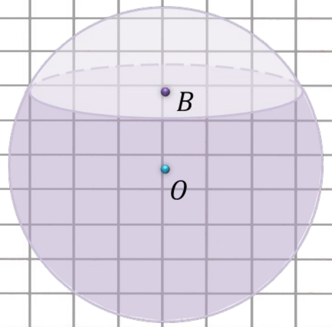
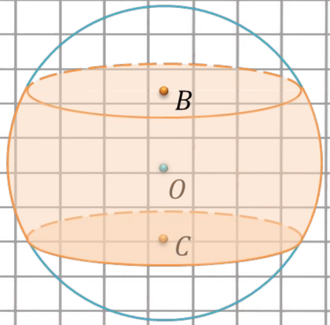
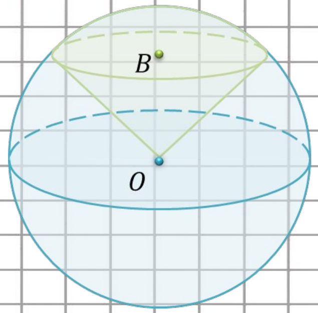
Объемы шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора

Сегодня на уроке:

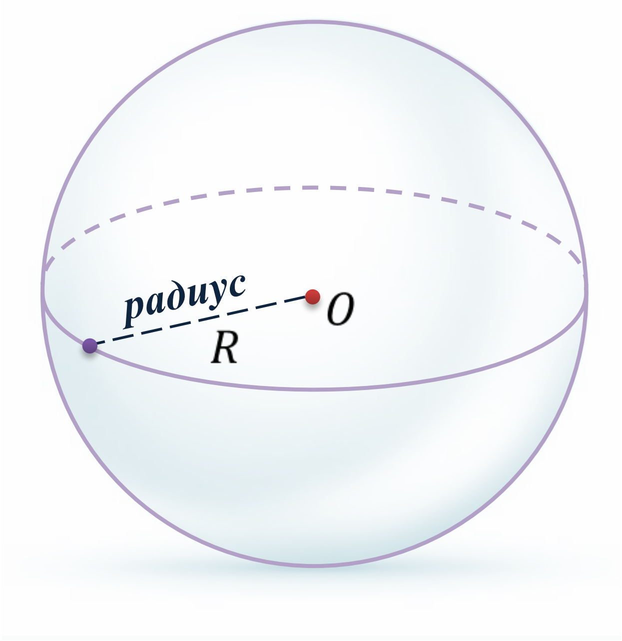






- ✔ введем понятия шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора
- ✔ выведем формулы для вычисления их объемов

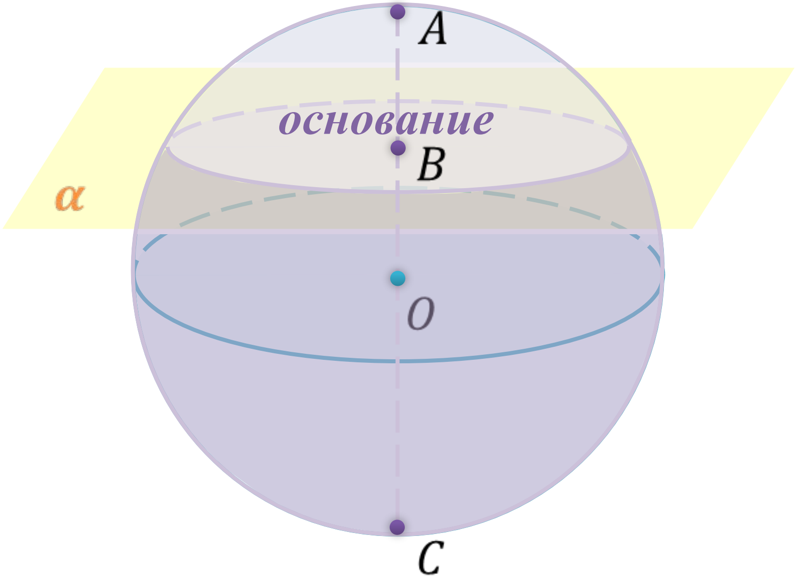
Определение. ***Шар*** – это совокупность всех точек пространства, находящихся от данной точки на расстоянии, не больше данного.



Данная точка называется ***центром*** шара.

Данное расстояние – ***радиусом*** шара.

Определение. ***Шаровым сегментом*** называется часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью.



Круг, получившийся в сечении, называется ***основанием*** каждого из этих сегментов.

Длины отрезков AB и BC диаметра AC, перпендикулярного к секущей плоскости, называются ***высотами*** сегментов.

Если радиус шара равен R, а высота сегмента равна h, то объем V шарового сегмента можно вычислить по формуле:

$$\boldsymbol{V_{\text{ш.сегм}} = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h\right)}$$

Доказательство.

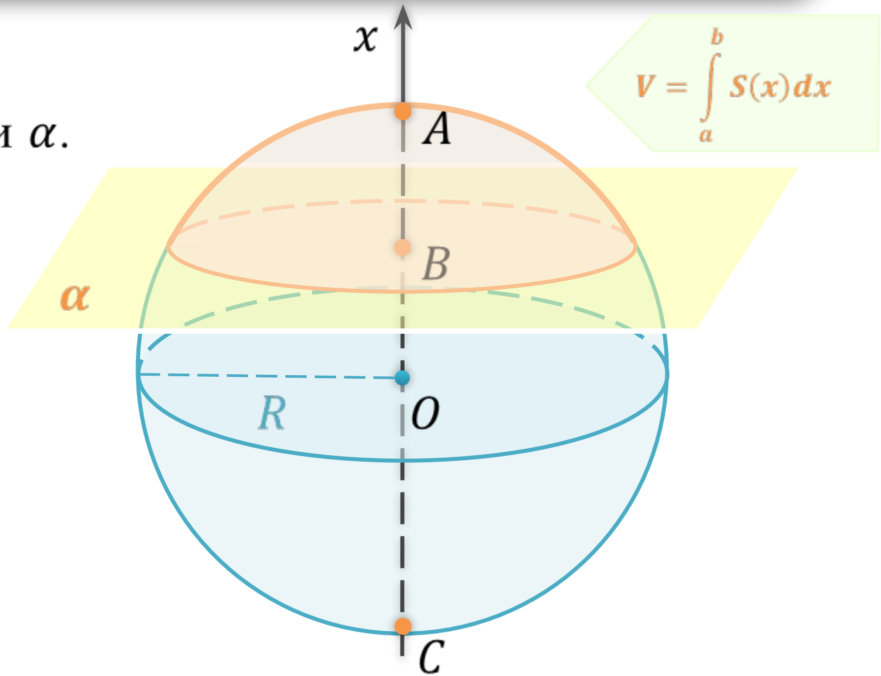
Проведем ось Ox перпендикулярно к плоскости α.

Тогда площадь $S(x) = \pi(R^2 - x^2)$,
при $R - h \le x \le R$.

$$V_{\text{ш.сегм}} = \int_{R-h}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-h}^{R} =$$

$$= \pi h^2 (R - \frac{1}{3} h)$$

Что и требовалось доказать.



Замечание.

Если высоту h в формуле объема шарового сегмента $V_{\text{ш.сегм}} = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right)$ заменить на $D = 2R$, то получим *формулу для нахождения объёма шара*:

$$V_{\text{ш.сегм}} = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right) = \pi(2R)^2 \left(R - \frac{1}{3}(2R)\right) = 4\pi R^2 \cdot \frac{1}{3}R = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\boldsymbol{V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

Если заменить высоту h на радиус R, то получим *формулу для нахождения объема полушара.*

$$V_{\text{ш.сегм}} = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right) = \pi R^2 \left(R - \frac{1}{3}R\right) = \pi R^2 \cdot \frac{2}{3}R = \frac{2}{3}\pi R^3$$

$$\boldsymbol{V_{\text{полушара}} = \frac{2}{3}\pi R^3}$$

Шаровой сегмент



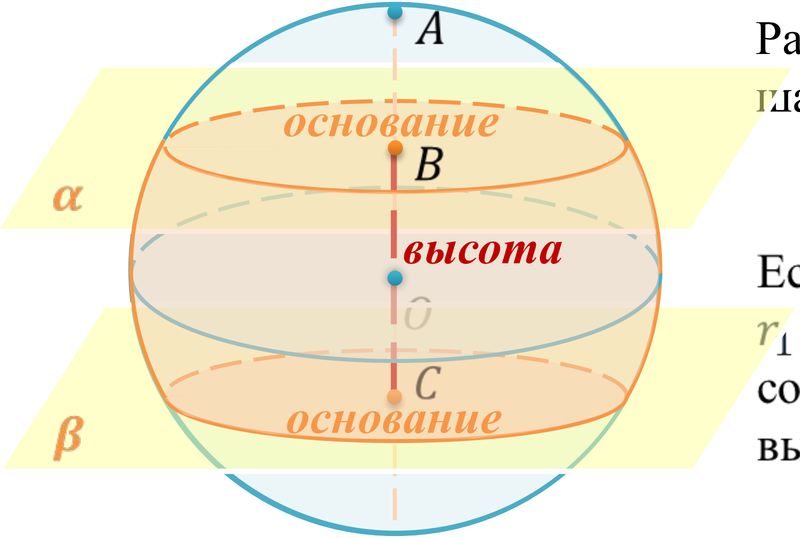
Шаровой сегмент





Шаровой сегмент

Определение. ***Шаровым слоем*** называется часть шара, заключённая между двумя параллельными секущими плоскостями.



Круги, получившиеся в сечении шара плоскостями, называются ***основаниями*** шарового слоя.

Расстояние между плоскостями – ***высотой*** шарового слоя.

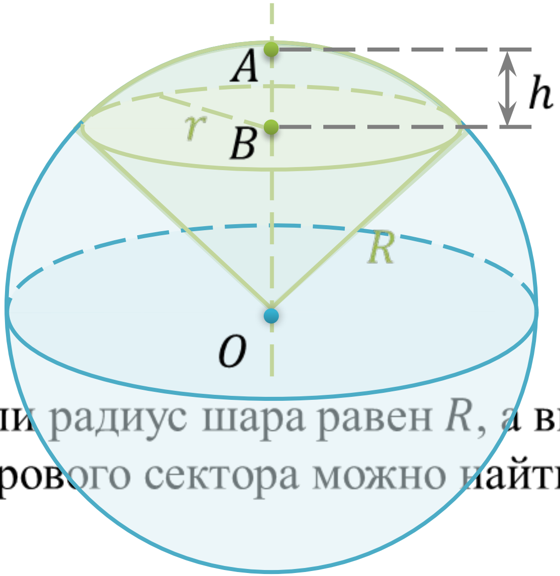
$$V_{\text{ш.слоя}} = V_{\text{ш.сегм.1}} - V_{\text{ш.сегм.2}}$$

Если высота шарового слоя равна h, а радиусы r_1 и r_2 – радиусы оснований шарового слоя соответственно, то объем шарового слоя можно вычислить по формуле:

$$V_{\text{ш.слоя}} = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi\left(r_1{}^2 + r_2{}^2\right)h$$

Шаровой слой

Определение. ***Шаровым сектором*** называется тело, которое получается при вращении кругового сектора с углом, меньшим 90°, вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих круговой сектор радиусов.



Шаровой сектор состоит из шарового сегмента и конуса.

Причем шаровой сегмент имеет высоту h, а конус высоту $R - h$, где R – радиус шара.

Шаровая поверхность пересекается с конусом по окружности.

$$r = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{2Rh - h^2}$$

Если радиус шара равен R, а высота шарового сегмента равна h, то объем V шарового сектора можно найти по формуле:

$$\boldsymbol{V_{\text{ш.сект}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h}$$

$$V_{\text{ш.сект}} = V_{\text{конуса}} + V_{\text{ш.сегм}} = \frac{1}{3}\pi(R-h)(2Rh - h^2) + \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right) = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

Шаровой сектор

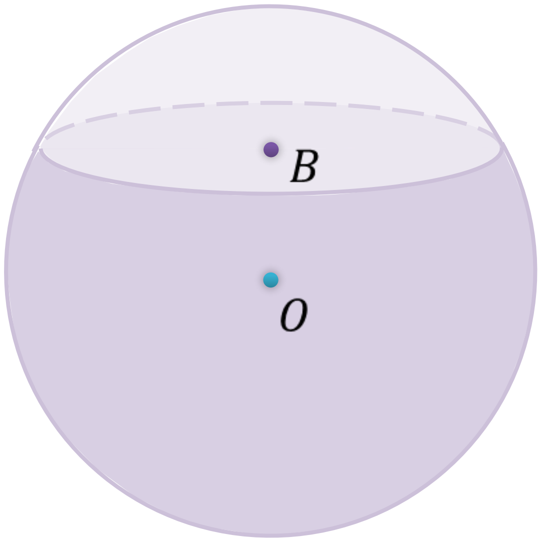
Задача. Радиус шара равен 5 см. Вычислите объем шарового сегмента, если его высота равна 6 см.

Решение.

$$\boldsymbol{V_{\text{ш.сегм}} = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h\right)}$$

$$V_{\text{ш.сегм}} = \pi \cdot 6^2 \cdot \left(5 - \frac{1}{3} \cdot 6\right) = 108\pi \ (\text{см}^3)$$

Ответ: 108π см^3.



Задача. По разные стороны от центра шара проведены два параллельных сечения с площадью 9π и 16π см^2. Расстояние между сечениями равно 7 см. Определите объем получившегося шарового слоя.

Решение.

$$\boldsymbol{V}_{\text{ш.слоя}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\boldsymbol{\pi h^3} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{r_1}^2 + \boldsymbol{r_2}^2)\boldsymbol{h}$$

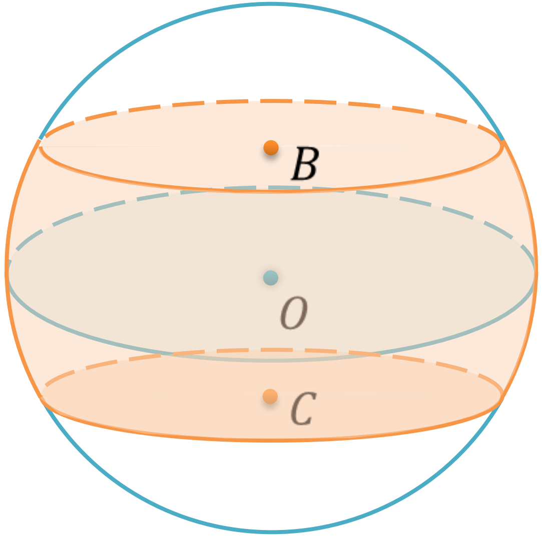
$h = 7$ см

$$S_{\text{круга}} = \pi r^2$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{S_{\text{круга}}}{\pi}} = \sqrt{\frac{9\pi}{\pi}} = 3 \text{ (см)}$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{S_{\text{круга}}}{\pi}} = \sqrt{\frac{16\pi}{\pi}} = 4 \text{ (см)}$$

$$V_{\text{ш.слоя}} = \frac{1}{6}\pi \cdot 7^3 + \frac{1}{2}\pi \cdot (3^2 + 4^2) \cdot 7 = \frac{434}{3}\pi \text{ (см}^3\text{)}$$



Ответ: $\frac{434}{3}\pi$ см^3.

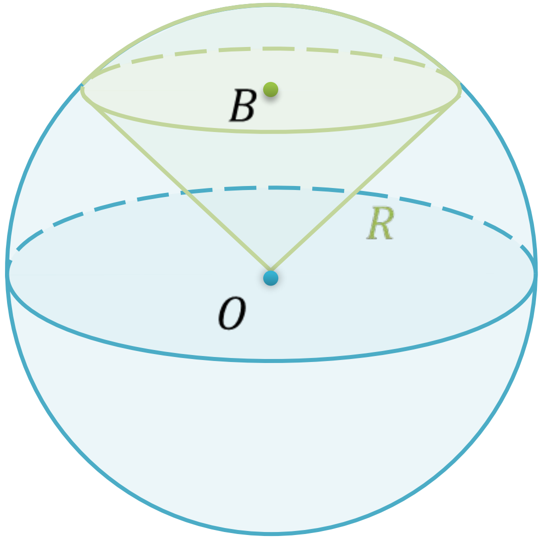
Задача. Радиус шара равен 12 см. Найдите объем шарового сектора, если высота шарового сегмента равна 4 см.

Решение.

$$\boldsymbol{V_{\text{ш.сект}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h}$$

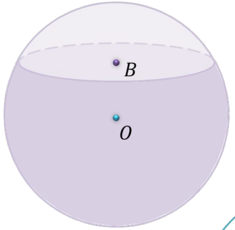
$$V_{\text{ш.сегм}} = \frac{2}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 4 = 384\pi \ (\text{см}^3)$$

Ответ: 384π см^3.

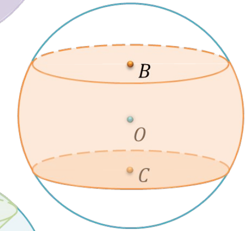


Объемы шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора

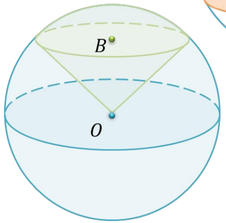
Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью.



Шаровым слоем называется часть шара, заключённая между двумя параллельными секущими плоскостями.



Шаровым сектором называется тело, которое получается при вращении кругового сектора с углом, меньшим 90º, вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих круговой сектор радиусов.



$$V_{\text{ш.сегм}} = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right) \qquad V_{\text{ш.слоя}} = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi\left({r_1}^2 + {r_2}^2\right)h \qquad V_{\text{ш.сект}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$