dots.. & \dots.. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называемую **матрицей системы.**

Первый индекс у коэффициента a_{ij} означает номер уравнения, второй – номер неизвестного, при котором стоит этот коэффициент.

Коэффициенты $b_1, b_2, \ldots, b_m$ называются **свободными членами уравнений системы.**

Если свободные члены равны нулю, то система называется **однородной,**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

в противном случае – **неоднородной**.

Матрицу

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

называют **расширенной матрицей системы** (1.2)

Решение системы (1.1), (1,2)- это упорядоченный набор ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) из n чисел, при подстановке которых в уравнения системы вместо соответствующих неизвестных каждое уравнение системы превращается в тождество.

Система, не имеющая ни одного решения, называется **несовместной** или **противоречивой**. Система, имеющая хотя бы одно решение, называется **совместной.**

Совместные системы подразделяют на *определенные*, обладающие единственным решением, и *неопределенные*, обладающие множеством решений.
Однородная система всегда совместна, так как имеет, по крайней мере, нулевое решение

Если ввести матрицу коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots. & \dots.. & \dots.. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрицу переменных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

и матрицу свободных членов $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

То система линейных уравнений может быть записана в *матричной форме*

A·X=B

Методы решения систем линейных уравнений

1.Метод Гаусса.

Метод заключается в последовательном исключении переменных путем некоторых элементарных преобразований, в результате чего система приводится к ступенчатому виду с нулями ниже главной диагонали. Переменные находятся, начиная с последних по номеру переменных.

Методы решения систем линейных уравнений

2. Метод Гаусса-Жордана.

Представляет собой продолжение метода Гаусса, заключающееся в том, что нули получают также выше главной диагонали.

Элементы на главной диагонали приводят к единицам, в результате чего из полученной матрицы выписывается сразу решение системы.

Методы решения систем линейных уравнений

3. Метод Крамера.

Переменные могут быть найдены по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \ldots; \ x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}; \ldots; \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots, \ n$$

где Δ - определитель матрицы коэффициентов перед переменными,

Δ_j - определитель матрицы, получаемой из матрицы А заменой j-го столбца на столбец свободных членов.

Методы решения систем линейных уравнений

4. Метод обратной матрицы.

Из матричного уравнения АХ=В следует, что $X=A^{-1}B$. Найдя обратную матрицу и умножив ее на матрицу свободных членов, получаем матрицу переменных.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix}$$

Теорема.
(теорема Кронекера - Капелли)

Для того чтобы система линейных уравнений (1.2) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг её матрицы был равен рангу её расширенной матрицы.

Теорема.

Если система линейных уравнений (1.2) совместна, то:

1) для того, чтобы эта система была определенной, необходимо и достаточно. чтобы ранг матрицы системы был равен числу её переменных;

2) для того, чтобы эта система была неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы ранг её матрицы был меньше числа её переменных.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 22, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 42. \end{cases}$$

Метод Гаусса

$$r(A_p)=r\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&10\\2&3&1&22\\4&5&3&42\end{array}\right)\begin{array}{c}(-2)\\ \leftarrow\!\!\lrcorner\\ \end{array}\begin{array}{c}(-4)\\ \downarrow\\ \leftarrow\!\!\lrcorner\end{array}=r\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&10\\0&1&-1&2\\0&1&-1&2\end{array}\right)\begin{array}{c}\\(-1)\\ \leftarrow\!\!\lrcorner\end{array}=$$

$$=r\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&10\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{array}\right)=2,$$

$$r(A_p)=r(A)=2,\quad n=3>r(A)=2$$

Теорема. Элементарные преобразования расширенной матрицы данной системы, выполненные лишь над её строками, превращают эту матрицу в расширенную матрицу другой системы, равносильной данной.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ x_2 - x_3 = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 10 - x_3, \\ x_2 = 2 + x_3, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2 + x_3 = 10 - x_3, \\ x_2 = 2 + x_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - 2x_3, \\ x_2 = 2 + x_3, \end{cases}$$

x_1, x_2 – базисные переменные

x_3 – свободные переменные

$x_3 = 2$, $x_2 = 4$, $x_1 = 4$ –частное решение системы.

Пример. Решить систему

.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 22, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 39. \end{cases}$$

Метод Крамера

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -3, \qquad |A_1| = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 22 & 3 & 1 \\ 39 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -6,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 2 & 22 & 1 \\ 5 & 39 & 3 \end{vmatrix} = -15, \qquad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 22 \\ 5 & 4 & 39 \end{vmatrix} = -9,$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-6}{-3} = 2, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-15}{-3} = 5, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-9}{-3} = 3$$

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 7x_1 - 9x_3 = 0. \end{cases}$$

Теорема

Чтобы система однородных уравнений имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг её матрицы был меньше числа переменных.

Следствие. Если матрица системы однородных уравнений квадратная, то для того, чтобы система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель её матрицы был равен нулю.

Найдем ранг матрицы системы

$$r(A)=r\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -5\\ 7 & 0 & -9\end{pmatrix}\begin{matrix}\leftarrow\\ (-1)\uparrow\\ \end{matrix}=r\begin{pmatrix}1 & -3 & 6\\ 2 & 1 & -5\\ 7 & 0 & -9\end{pmatrix}\begin{matrix}(-2)(-7)\\ \\ \\ \end{matrix}=$$

$$=r\begin{pmatrix}1 & -3 & 6\\ 0 & 7 & -17\\ 0 & 21 & -51\end{pmatrix}(-3)=\quad r\begin{pmatrix}1 & -3 & 6\\ 0 & 7 & -17\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=2$$

$$r(A)<n,\quad r=2,\quad n=3$$

Составим систему однородных уравнений эквивалентную данной

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0 \\ \quad 7x_2 - 17x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 = -6x_3 \\ 7x_2 = 17x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3x_2 - 6x_3 \\ x_2 = \dfrac{17}{7}x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{9}{7}x_3 \\ x_2 = \dfrac{17}{7}x_3 \end{cases}$$

$$x_1 = 9, \quad x_2 = 17, \quad x_3 = 7$$