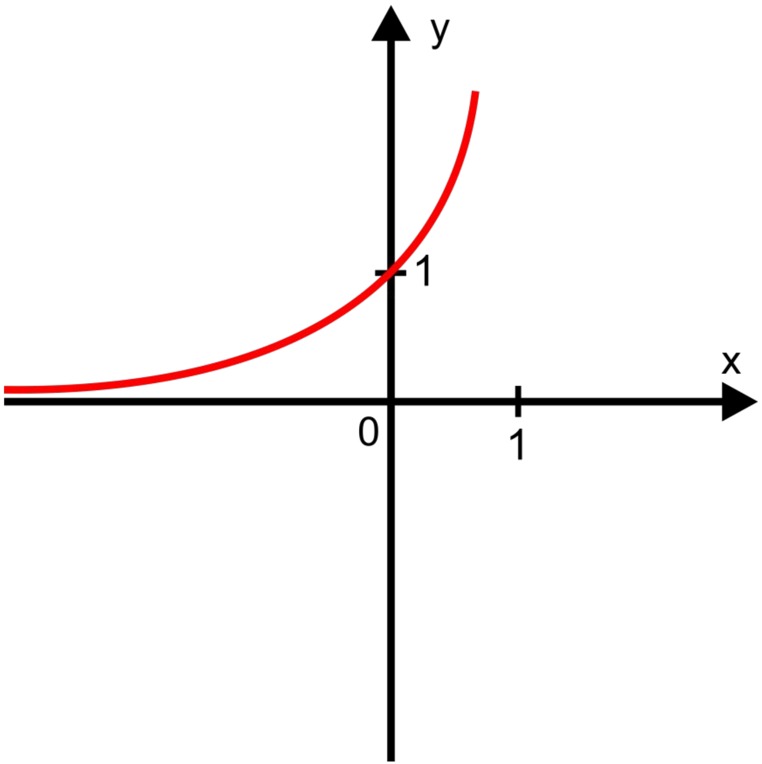
Функция $y = f(x)$ называется монотонной на множестве X, если она на этом множестве или убывает или возрастает.

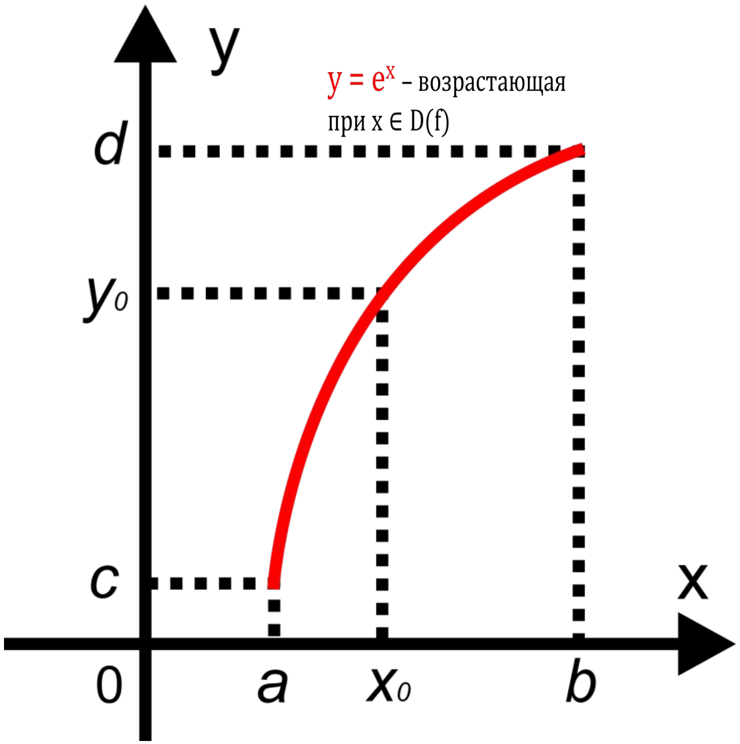
$y = e^x$ – возрастающая при $x \in D(f)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ монотонная;



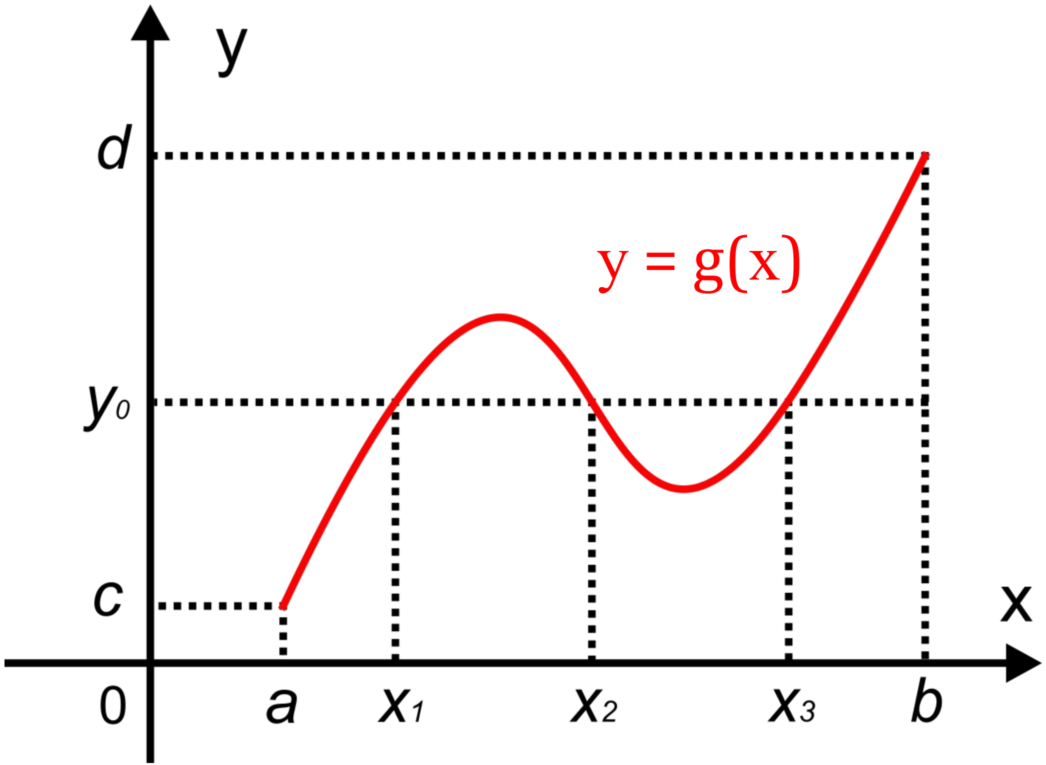
Если функция $y = f(x)$, $x \in X$ принимает любое свое значение только в одной точке множества X, то функцию называют обратимой.

x_0: $y_0=f(x_0)$;



$y = g(x)$ – необратима;

$y_0 = g(x_1)$;
$y_0 = g(x_2)$;
$y_0 = g(x_3)$;



Теорема.

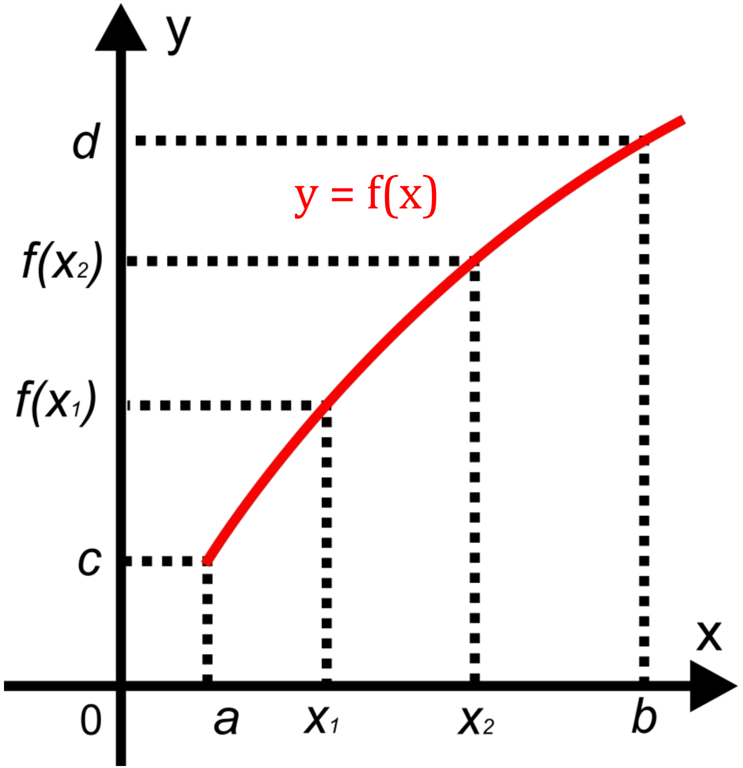
Если функция $y = f(x)$, $x \in X$ монотонна на множестве X, то она обратима.

Доказательство.

$y = f(x)$ – возрастает;

$x_1 \neq x_2$; $y = e^x$ – возрастающая при $x \in D(f)$

$x_1 < x_2$; $f(x_1) < f(x_2)$;



$y = f(x)$ – обратимая функция;

определена на множестве X;

$E(f) =$
Y;

$x = f^{-1}(y)$ – обратная функция;

определена на множестве Y;

$E(f) = X$;

Свойства прямой и обратной функций:

1. Область определения функции $y = f(x)$:
   X является областью значений функции $x = f^{-1}(y)$.

2. Область значения функции $y = f(x)$:
   Y является областью определения функции $x = f^{-1}(y)$.

3. Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на множестве X,
   то функция $x = f^{-1}(y)$ возрастает (убывает) на множестве У,
   где У – область значений функции $y = f(x)$.

$y = f(x)$ – возрастающая функция;

$y = e^x$ – возрастающая
при $x \in D(f)$

$y_1 = f(x_1)$; $y_2 = f(x_2)$; $x_1 < x_2$ – единственные;

$x_1 \geq x_2$; $\Rightarrow$ $f(x_1) \geq f(x_2)$;

$y = f(x)$– возрастающая; $\Rightarrow$ $y_1 \geq y_2$;

$y_1 < y_2$;
$x_1 < x_2$; $x = f^{-1}(y)$ возрастает на У;

Пример 1. Показать, что для функции $y = 3x - 2$ существует обратная функция, и найти ее аналитическое выражение.

Решение.

Линейная функция $y = 3x - 2$, $E(f) = R$;

$x_2 > x_1 \Rightarrow 3x_2 > 3x_1 \Rightarrow 3x_2 - 2 > 3x_1 - 2 \Rightarrow y_2 > y_1$

$y = 3x - 2$ – возрастающая;

y_0: $3x - 2 = y_0 \Rightarrow x_0 =$ $y = e^x$ - возрастающая при $x \in D(f)$

y_0 и x_0 – единственная пара;

$y = 3x - 2$ – обратима;

$y = e^x$ – возрастающая
при $x \in D(f)$

$y = e^x$ – возрастающая при $x \in D(f)$

Решение.

$y = x^2$— квадратичная функция;

$D(y) = R$;

убывает на $(-\infty;0]$;

возрастает на $[0;\infty)$;

на промежутке $[0;\infty)$ – монотонна;

$x^2 = y$;

$y = e^x$ - возрастающая при $x \in D(f)$

$y = e^x$ - возрастающая при $x \in D(f)$

$y = e^x$ – возрастающая при $x \in D(f)$

$y = e^x$ – возрастающая при $x \in D(f)$

Пример 3. Найти обратную функцию к функции $y = x^3$.

Решение.

$D(y) = R$;

$y = e^x$ – возрастающая
при $x \in D(f)$

$y = e^x$ – возрастающая
при $x \in D(f)$

$y = e^x$ – возрастающая
при $x \in D(f)$

Замечание:

монотонность функции, является достаточным условием существования обратной функции.

Но оно не является необходимым условием.

Алгоритм нахождения обратной функции:

1. Убедиться, что функция монотонна.

2. Выразить переменную x через y.

3. Переобозначить переменные.

$\boxed{\text{Вместо } x=f^{-1}(y) \text{ пишут } y=f^{-1}(x);}$