

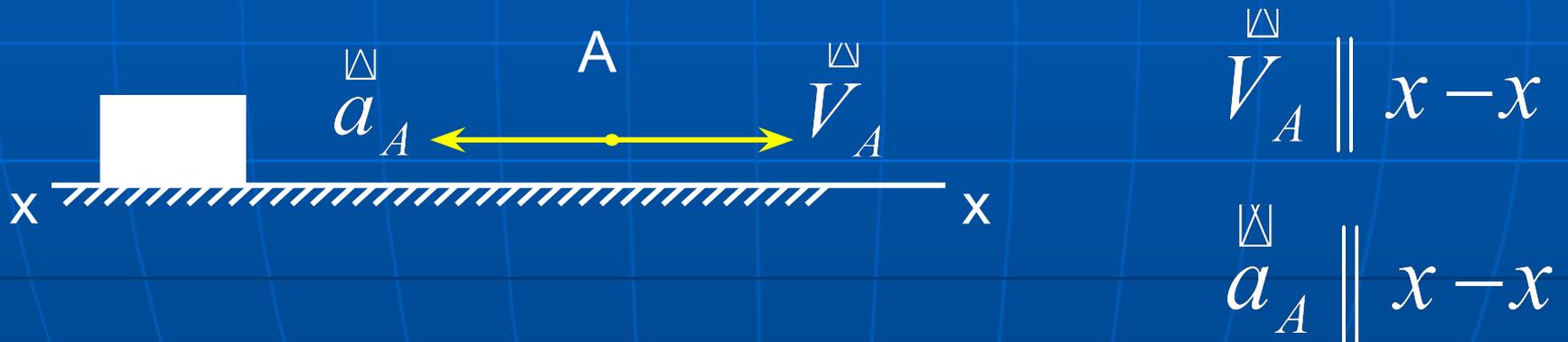
ЛЕКЦИЯ 3

Краткое содержание:

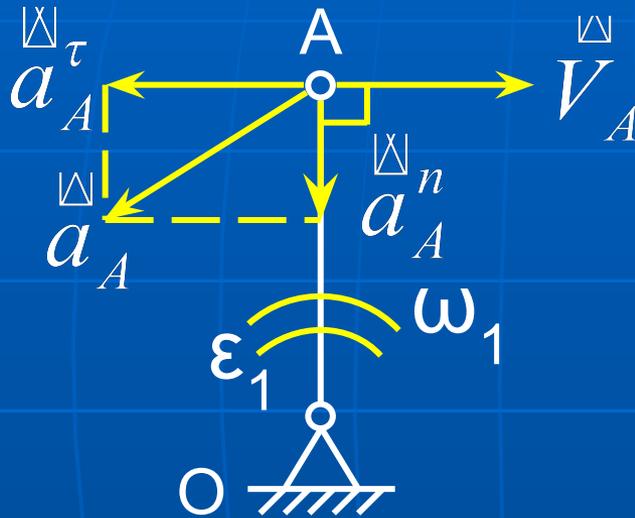
- Определение скоростей и ускорений точек звеньев при поступательном, вращательном и плоскопараллельном движениях;
- Планы скоростей и ускорений;
- Принцип подобия в планах скоростей и ускорений;
- Примеры кинематического исследования рычажных механизмов.

Определение скоростей и ускорений для различных видов движений

1. Поступательное движение (ползун по стойке)



2. Вращательное движение относительно неподвижной стойки (кривошип, коромысло, кулиса)



$$\vec{V}_A \perp OA$$

$$V_A = \omega_1 \cdot OA$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$$

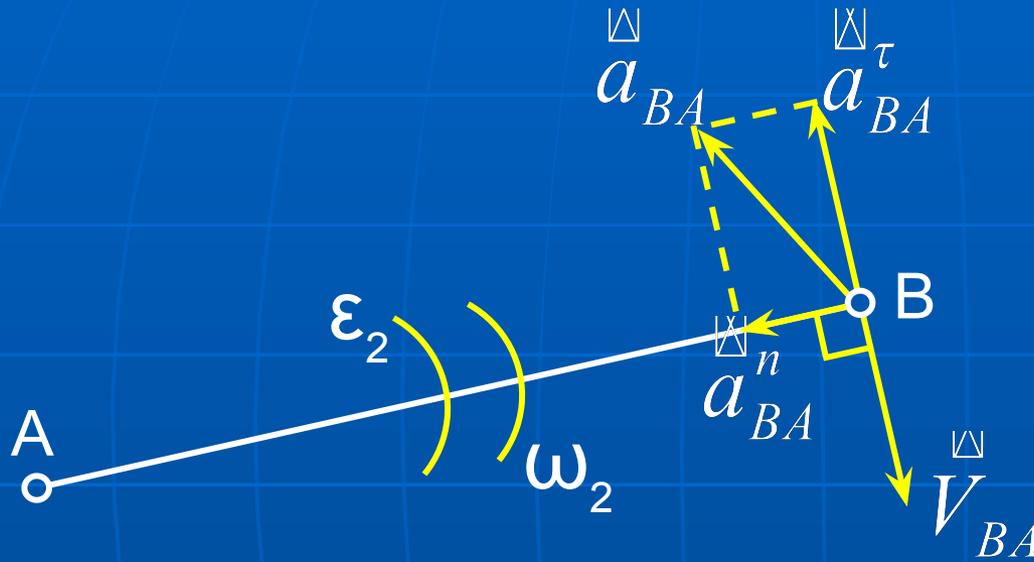
$$\vec{a}_A^n \parallel OA$$

$$a_A^n = \omega_1^2 \cdot OA$$

$$\vec{a}_A^\tau \perp OA$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot OA$$

3. Плоскопараллельное движение (шатун)



$$\overset{\vee}{V}_B = \overset{\vee}{V}_A + \overset{\vee}{V}_{BA}$$

$$\overset{\vee}{V}_{BA} \perp AB$$

$$V_{BA} = \omega_2 \cdot AB$$

$$\overset{\vee}{a}_B = \overset{\vee}{a}_A + \overset{\vee}{a}_{BA}$$

$$\overset{\vee}{a}_{BA} = \overset{\vee}{a}_{BA}^n + \overset{\vee}{a}_{BA}^\tau$$

$$\overset{\vee}{a}_{BA}^n \parallel AB$$

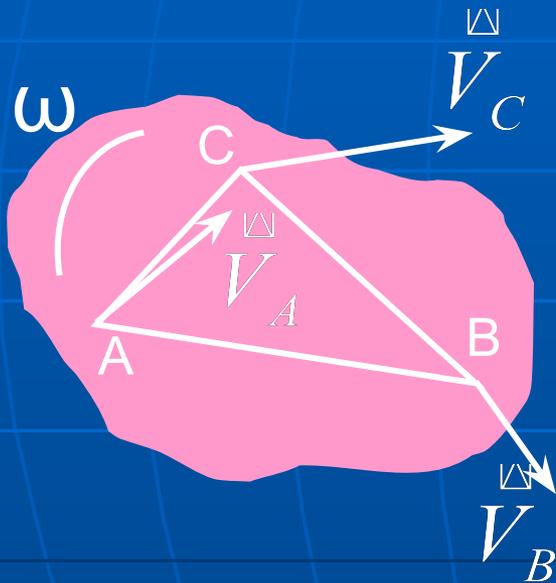
$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot AB$$

$$\overset{\vee}{a}_{BA}^\tau \perp AB$$

$$a_{BA}^\tau = \epsilon_2 \cdot AB$$

Планы скоростей и ускорений

Планом скоростей (ускорений) называется диаграмма, на которой от некоторого центра (полюса) в масштабе отложены векторы скоростей (ускорений) точек тела

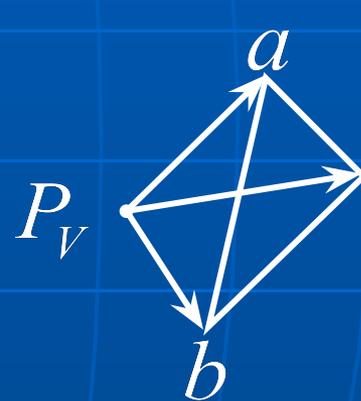


$$\overset{\curvearrowright}{V}_B = \overset{\curvearrowright}{V}_A + \overset{\curvearrowright}{V}_{BA}$$

$$\overset{\curvearrowright}{V}_B = \overset{\curvearrowright}{V}_C + \overset{\curvearrowright}{V}_{BC}$$

$$\overset{\curvearrowright}{V}_C = \overset{\curvearrowright}{V}_A + \overset{\curvearrowright}{V}_{CA}$$

$$\mu_V \frac{m/c}{mm}$$



$$V_{BA} = ab \cdot \mu_V$$

$$V_{BC} = bc \cdot \mu_V$$

$$V_{CA} = ac \cdot \mu_V$$

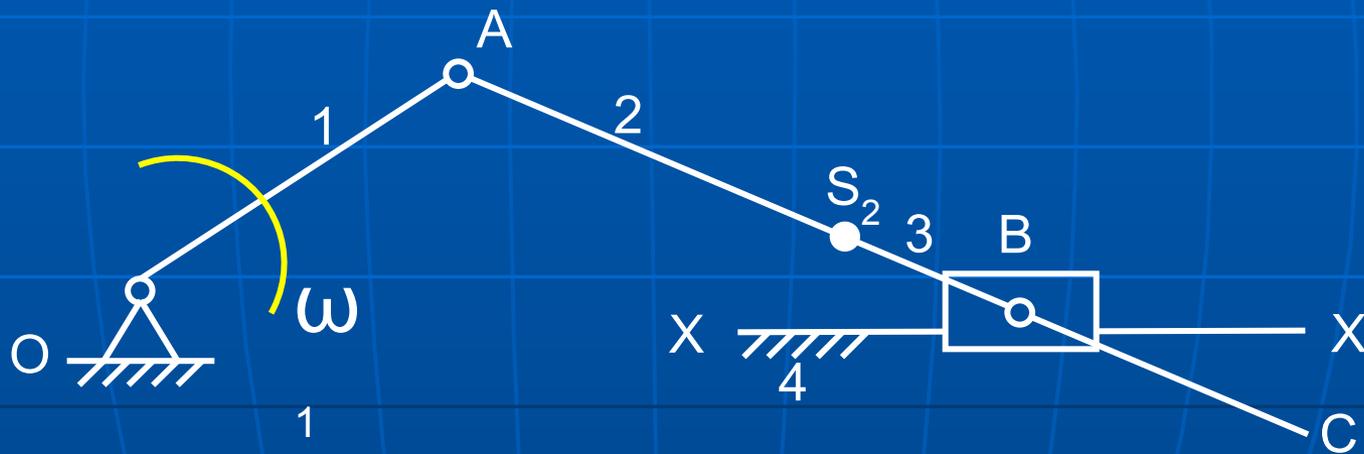
Принцип подобия в плане скоростей - в плане скоростей векторы относительных скоростей точек жесткого звена образуют фигуру, подобную звену, повернутую на угол 90° в сторону угловой скорости звена

Пример № 3.1

Дано: $\omega_1 = 30 \text{ с}^{-1}$; $OA = 20\text{мм}$; $AB = 76\text{мм}$; $BC = 26\text{мм}$; $AS_2 = 51 \text{ мм}$.

Определить:

- численные значения и направления скоростей точек A, B, C
- угловую скорость звена AB



Решение

1. Определение скорости точки А.

$$M_A \in \omega_1 \cdot OA = 30 \cdot 0,02 = 0,6 \quad / \quad .$$

Выбираем масштаб плана скоростей $\mu_V = 0,01 \frac{м/с}{мм}$

Найдём отрезок, изображающий вектор скорости \vec{V}_A на плане:

$$p_V a = \frac{V_A}{\mu_V} = \frac{0,6}{0,01} = 60 \text{ мм}$$

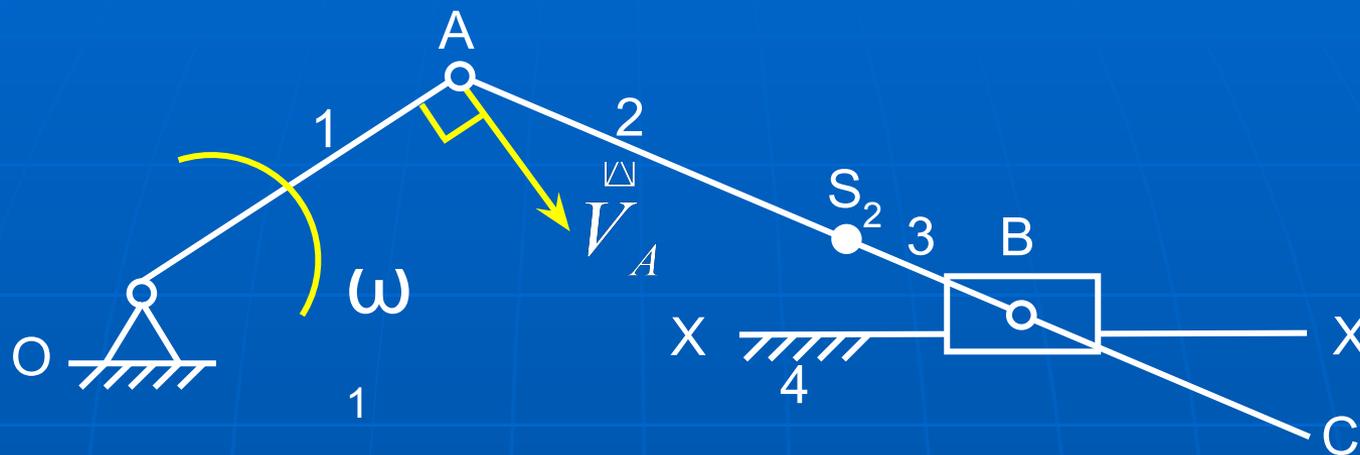
2. Определение скорости точки В.

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$

Направления векторов скоростей: $\vec{V}_B // X-X$, $\vec{V}_{BA} \perp BA$

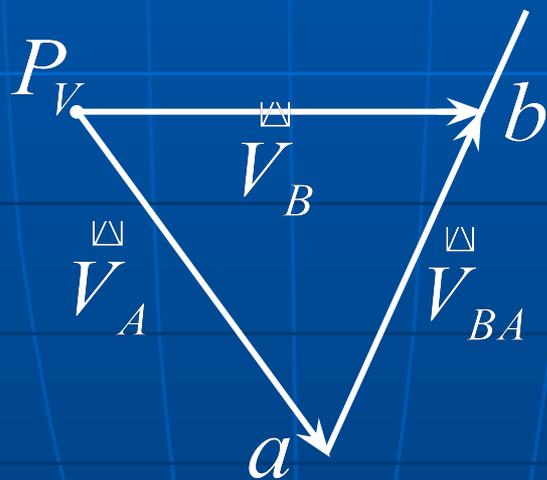
$$V_B = p_V b \cdot \mu_V = 65 \cdot 0,01 = 0,65 \text{ м/с};$$

$$V_{BA} = ab \cdot \mu_V = 50 \cdot 0,01 = 0,5 \text{ м/с}.$$



План скоростей

$$\mu_v = 0,01 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$$



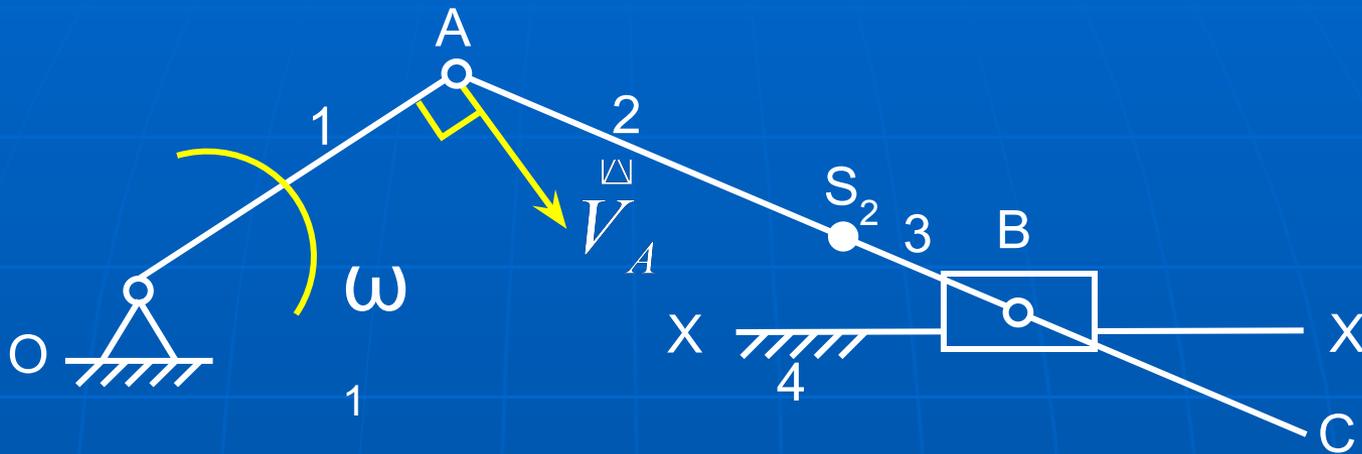
3. Определение скорости точки С

Воспользуемся следствием из теоремы подобия.
Составим пропорцию:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{ab}{bc}, \quad bc = \frac{ab \cdot BC}{AB} = \frac{50 \cdot 26}{76} = 17 \text{ мм.}$$

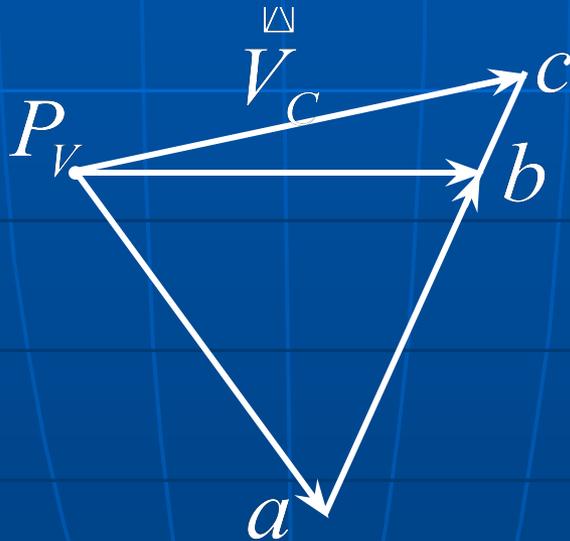
4. Определение угловой скорости шатуна АВ.

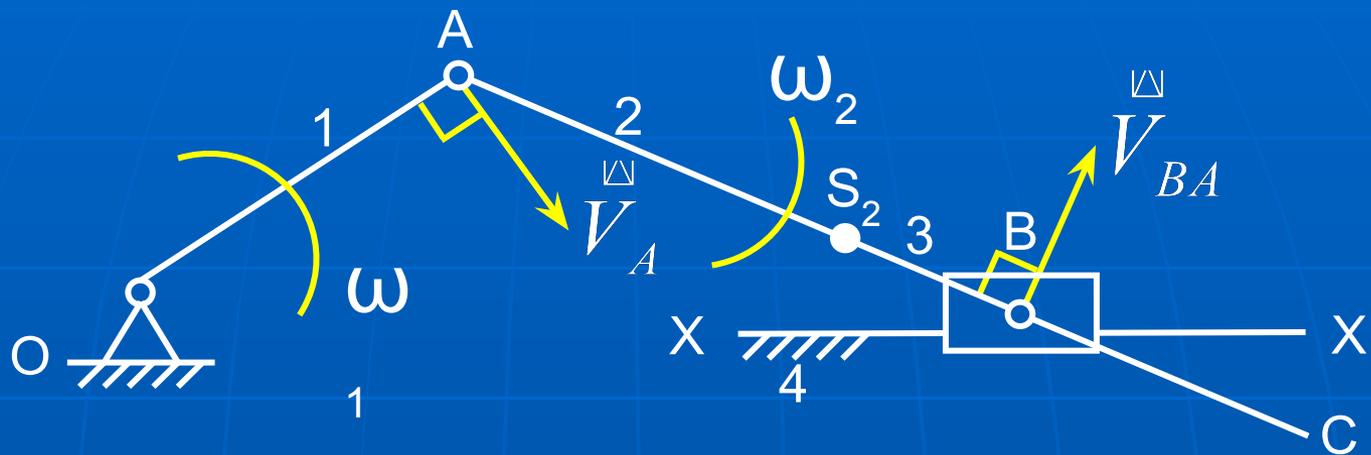
$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{AB} = \frac{0,5}{0,076} = 6,6 \text{ с}^{-1}.$$



План скоростей

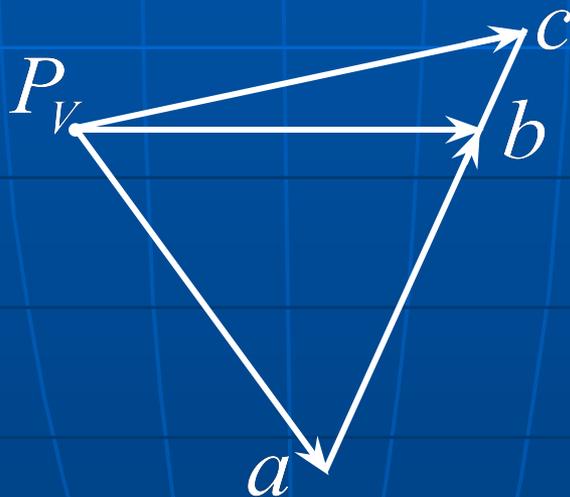
$$\mu_v = 0,01 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$$





План скоростей

$$\mu_v = 0,01 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$$



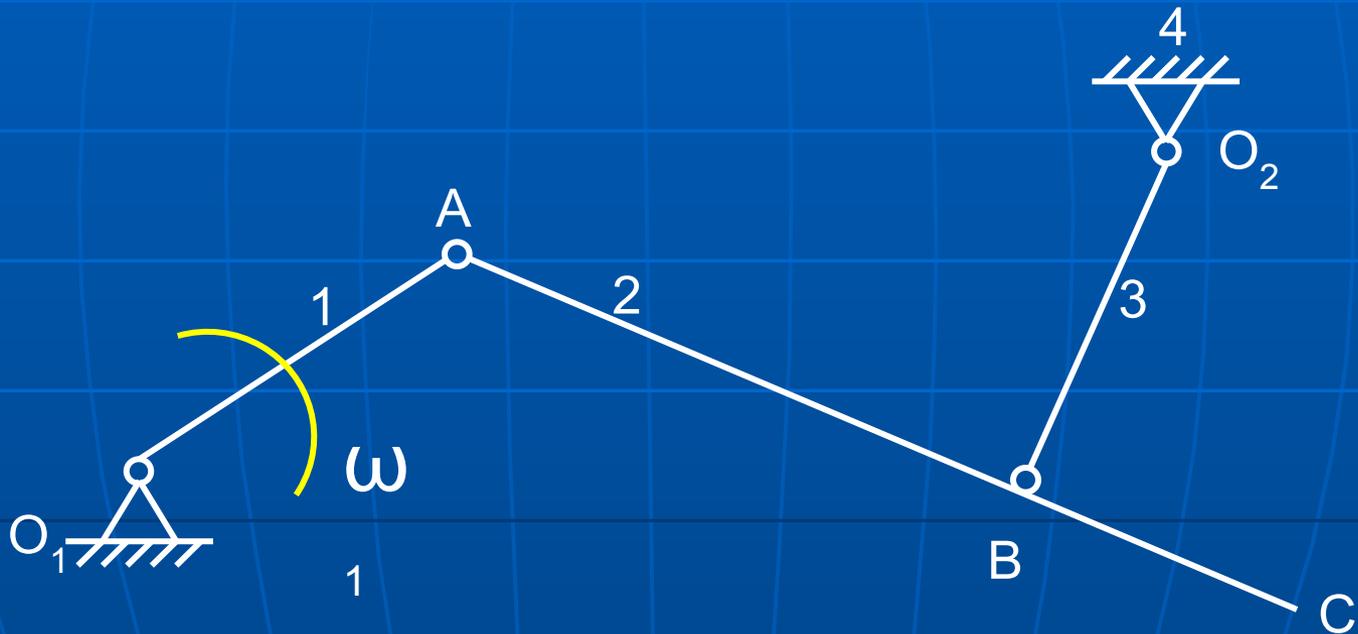
Скорость	Отрезок	Направление	Длина отрезка, мм	Масштаб	Значение, м/с
\vec{V}_A	$p_V a$	$\vec{V}_A \perp OA$	60	$0,01 \frac{м/с}{мм}$	0,6
\vec{V}_B	$p_V b$	$\vec{V}_B // X-X$	65		0,65
\vec{V}_{BA}	ab	$\vec{V}_{BA} \perp BA$	50		0,5
\vec{V}_C	$p_V c$		75		0,75
ω_2	Против часовой стрелки				$6,6 с^{-1}$

Пример №3.2

Дано: $\omega_1 = 30 \text{ с}^{-1}$; $O_1A = 20\text{мм}$; $AB = 50\text{мм}$; $BO_2 = 30\text{мм}$; $BC_2 = 25 \text{ мм}$.

Определить:

- численные значения и направления скоростей точек A, B, C
- угловые скорости звеньев AB и O_2B



Решение

1. Определение скорости точки А.

$$V_A = \omega_1 \cdot O_1A = 30 \cdot 0,02 = 0,6 \text{ м/с.}$$

Выбираем масштаб плана скоростей $\mu_V = 0,01 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$

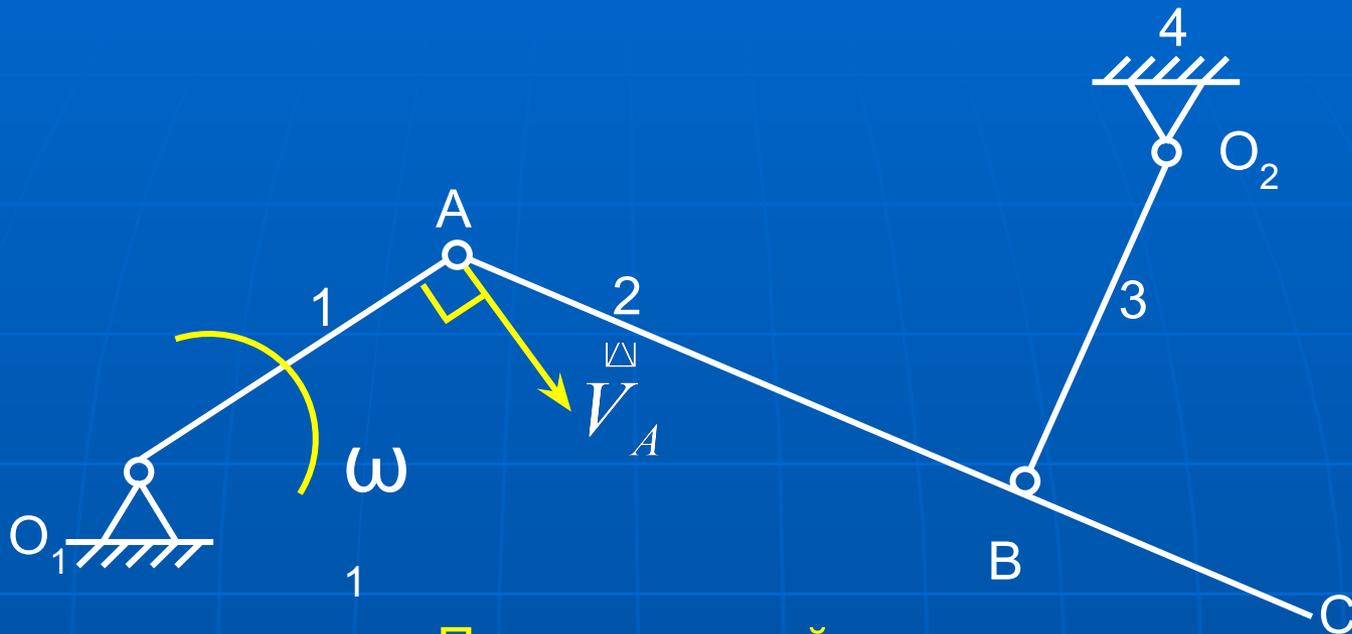
Найдём отрезок, изображающий вектор скорости \vec{V}_A на плане:

$$p_V a = \frac{V_A}{\mu_V} = \frac{0,6}{0,01} = 60 \text{ мм}$$

2. Определение скорости точки В.

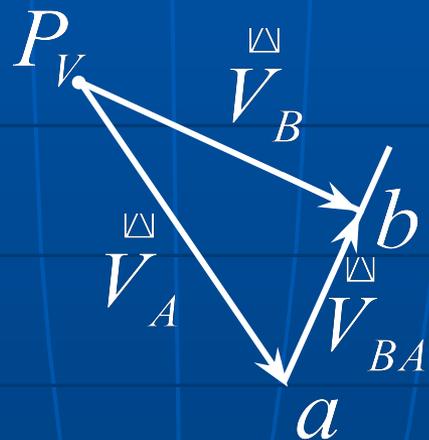
$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$

Направления векторов скоростей: $\vec{V}_B \perp BO_2$ $\vec{V}_{BA} \perp BA$



План скоростей

$$\mu_v = 0,01 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$$



Решение

1. Определение скорости точки А.

$$M_A \in \omega_1 \cdot O_1A = 30 \cdot 0,02 = 0,6 \quad /$$

Выбираем масштаб плана скоростей $\mu_V = 0,01 \frac{м/с}{мм}$

Найдём отрезок, изображающий вектор скорости \vec{V}_A на плане:

$$p_V a = \frac{V_A}{\mu_V} = \frac{0,6}{0,01} = 60 мм$$

2. Определение скорости в точке В.

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$

Направления векторов скоростей: $\vec{V}_B \parallel X-X$, $\vec{V}_{BA} \perp BA$

$$V_B = p_V b \cdot \mu_V = 55 \cdot 0,01 = 0,55 м/с;$$

$$V_{BA} = ab \cdot \mu_V = 16 \cdot 0,01 = 0,16 м/с.$$

3. Определение скорости точки С

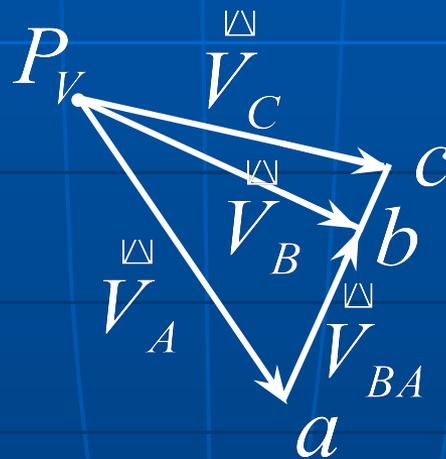
Воспользуемся следствием из теоремы подобия. Составим пропорцию:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{ab}{bc}, \quad bc = \frac{ab \cdot BC}{AB} = \frac{16 \cdot 25}{50} = 8 \text{ мм.}$$



План скоростей

$$\mu_v = 0,01 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$$



3. Определение скорости точки С

Воспользуемся следствием из теоремы подобия. Составим пропорцию:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{ab}{bc}, \quad bc = \frac{ab \cdot BC}{AB} = \frac{16 \cdot 25}{50} = 8 \text{ мм.}$$

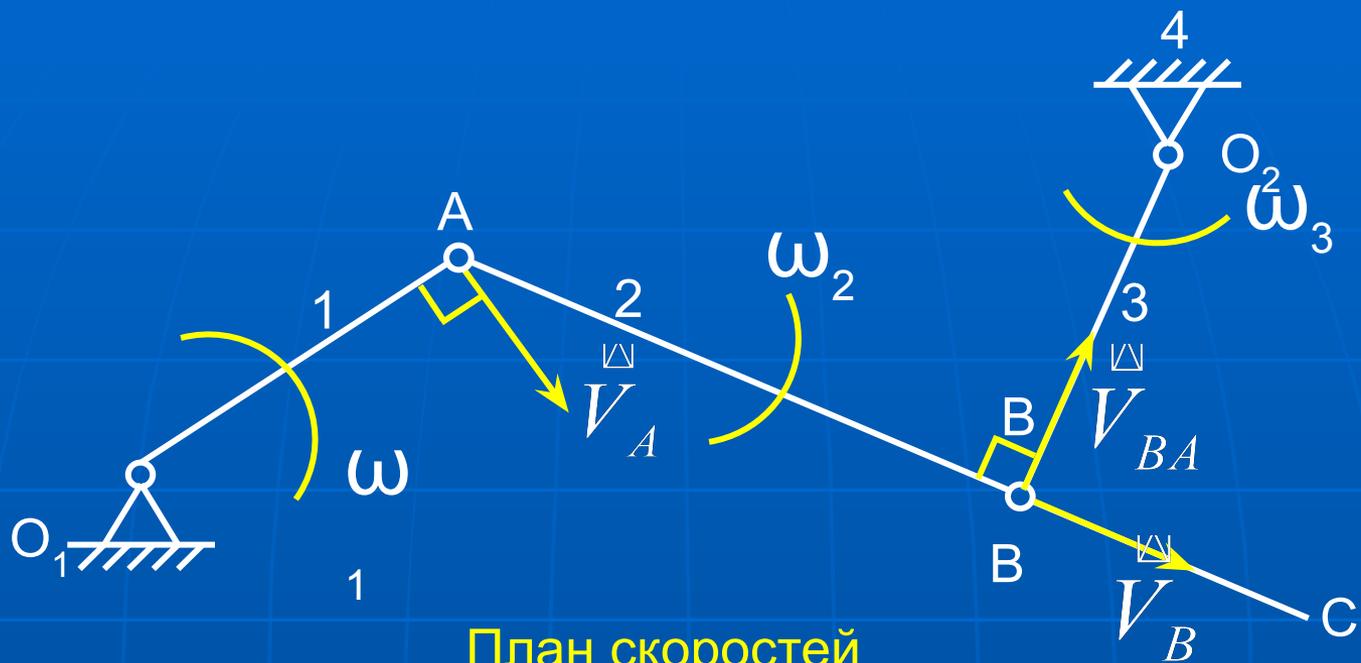
$$V_C = p_V c \cdot \mu_V = 56 \cdot 0,01 = 0,56 \text{ м/с.}$$

4. Определение угловой скорости шатуна АВ.

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{AB} = \frac{0,16}{0,05} = 3,2 \text{ с}^{-1}.$$

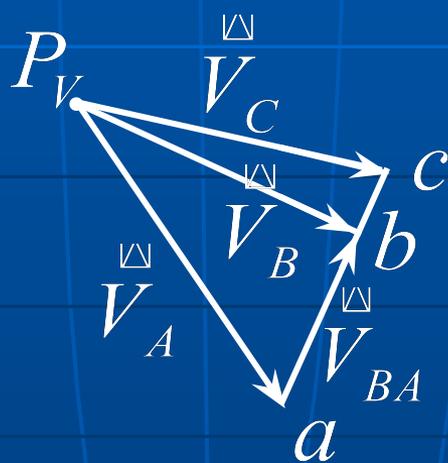
5. Определение угловой скорости коромысла BO_2 .

$$\omega_3 = \frac{V_B}{BO_2} = \frac{0,55}{0,03} = 18,3 \text{ с}^{-1}.$$



План скоростей

$$\mu_v = 0,01 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$$



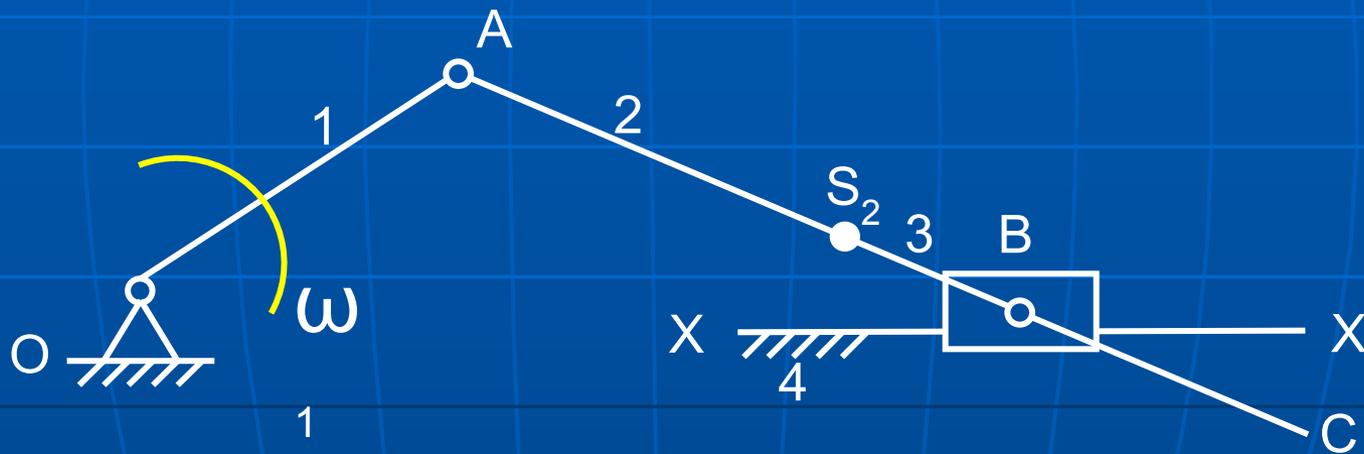
Скорость	Отрезок	Направление	Длина отрезка, мм	Масштаб	Значение, м/с
\vec{V}_A	$p_V a$	$\vec{V}_A \perp OA$	60	$0,01 \frac{м/с}{мм}$	0,6
\vec{V}_B	$p_V b$	$\vec{V}_B \perp BO_2$	55		0,55
\vec{V}_{BA}	ab	$\vec{V}_{BA} \perp BA$	16		0,16
\vec{V}_C	$p_V c$		56		0,56
ω_2	<i>Против часовой стрелки</i>				3,2 с ⁻¹
ω_3					18,3 с ⁻¹

Пример № 3.3

Дано: $\omega_1 = 30 \text{ с}^{-1}$; $OA = 20\text{мм}$; $AB = 76\text{мм}$; $BC = 26\text{мм}$; $AS_2 = 51 \text{ мм}$.

Определить:

- численные значения и направления ускорений точек A, B, C
- угловое ускорение звена AB



Решение

1. Определение ускорения точки А.

$$a_A = \omega_1^2 \cdot OA = 30^2 \cdot 0,02 = 18 \text{ м/с}^2.$$

Выбираем масштаб плана ускорений $\mu_a = 0,3 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$

Найдём отрезок, изображающий вектор ускорения \vec{a}_A на плане:

$$p_{a_A} = \frac{a_A}{\mu_a} = \frac{18}{0,3} = 60$$

2. Определение ускорения точки В.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$$

Относительное ускорение $\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$

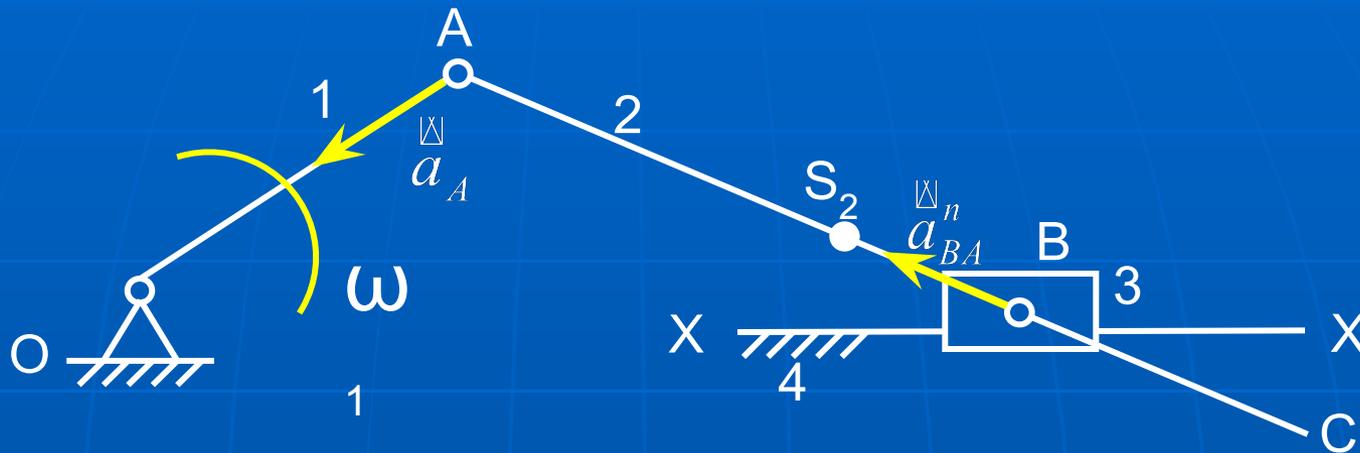
Нормальное ускорение $\vec{a}_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot AB = 6,6^2 \cdot 0,076 = 3,31 \text{ м/с}^2$

Найдём отрезок, изображающий вектор ускорения \vec{a}_{BA}^n на плане:

$$a_{n_{BA}} = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a} = \frac{3,31}{0,3} = 11 \text{ мм}$$

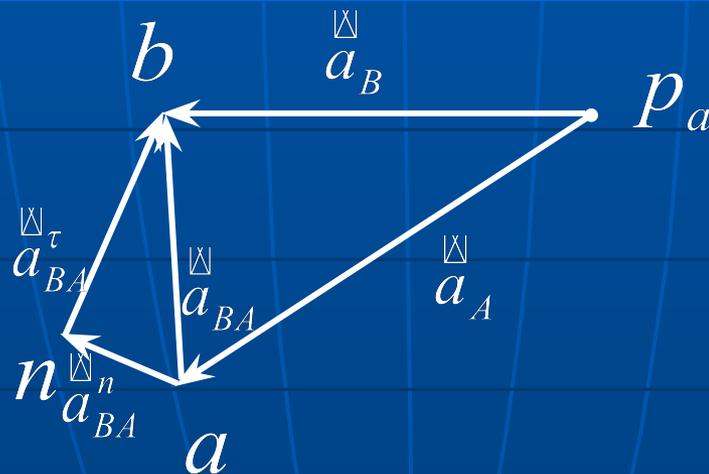
Направления ускорений

$$\vec{a}_A // OA \quad \vec{a}_B // x-x \quad \vec{a}_{BA}^n // AB \quad \vec{a}_{BA}^\tau \perp AB$$



План ускорений

$$\mu_a = 0,3 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$$



Величины ускорений

$$a_B = p_a b \cdot \mu_a = 29 \cdot 0,3 = 8,7 \text{ м/с}^2$$

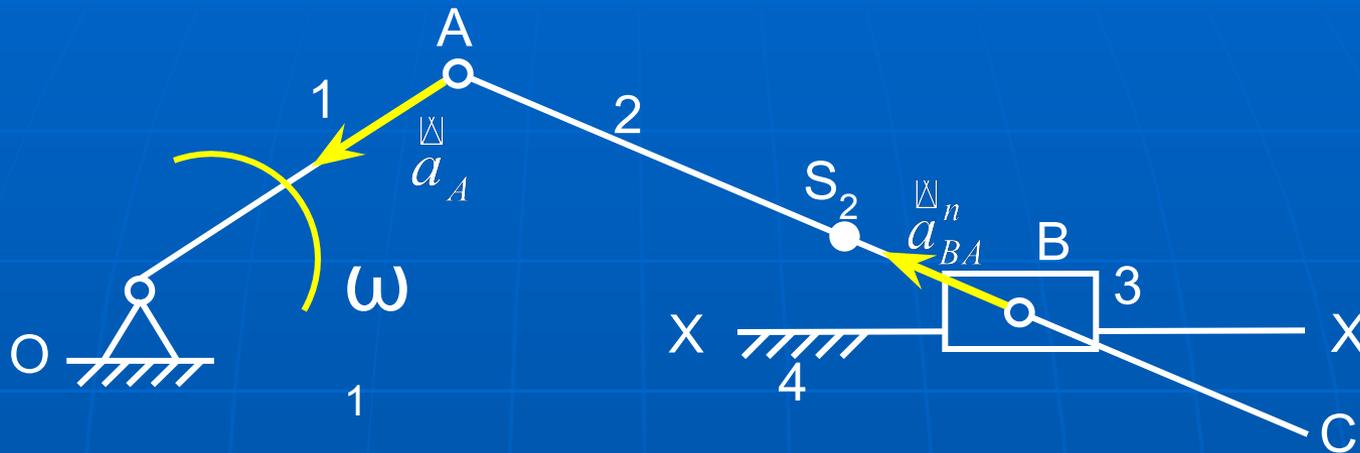
$$a_{BA}^\tau = nb \cdot \mu_a = 44 \cdot 0,3 = 13,2 \text{ м/с}^2$$

$$a_{BA} = ab \cdot \mu_a = 45 \cdot 0,3 = 13,5 \text{ м/с}^2$$

3. Определение ускорения точки S_2

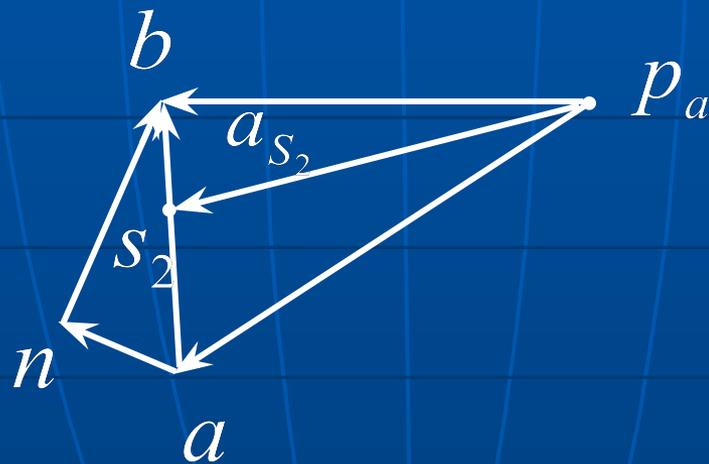
Воспользуемся следствием из теоремы подобия. Составим пропорцию:

$$\frac{AB}{AS_2} = \frac{ab}{as_2} \quad as_2 = \frac{ab \cdot AS_2}{AB} = \frac{45 \cdot 51}{76} = 30,2 \text{ мм}$$



План ускорений

$$\mu_a = 0,3 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$$



Величины ускорений

$$a_B \in p_a b \cdot \mu_a = 29 \cdot 0,3 = 8,7 \quad / \quad ^2$$

$$a_{BA}^{\tau} \in nb \cdot \mu_a = 44 \cdot 0,3 = 13,2 \quad / \quad ^2$$

$$a_{BA} \in ab \cdot \mu_a = 45 \cdot 0,3 = 13,5 \quad / \quad ^2$$

3. Определение ускорения точки S_2

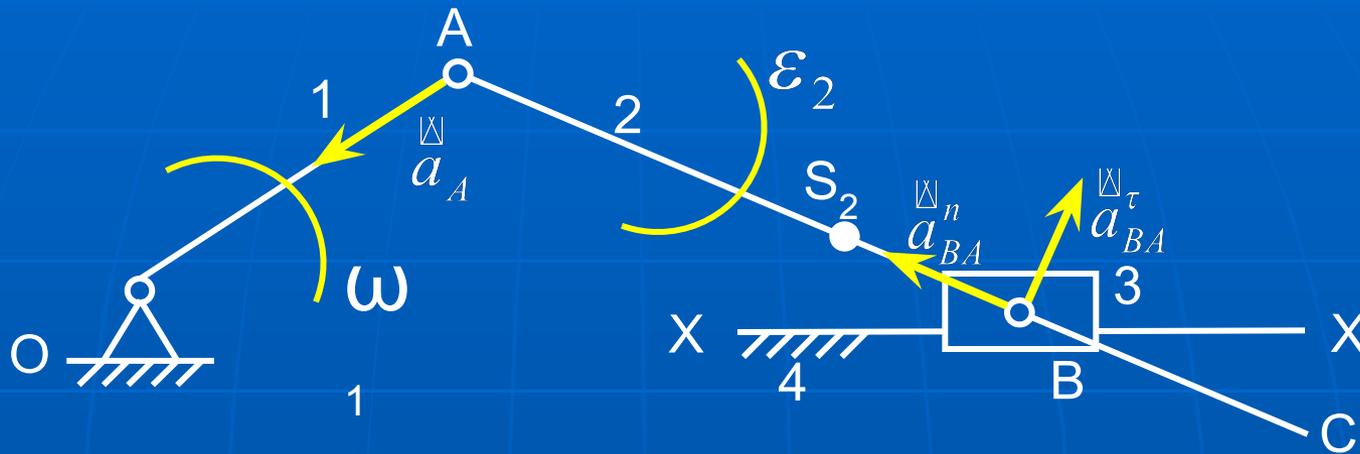
Воспользуемся следствием из теоремы подобия. Составим пропорцию:

$$\frac{AB}{AS_2} = \frac{ab}{as_2} \quad a_{s_2} = \frac{ab \cdot AS_2}{AB} = \frac{45 \cdot 51}{76} = 30,2$$

$$a_{S_2} = p_{a S_2} \cdot \mu_a = 35 \cdot 0,3 = 10,5 \text{ м / с}^2$$

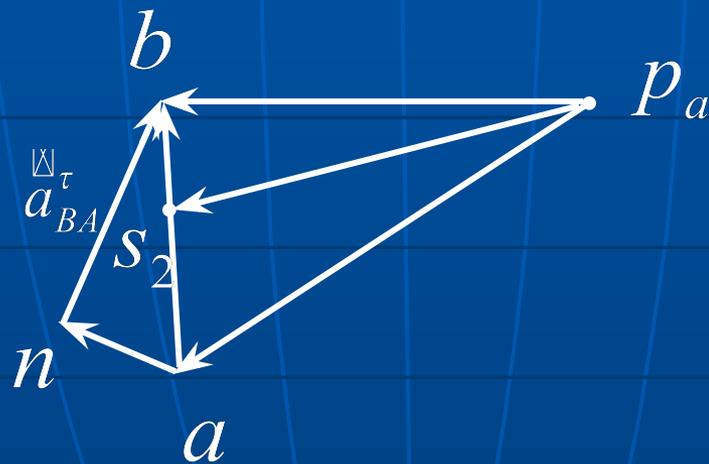
4. Определение углового ускорения шатуна АВ

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^{\tau}}{AB} = \frac{13,2}{0,076} = 173,6 \text{ с}^{-2}$$



План ускорений

$$\mu_a = 0,3 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$$



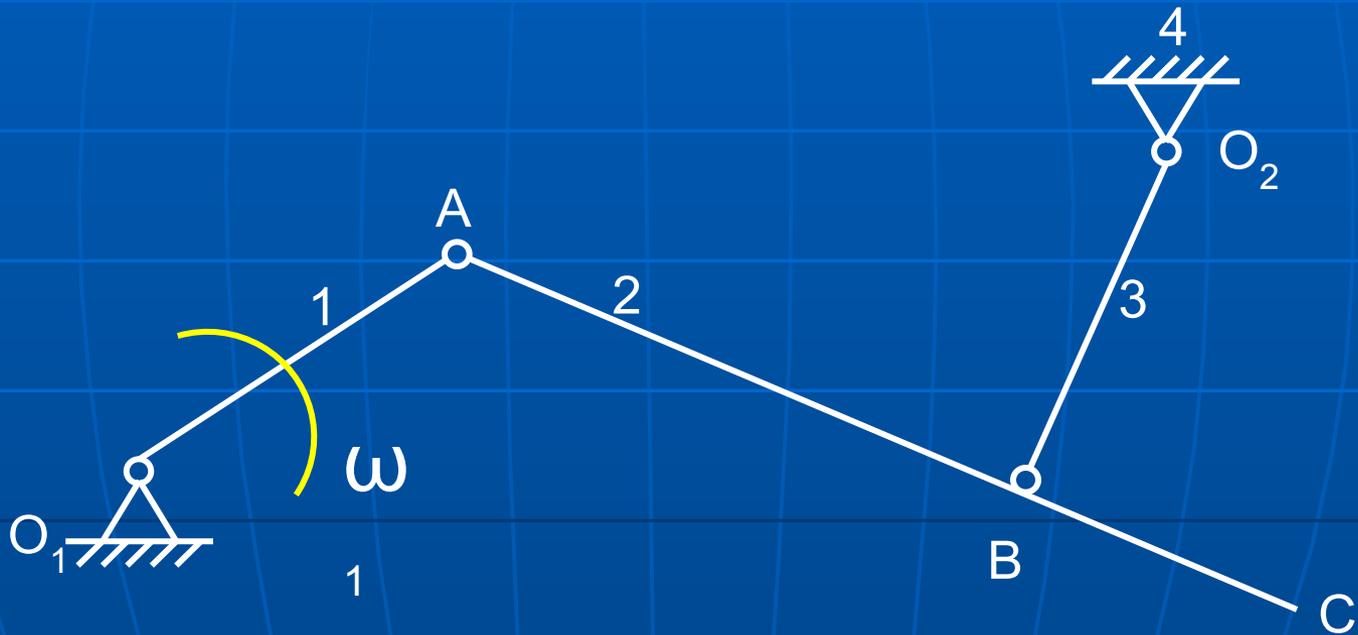
Ускорение	Отрезок	Направление	Длина отрезка, мм	Масштаб	Значение, м/с ²
a_A	$p_a a$	$\vec{a}_A // AO$	60	$0,3 \frac{м/с^2}{мм}$	18
a_B	$p_a b$	$\vec{a}_B // X-X$	29		8,7
a_{BA}^n	an	$\vec{a}_{BA}^n // AB$	11		3,31
a_{BA}^τ	nb	$\vec{a}_{BA}^\tau \perp AB$	44		13,2
a_{BA}	ab		45		13,5
a_{S_2}	$p_a S_2$		35		10,5
ε_2	Против часовой стрелки				173,6 с⁻²

Пример № 3.4

Дано: $\omega_1 = 30 \text{ с}^{-1}$; $O_1A = 20 \text{ мм}$; $AB = 50 \text{ мм}$; $BO_2 = 30 \text{ мм}$; $BC_2 = 25 \text{ мм}$.

Определить:

- численные значения и направления ускорений точек A, B, C
- угловые ускорения звеньев AB и O_2B



Решение

1. Определение ускорения точки А.

$$a_A = \omega_1^2 \cdot O_1A = 30^2 \cdot 0,02 = 18 \text{ м/с}^2.$$

Выбираем масштаб плана ускорений $\mu_a = 0,3 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$

Найдём отрезок, изображающий вектор ускорения $\overset{\boxtimes}{a}_A$ на плане:

$$p_a a = \frac{a_A}{\mu_a} = \frac{18}{0,3} = 60 \text{ мм}$$

2. Определение ускорения точки В.

$$\overset{\boxtimes}{a}_B = \overset{\boxtimes}{a}_A + \overset{\boxtimes}{a}_{BA}$$

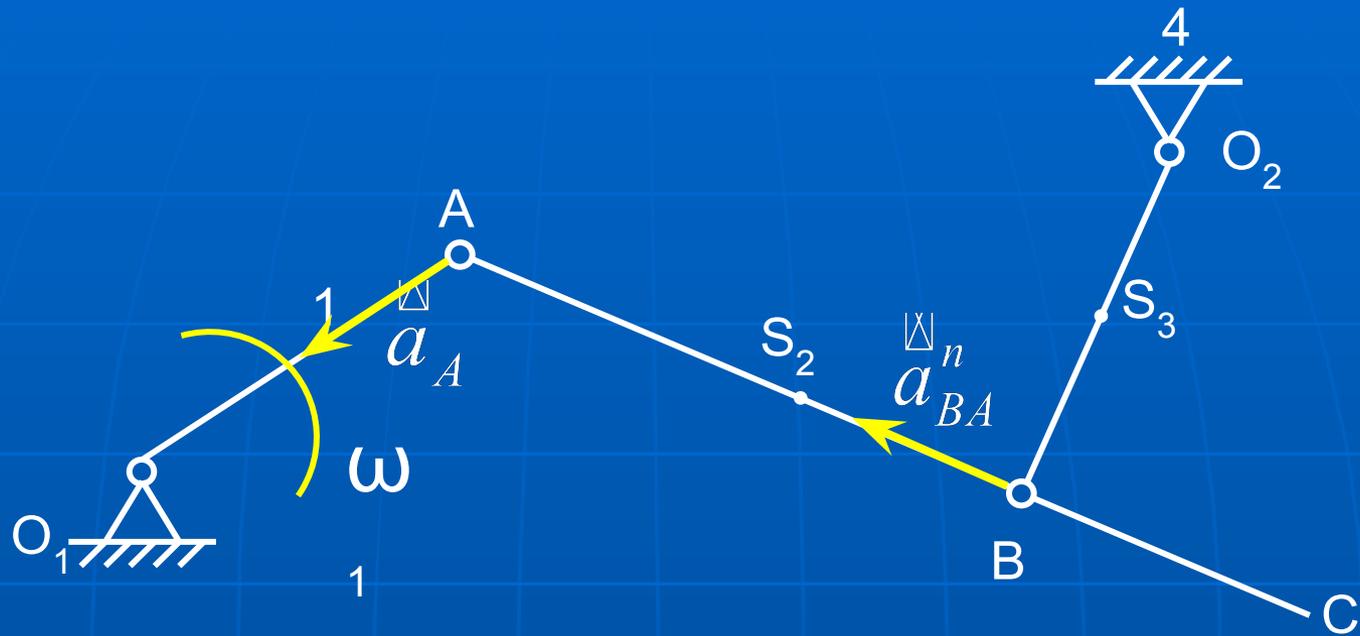
Относительное ускорение $\overset{\boxtimes}{a}_{BA} = \overset{\boxtimes}{a}_{BA}^n + \overset{\boxtimes}{a}_{BA}^\tau$

Нормальное ускорение $\overset{\boxtimes}{a}_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot AB = 3,2^2 \cdot 0,05 = 0,51 \text{ м/с}^2$

Найдём отрезок, изображающий вектор ускорения $\overset{\boxtimes}{a}_{BA}^n$ на плане:

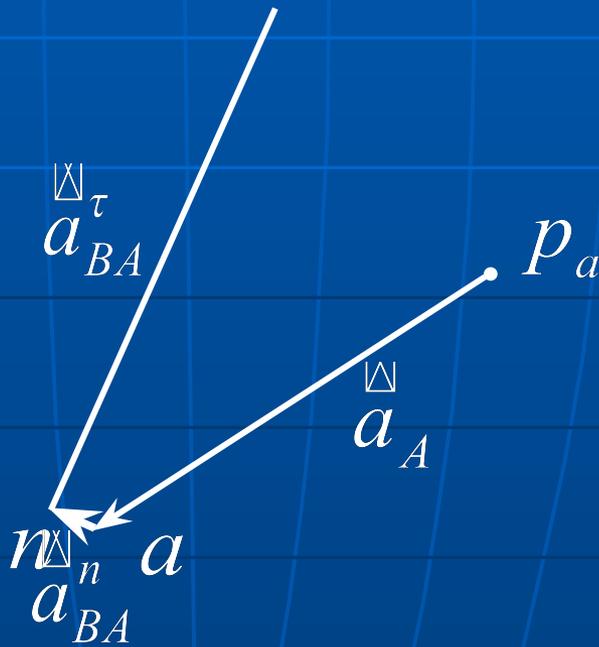
$$a_n = \frac{\overset{\boxtimes}{a}_{BA}^n}{\mu_a} = \frac{0,51}{0,3} = 1,7 \text{ мм}$$

Направления ускорений $\overset{\boxtimes}{a}_A \parallel OA$ $\overset{\boxtimes}{a}_{BA}^n \parallel AB$ $\overset{\boxtimes}{a}_{BA}^\tau \perp AB$



План ускорений

$$\mu_a = 0,3 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$$



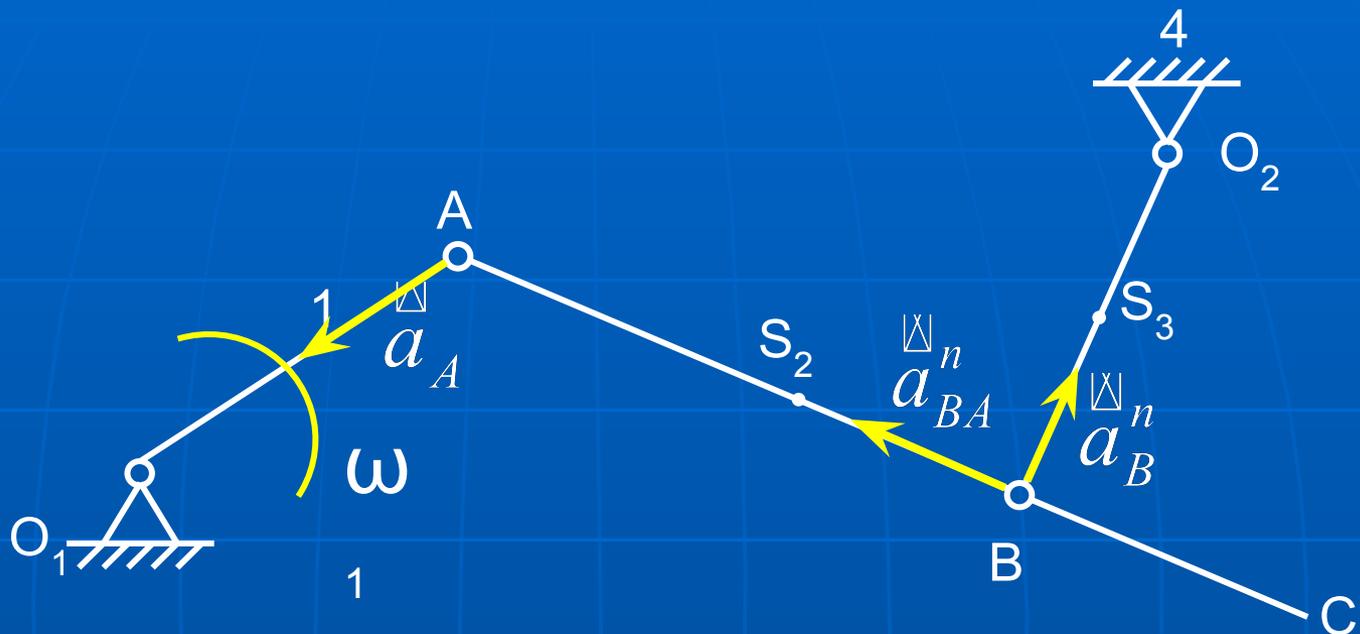
Ускорение точки В $\vec{a}_B = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau$

Нормальное ускорение $\vec{a}_B^n = \omega_3^2 \cdot BO_2 = 18,3^2 \cdot 0,03 = 10 \text{ м/с}^2$

Найдём отрезок, изображающий вектор ускорения \vec{a}_B^n на плане:

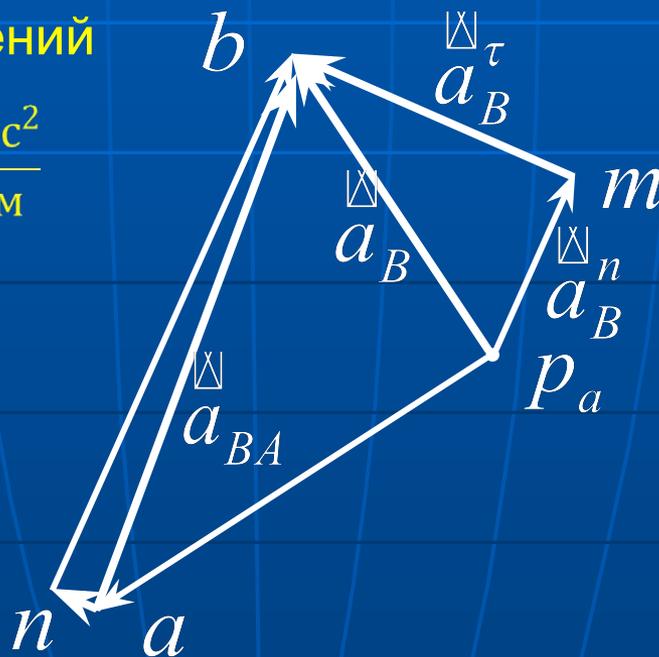
$$\rho_a \text{ м} = \frac{a_B^n}{\mu_a} = \frac{10}{0,3} = 33,3 \text{ мм}$$

Направления ускорений $\vec{a}_B^n // BO_2$ $\vec{a}_B^\tau \perp BO_2$



План ускорений

$$\mu_a = 0,3 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$$



Ускорение точки В $\vec{a}_B = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau$

Нормальное ускорение $\vec{a}_B^n = \omega_3^2 \cdot BO_2 = 18,3^2 \cdot 0,03 = 10 \text{ м/с}^2$

Найдём отрезок, изображающий вектор ускорения \vec{a}_B^n на плане:

$$p_a m = \frac{\vec{a}_B^n}{\mu_a} = \frac{10}{0,3} = 33,3 \text{ мм}$$

Направления ускорений $\vec{a}_B^n // BO_2$ $\vec{a}_B^\tau \perp BO_2$

Величины ускорений

$$a_B = p_a b \cdot \mu_a = 45 \cdot 0,3 = 13,5 \text{ м/с}^2$$

$$a_{BA}^\tau = nb \cdot \mu_a = 90 \cdot 0,3 = 27 \text{ м/с}^2$$

$$a_{BA} = ab \cdot \mu_a = 91 \cdot 0,3 = 27,3 \text{ м/с}^2$$

$$a_B^\tau = mb \cdot \mu_a = 30 \cdot 0,3 = 9 \text{ м/с}^2$$

3. Определение ускорения точки S_2

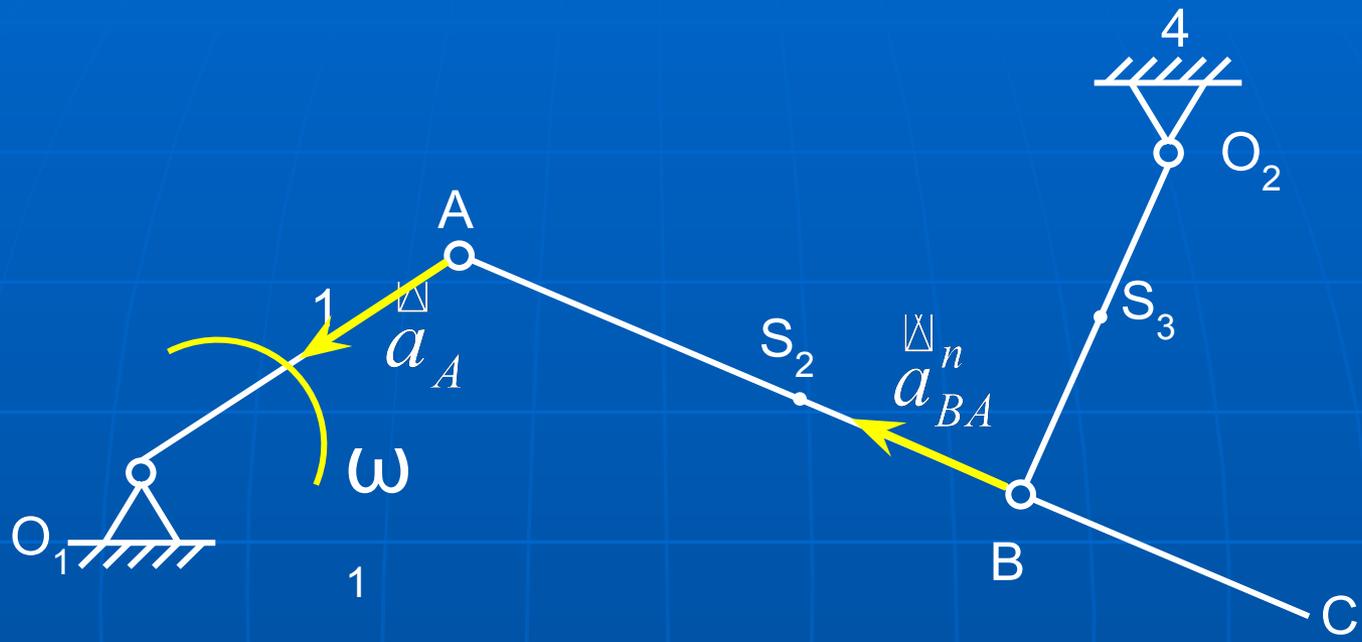
$$\frac{AB}{AS_2} = \frac{ab}{as_2} \quad as_2 = \frac{ab \cdot AS_2}{AB} = \frac{91 \cdot 37,5}{50} = 68,3 \text{ мм}$$

$$a_{S_2} = p_a s_2 \cdot \mu_a = 28 \cdot 0,3 = 8,4 \text{ м/с}^2$$

4. Определение ускорения точки S_3

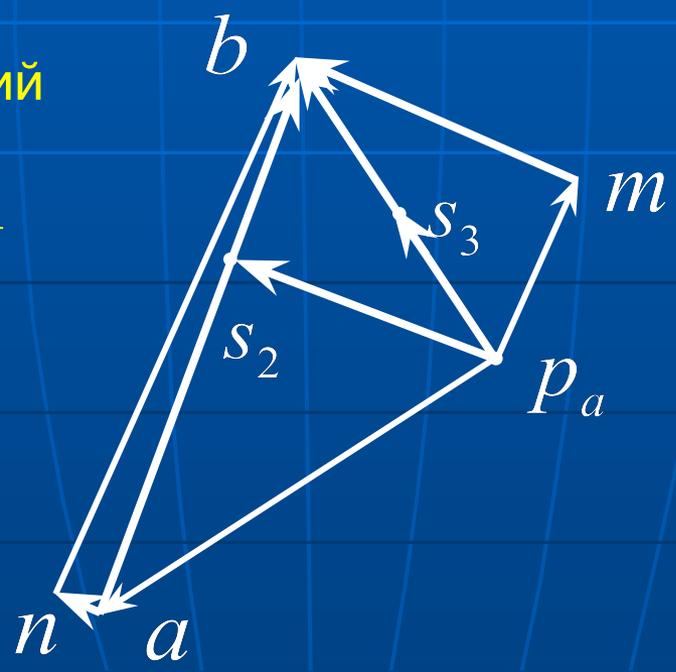
$$\frac{BS_3}{BO_2} = \frac{bs_3}{p_a b} \quad bs_3 = \frac{p_a b \cdot BS_3}{BO_2} = \frac{45 \cdot 15}{30} = 22,5 \text{ мм}$$

$$a_{S_3} = p_a s_3 \cdot \mu_a = 22,5 \cdot 0,3 = 6,75 \text{ м/с}^2$$



План ускорений

$$\mu_a = 0,3 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$$



3. Определение ускорения точки S_2

$$\frac{AB}{AS_2} = \frac{ab}{as_2} \quad as_2 = \frac{ab \cdot AS_2}{AB} = \frac{91 \cdot 37,5}{50} = 68,3 \text{ мм}$$

$$a_{S_2} = p_{as_2} \cdot \mu_a = 28 \cdot 0,3 = 8,4 \text{ м/с}^2$$

4. Определение ускорения точки S_3

$$\frac{BS_3}{BO_2} = \frac{bs_3}{p_a b} \quad bs_3 = \frac{p_a b \cdot BS_3}{BO_2} = \frac{45 \cdot 15}{30} = 22,5 \text{ мм}$$

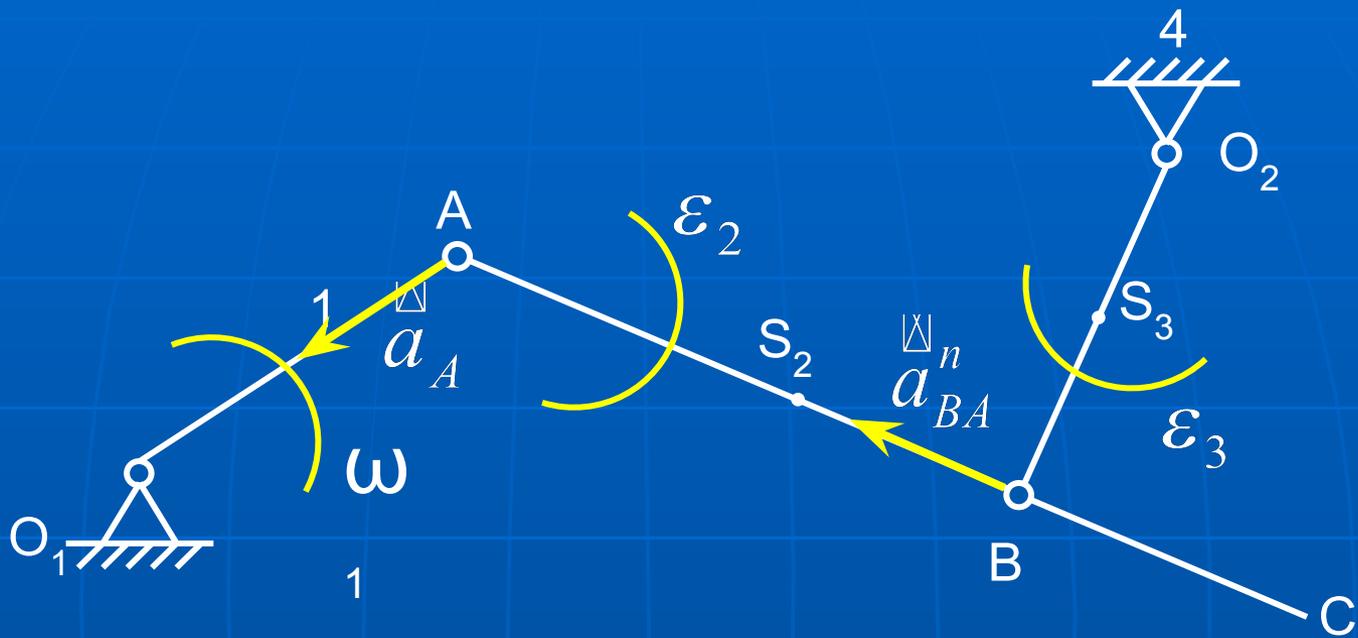
$$a_{S_3} = p_{as_3} \cdot \mu_a = 22,5 \cdot 0,3 = 6,75 \text{ м/с}^2$$

5. Определение углового ускорения шатуна АВ

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{27}{0,05} = 540 \text{ с}^{-2}$$

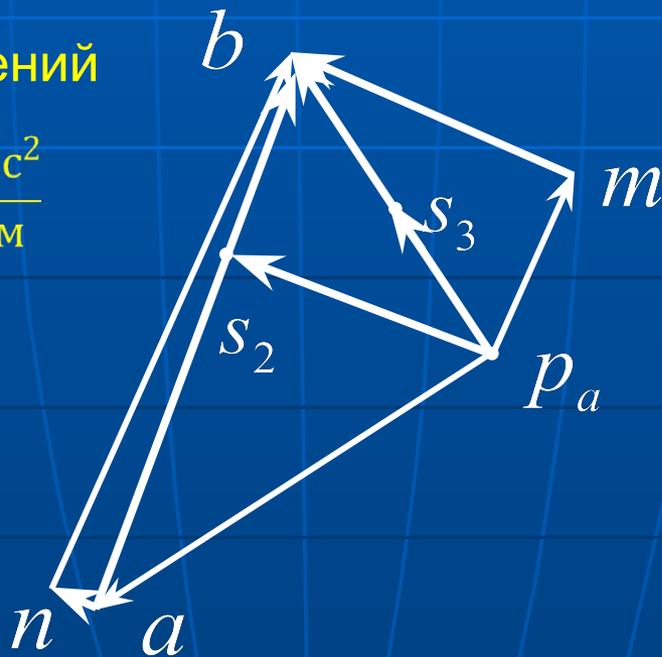
6. Определение углового ускорения коромысла BO_2

$$\varepsilon_3 = \frac{a_B^\tau}{BO_2} = \frac{9}{0,03} = 300 \text{ с}^{-2}$$



План ускорений

$$\mu_a = 0,3 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$$



Ускорение	Отрезок	Направление	Длина отрезка, мм	Масштаб	Значение, м/с ²
a_A	$p_a a$	$\sphericalangle a_A // AO$	60	$\mu_A = 0,3 \frac{м/с^2}{мм}$	18
a_B	$p_a b$	$\sphericalangle a_B // X - X$	45		13,5
a_B^n	$p_a m$	$\sphericalangle a_B^n // BO_2$	33,3		10
a_B^τ	mb	$\sphericalangle a_B^\tau \perp BO_2$	30		9
a_{BA}^n	an	$\sphericalangle a_{BA}^n // AB$	1,7		0,51
a_{BA}^τ	nb	$\sphericalangle a_{BA}^\tau \perp AB$	90		27
a_{BA}	ab		91		27,3
a_{S_2}	$p_a S_2$		28		8,4
a_{S_3}	$p_a S_3$		22,5		6,75
ε_2	Против часовой стрелки				540 с ⁻²
ε_3	По часовой стрелке				300 с ⁻²

Лекция окончена

Спасибо за внимание!