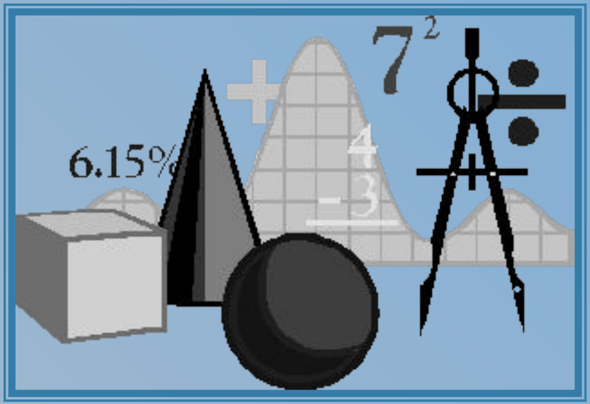
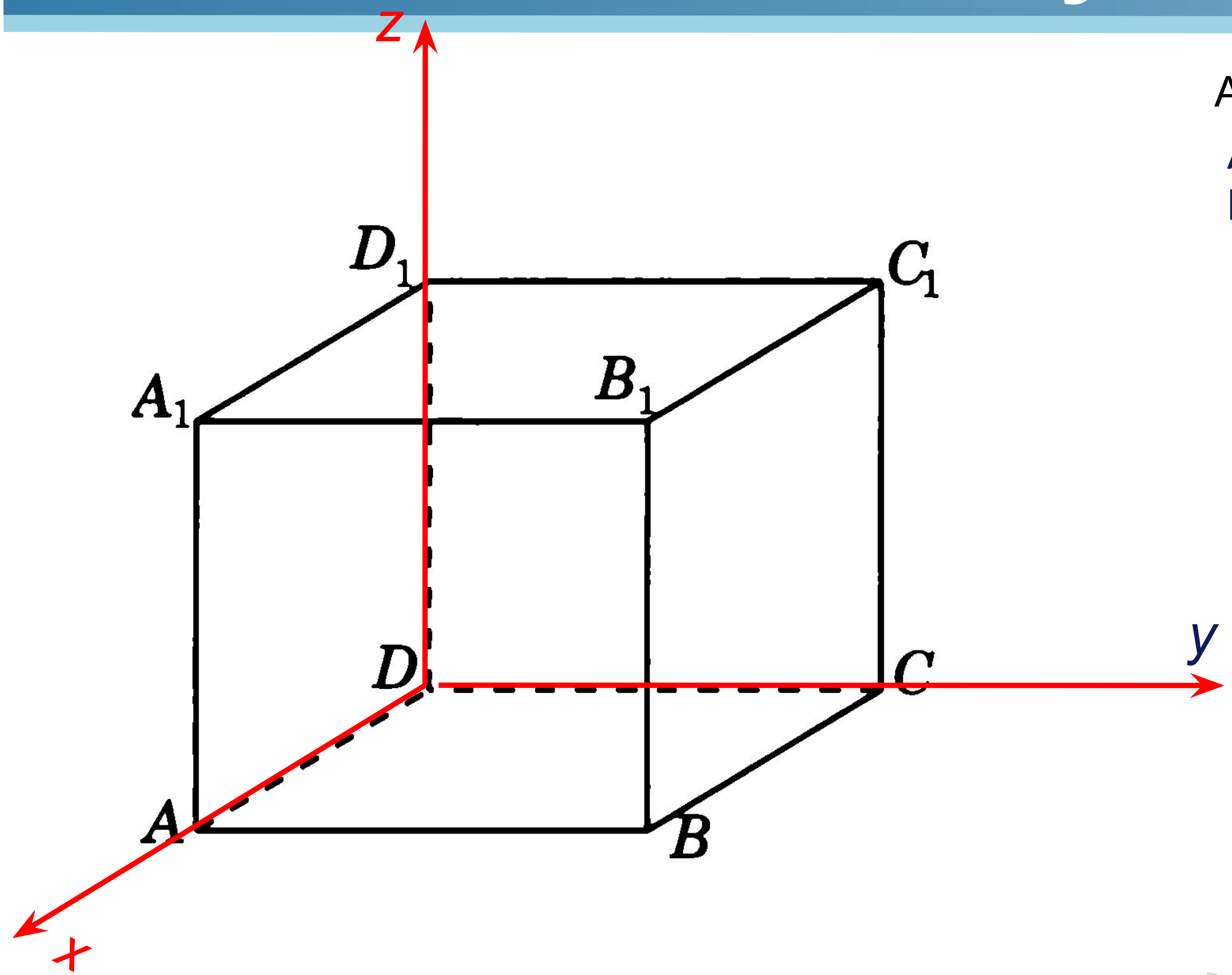



Решение задач С2 методом координат

Дорофеева Лилия Ильинична
учитель математики
МБОУ СОШ №6, г.Нижнекамск
Республики Татарстан

Единичный куб



A (1; 0; 0)

A_1 (1; 0; 1)

B (1; 1; 0)

B_1 (1; 1; 1)

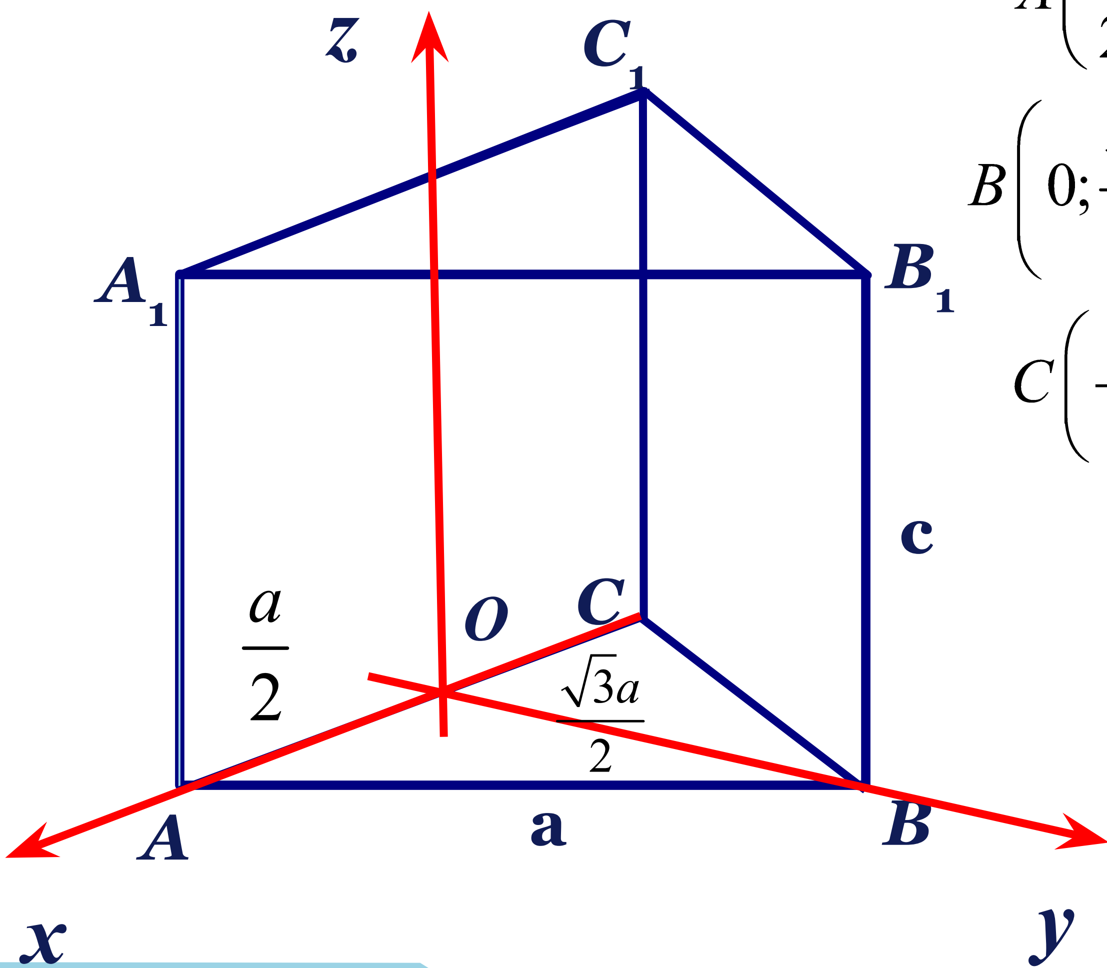
C (0; 1; 0)

C_1 (0; 1; 1)

D (0; 0; 0)

D_1 (0; 0; 1)

Правильная треугольная призма

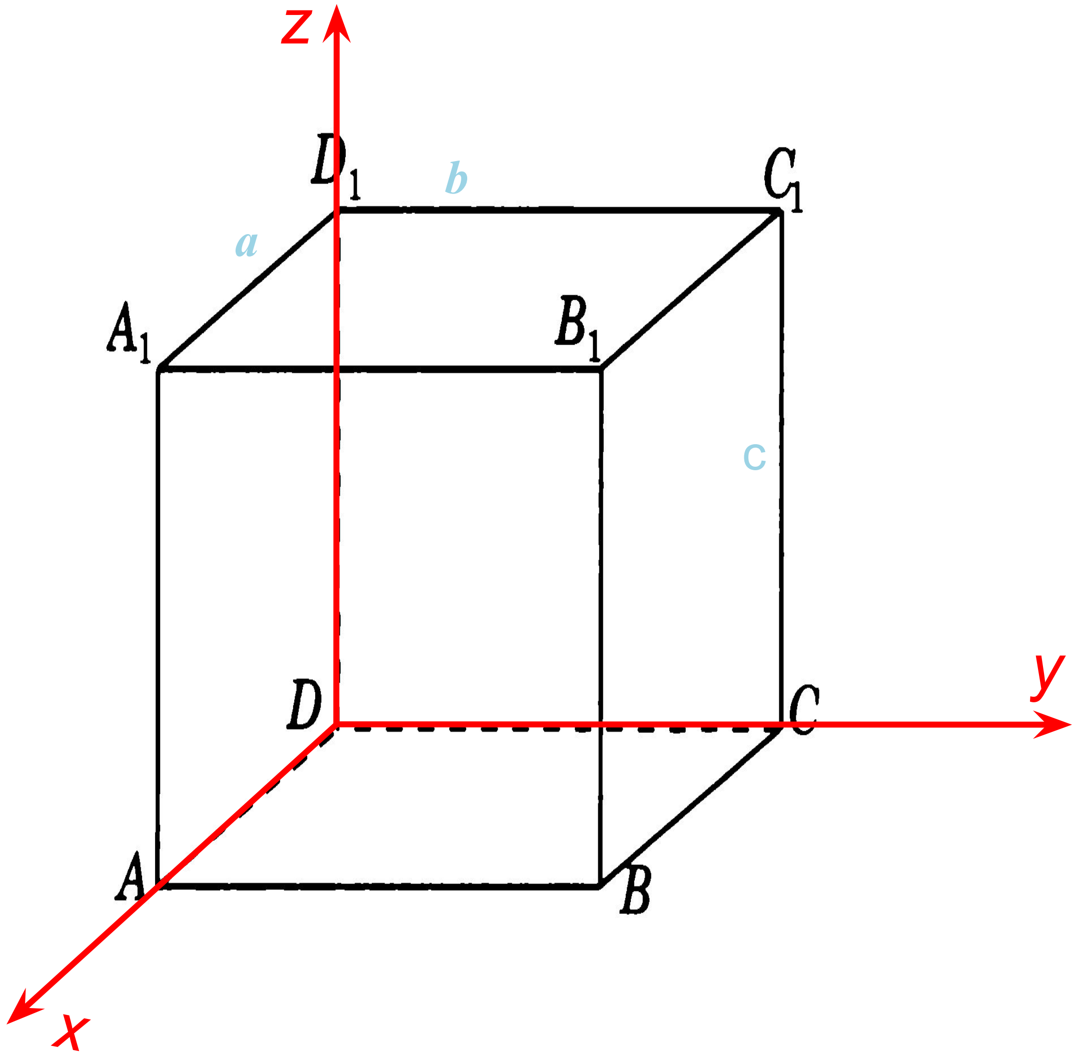


$$A\left(\frac{a}{2};0;0\right) \qquad A_1\left(\frac{a}{2};0;c\right)$$

$$B\left(0;\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right) \qquad B_1\left(0;\frac{\sqrt{3}a}{2};c\right)$$

$$C\left(-\frac{a}{2};0;0\right) \qquad C_1\left(-\frac{a}{2};0;c\right)$$

Прямоугольный параллелепипед



A (a; 0; 0)

A1 (a; 0; c)

B (a; b; 0)

B1 (a; b; c)

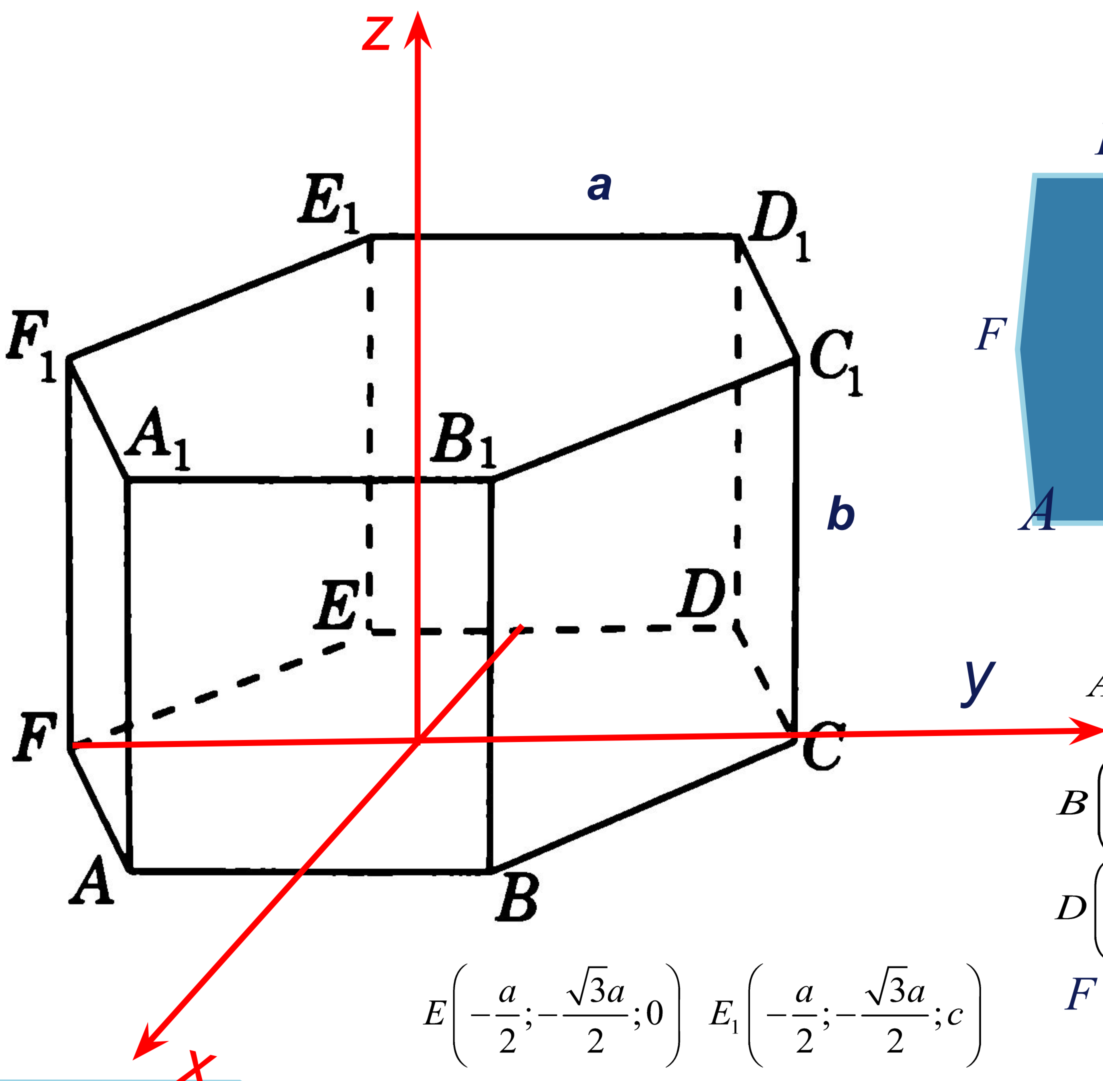
C (0; b; 0)

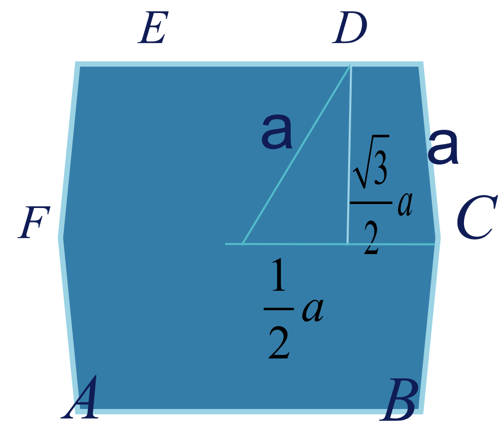
C1 (0; b; c)

D (0; 0; 0)

D1 (0; 0; c)

Прямоугольная шестиугольная призма





C(a; 0;0) *C1 (a; 0;c)*

$A\left(-\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$ $A_1\left(-\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}a}{2};c\right)$

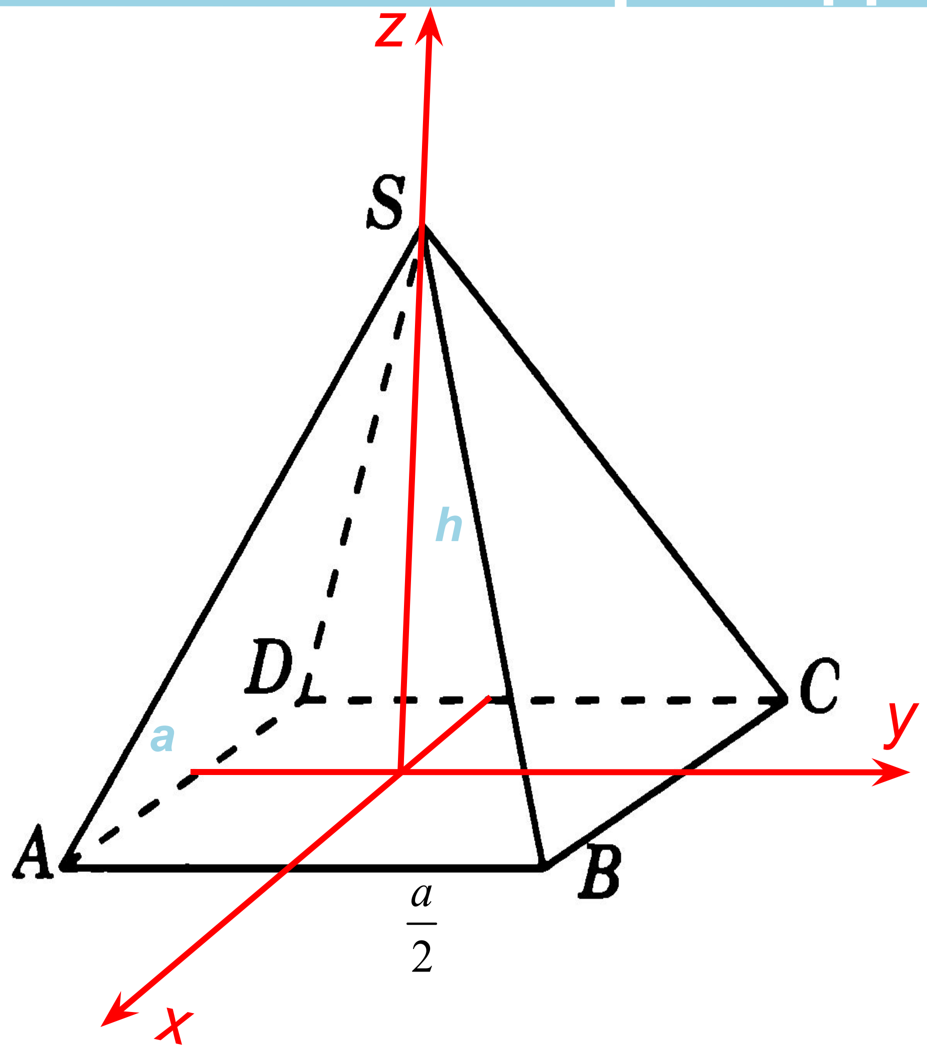
$B\left(\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$ $B_1\left(\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}a}{2};c\right)$

$D\left(\frac{a}{2};-\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$ $D_1\left(\frac{a}{2};-\frac{\sqrt{3}a}{2};c\right)$

$E\left(-\frac{a}{2};-\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$ $E_1\left(-\frac{a}{2};-\frac{\sqrt{3}a}{2};c\right)$

F (- a; 0;0) *F1 (- a; 0;c)*

Правильная четырёхугольная пирамида

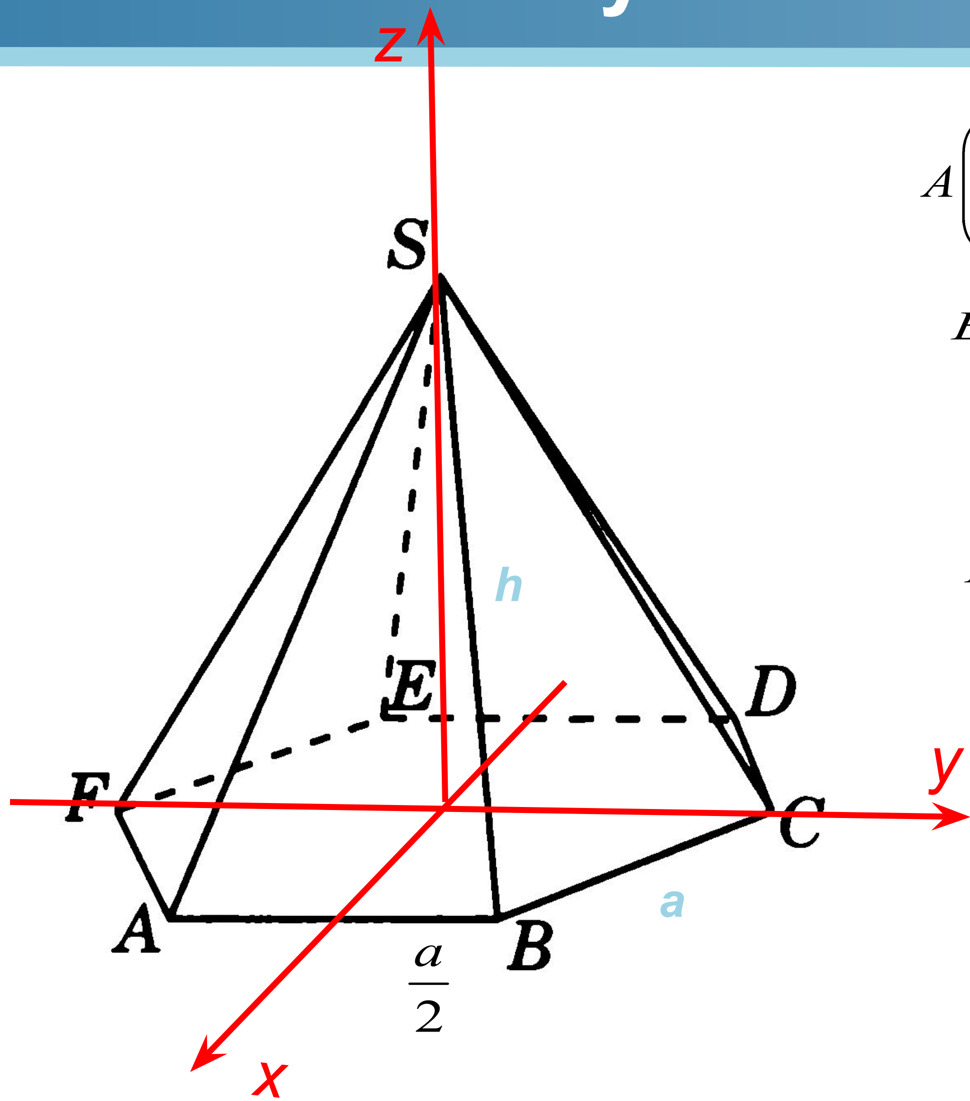


$$A\left(\frac{a}{2};-\frac{a}{2};0\right) \quad B\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$$

$$C\left(-\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right) \quad S(0;0;h)$$

$$D\left(-\frac{a}{2};-\frac{a}{2};0\right)$$

Правильная шестиугольная пирамида



$$A\left(-\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$$

$$B\left(\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$$

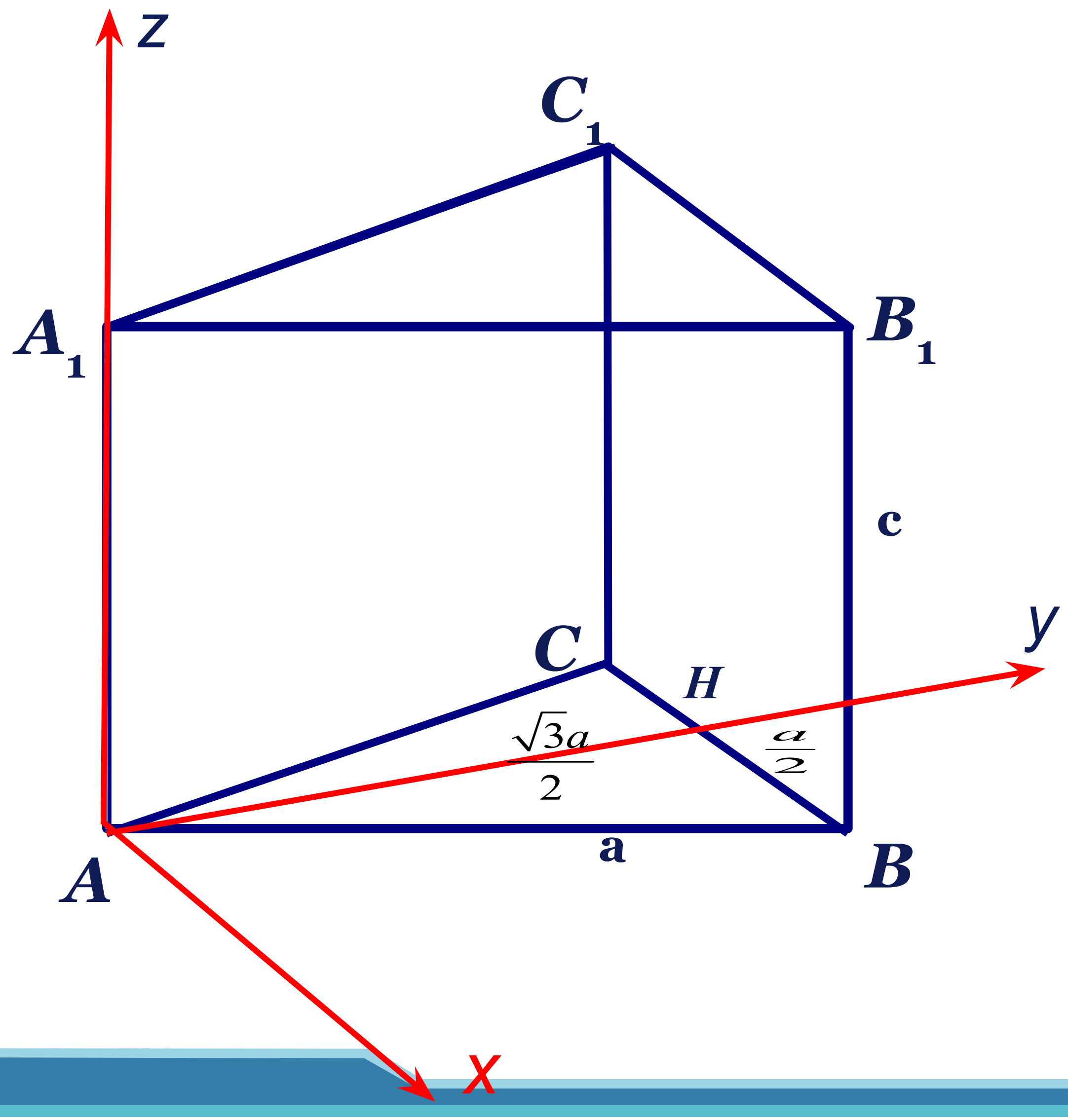
$C\ (a;\ 0;0)$

$$D\left(\frac{a}{2};-\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$$

$$E\left(-\frac{a}{2};-\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$$

$$S(0;0;h)$$

Правильная треугольная призма



$A(0;0;0)$

$A_1(0;0;1)$

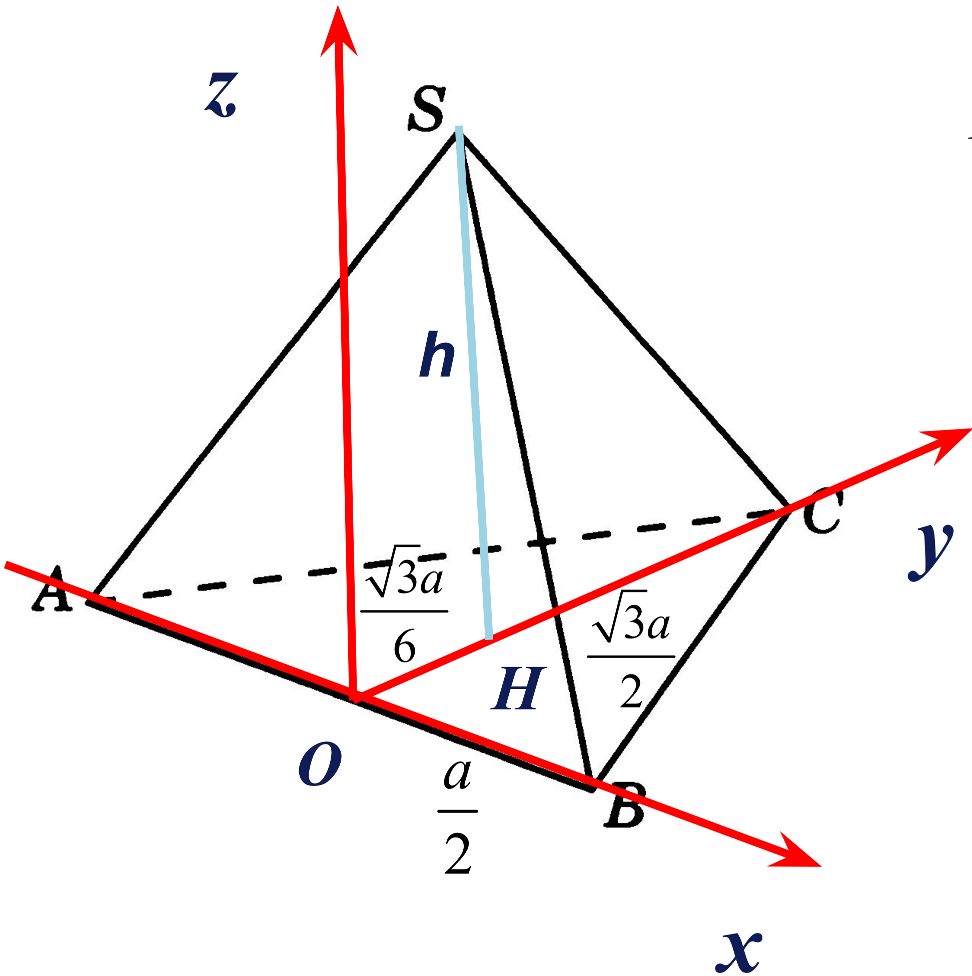
$B(1;0;0),$

$B_1(1;0;1)$

$C\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$

$C_1\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$

Правильная треугольная пирамида



$$B\left(\frac{a}{2};0;0\right) \qquad C\left(0;\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$$

$$A\left(-\frac{a}{2};0;0\right) \qquad S\left(0;\frac{\sqrt{3}a}{6};h\right)$$

Угол между прямой и плоскостью

Прямая *a* образует
с плоскостью α угол $\varphi(\varphi \leq 90^\circ)$. Плоскость α задана
уравнением: ax+вy+cz+d=0 и $\vec{n}\{a;в;c\}$ вектор нормали,
Синус угла определяется по формуле:

$$\sin\varphi = \frac{\left|x_a \cdot a + y_a \cdot в + z_a \cdot c\right|}{\sqrt{x_a^{\ 2} + y_a^{\ 2} + z_a^{\ 2}} \cdot \sqrt{a^2 + в^2 + c^2}}$$

Угол между прямыми

Вектор $\overline{a}\{x_a; y_a; z_a\}$ лежит на прямой а, Вектор $\overline{в}\{x_в; y_в; z_в\}$ лежит на прямой в.
Косинус угла между прямыми а и в:

$$\cos\varphi = \frac{\left|x_a \cdot x_в + y_a \cdot y_в + z_a \cdot z_в\right|}{\sqrt{x_a^{\;2} + y_a^{\;2} + z_a^{\;2}} \cdot \sqrt{x_в^{\;2} + y_в^{\;2} + z_в^{\;2}}}$$

Угол между плоскостями

1.3. Угол между двумя плоскостями. Плоскость α задана уравнением: $a_1x + в_1y + c_1z + d = 0$ и ее вектор нормали $\bar{n}_\alpha\{a_1; в_1; c_1\}$ плоскость β задана уравнением $a_2x + в_2y + c_2z + d = 0$ и ее вектор нормали $\bar{n}_\beta\{a_2; в_2; c_2\}$. Косинус угла φ между плоскостями:

$$\cos\varphi = \frac{\left|a_1 \cdot a_2 + в_1 \cdot в_2 + c_1 \cdot c_2\right|}{\sqrt{a_1^{\ 2} + в_1^{\ 2} + c_1^{\ 2}} \cdot \sqrt{a_2^{\ 2} + в_2^{\ 2} + c_2^{\ 2}}}$$

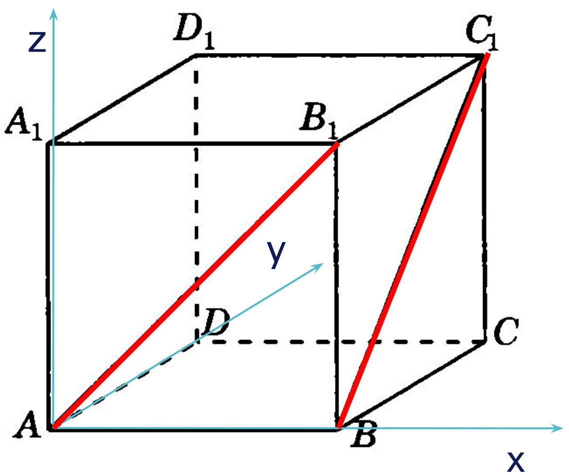
Расстояние от точки до плоскости

Расстояние h от точки $M(x_M; y_M; z_M)$ до плоскости α заданной уравнением ax+вy+cz+d=0 определяется по формуле:

$$h = \frac{\left| a \cdot x_M + в \cdot y_M + c \cdot z_M + d \right|}{\sqrt{a^2 + в^2 + c^2}}$$

Примеры решения задач

1. В единичном кубе найти угол между прямыми и AB_1 BC_1



Введем систему координат и найдем координаты точек A, B, B_1, C_1

A (0; 0; 0), B (1; 0; 0) , B1 (1; 0; 1) , C1 (1; 1; 1)

Находим координаты направляющих векторов прямых AB_1 и BC_1 по формуле 1.

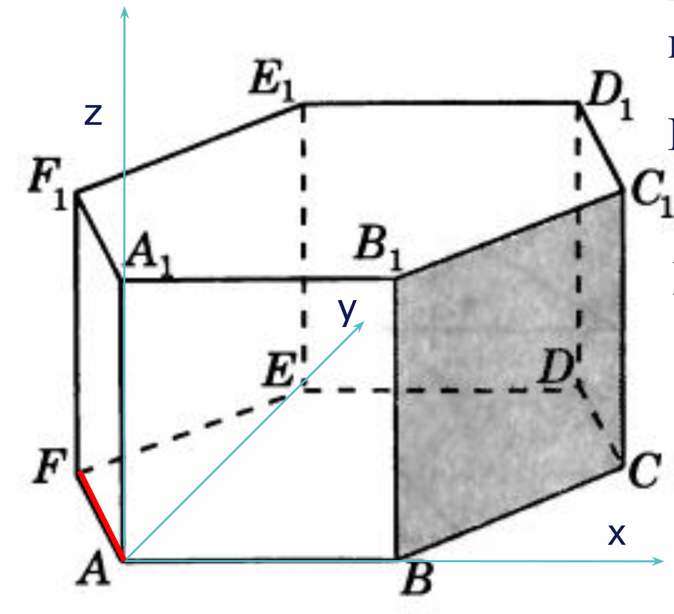
$$\overrightarrow{AB_1}\{1;0;1\}, \overrightarrow{BC_1}\{0;1;0\}$$

Косинус угла φ между прямыми AB_1 и BC_1 определяется по формуле 1.1:

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1|}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{2}, \varphi = 60^\circ$$

$\textit{Ответ}: 60^\circ$

2.В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найти угол между прямой AF и плоскостью BCC_1



Введем систему координат и находим координаты нужных точек.

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AF}\left\{-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right\}$

Плоскость BCC_1 совпадает с плоскостью грани BB_1C_1C; зададим ее с помощью точек

$$B(1;0;0),\ B_1(1;0;1),\ C\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$$

Пусть ax+by+cz+d=0 – уравнение плоскости BCC_1

$$B(1;0;0)\in(BCC_1)\Rightarrow a+d=0$$

$$B_1(1;0;1)\in(BCC_1)\Rightarrow a+c+d=0$$

$$C\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)\in(BCC_1)\Rightarrow a\cdot\frac{3}{2}+b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+d=0$$

$$\Rightarrow\quad d=-a,\quad c=0,\quad b=-\frac{a}{\sqrt{3}}$$

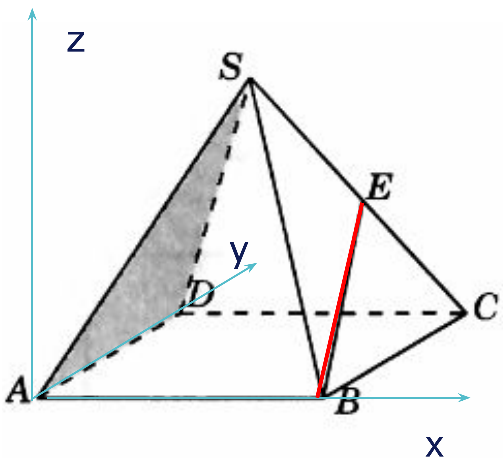
Уравнение плоскости BCC_1 примет вид $ax-\frac{a}{\sqrt{3}}y-a=0$ или $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$

Вектор нормали : $\bar{n}\{\sqrt{3};-1;0\}$

Синус искомого угла:

$$\sin\varphi=\frac{\left|\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+(-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+0\cdot0\right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2+0}\cdot\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+0}}=\frac{\sqrt{3}}{2};\ Ответ:\varphi=60^\circ$$

3.В правильной четырехугольной пирамиде , все ребра которой равны 1, найти синус угла между прямой BE и плоскостью SAD, где E- середина ребра SC



Координаты точки E определим по формуле 3:

$$E\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \text{ и } \overline{BE}\left\{-\frac{1}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$$

Пусть уравнение плоскости ADS ax+by+cz+d=0

Из того, что $A(0;0;0), D(0;1;0)\, S\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in (ADS)$

следует, что d=0, b+d=0 и : $a\cdot\frac{1}{2}+b\cdot\frac{1}{2}+c\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+d=0$

Отсюда получим, что $a=-\sqrt{2}c, b=0, d=0$ и уравнение плоскости ADS примет вид:

$-\sqrt{2}cx+cz=0$, или $\sqrt{2}x-z=0$. Вектор нормали $\bar{n}\{\sqrt{2};0;-1\}$

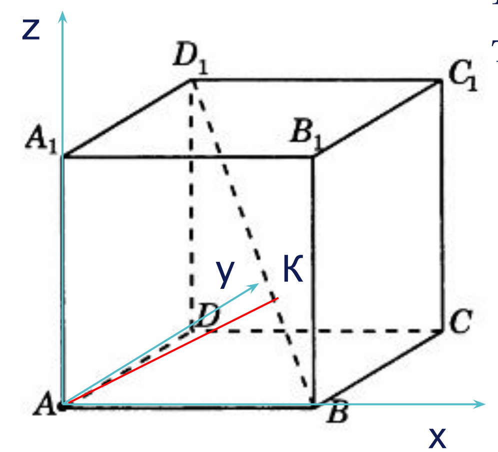
Синус угла между прямой BE плоскостью ADS определим по формуле 1.2

$$\sin\varphi=\frac{\left|\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+0\cdot\frac{3}{4}+(-1)\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+0^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Ответ : $\frac{\sqrt{2}}{3}$

4.В единичном кубе A… D_1 найти расстояние от точки A до прямой BD_1

Находим координаты точек $A(0;0;0)\,B(1;0;0)\,D_1(0;1;1)$, вектора $\overline{BD_1}\{-1;1;1\}$



Искомое расстояние есть длина перпендикуляра AK.
Если отрезок BD разделен точкой K(x;y;z) в отношении λ, то координаты точки K определяются по формуле 1.5:

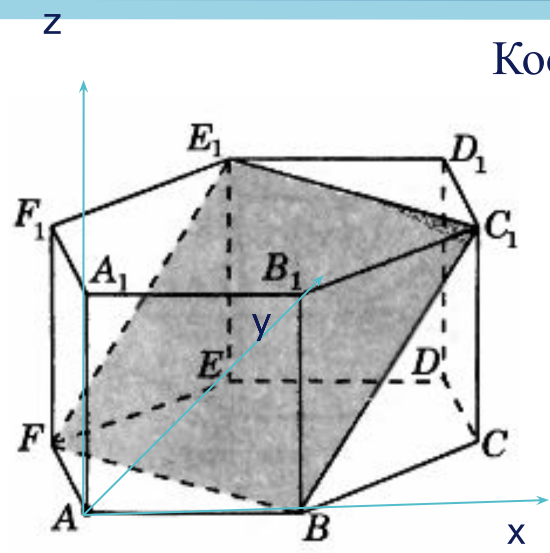
$$x=\frac{1+0}{1+\lambda};\ y=\frac{0+\lambda}{1+\lambda};\ z=\frac{0+\lambda}{1+\lambda}\ K\left(\frac{1+0}{1+\lambda};\frac{0+\lambda}{1+\lambda};\frac{0+\lambda}{1+\lambda}\right)\overline{AK}\left\{\frac{1+0}{1+\lambda};\frac{0+\lambda}{1+\lambda};\frac{0+\lambda}{1+\lambda}\right\}$$

$$\text{т.к. } \overline{AK}\perp\overline{BD_1}\Rightarrow\overline{AK}\cdot\overline{BD_1}=0$$

$$-\frac{1}{1+\lambda}+\frac{\lambda}{1+\lambda}+\frac{\lambda}{1+\lambda}=0\quad \lambda=\frac{1}{2}\Rightarrow K\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right),\overline{AK}\left\{\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\}$$

$$\left|\overline{AK}\right|=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{6}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\qquad \text{Ответ}:\frac{\sqrt{6}}{3}$$

5.В правильной шестиугольной призме $A...F_1$ все ребра которой равны 1, найти расстояние от точки А до плоскости BFE_1



Координаты точек $A(0;0;0)$ $B(1;0;0)$ и $E_1(0;\sqrt{3};1)$, $F\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$

Подставив координаты точек B, F и E_1 в общее уравнение плоскости получим систему уравнений:

$$B \in (BFE_1) \Rightarrow a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+d=0$$

$$F\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right) \in (BFE_1) \Rightarrow a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+d=0$$

$$E_1(0;\sqrt{3};1) \in (BFE_1) \Rightarrow b\cdot\sqrt{3}+c\cdot 1+d=0$$

Откуда $d = -a, c = -2a, b = a\sqrt{3}$

Уравнение плоскости примет вид: $ax+\sqrt{3}ay-2az-a=0$, или $x+\sqrt{3}y-2z-1=0$

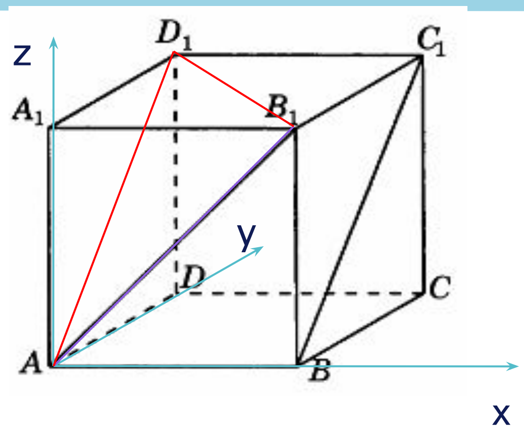
Вектор нормали: $\overline{n}\{1;\sqrt{3};-2\}$

Вычислим расстояние h от точки А до плоскости BFE_1 по формуле 1.4:

$$h=\frac{1\cdot 0+\sqrt{3}\cdot 0+(-2)\cdot 0-1}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$

6.В единичном кубе $A...D_1$ найти расстояние между прямыми AB_1 и BC_1



При параллельном переносе на вектор $\overline{BA}$ прямая BC_1 отображается на прямую AD_1. Таким образом, плоскость AB_1D_1 содержит прямую AB_1 и параллельна прямой BC_1. Расстояние между прямыми AB_1 и BC_1 находим как расстояние от точки B до плоскости AB_1D_1

Пусть ax+by+cz+d=0 – уравнение плоскости AB_1D_1.

Так как $A(0;0;0) \in (AB_1D_1) \Rightarrow d = 0$

$$B_1(1;0;1) \in (AB_1D_1) \Rightarrow a = -c$$

$$D_1(0;1;1) \in (A_1B_1D_1) \Rightarrow b = -c$$

Уравнение плоскости запишется как –cx-cy+cz=0, или x+y+z=0..

Вектор нормали $\overline{n}\{1;1;-1\}$

Расстояние h от точки $B(1;0;0)$ до плоскости AB_1D_1 находим по формуле

$$h = \frac{|1\cdot 1 + 1\cdot 0 + (-1)\cdot 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ответ : $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Литература:

1.Каталог задач: www.problems.ru
2.Образовательный портал»Физ/мат класс»: www.fmclass.ru
3.Открытый банк задач: www.mathege.ru
4.Федеральный институт педагогических измерений: www.fipi.ru