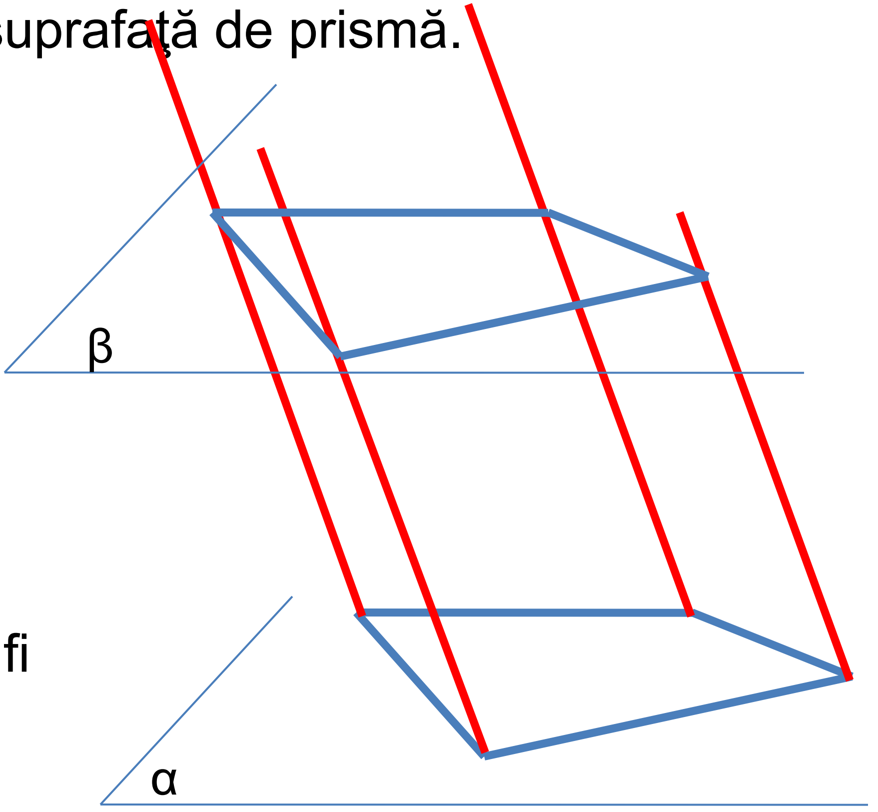
PRISMA

- [Definiţii, notaţii]
- [Prisme particulare]
- [Realizarea desenelor]
- [Formule de calcul]
- [Probleme]

Fie un poligon oarecare (poligon director) în planul α.

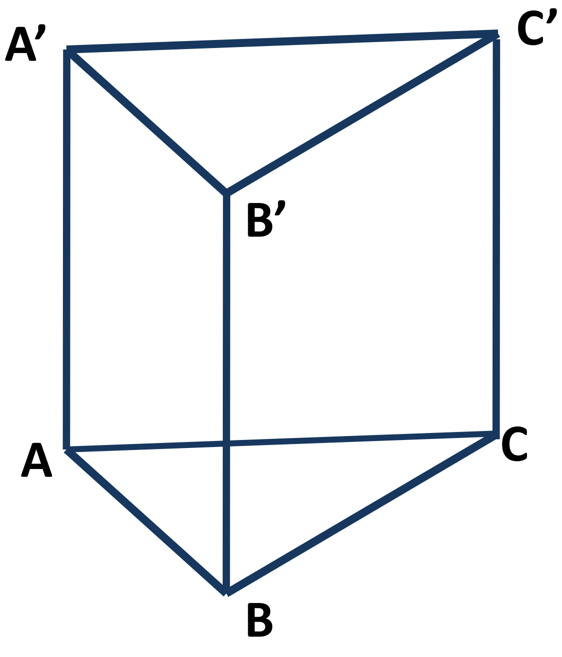
Dacă o dreaptă *d* (dreaptă directoare, generatoare) se deplasează paralelă cu ea însăşi pe toate laturile poligonului director, obţinem o suprafaţă de prismă.



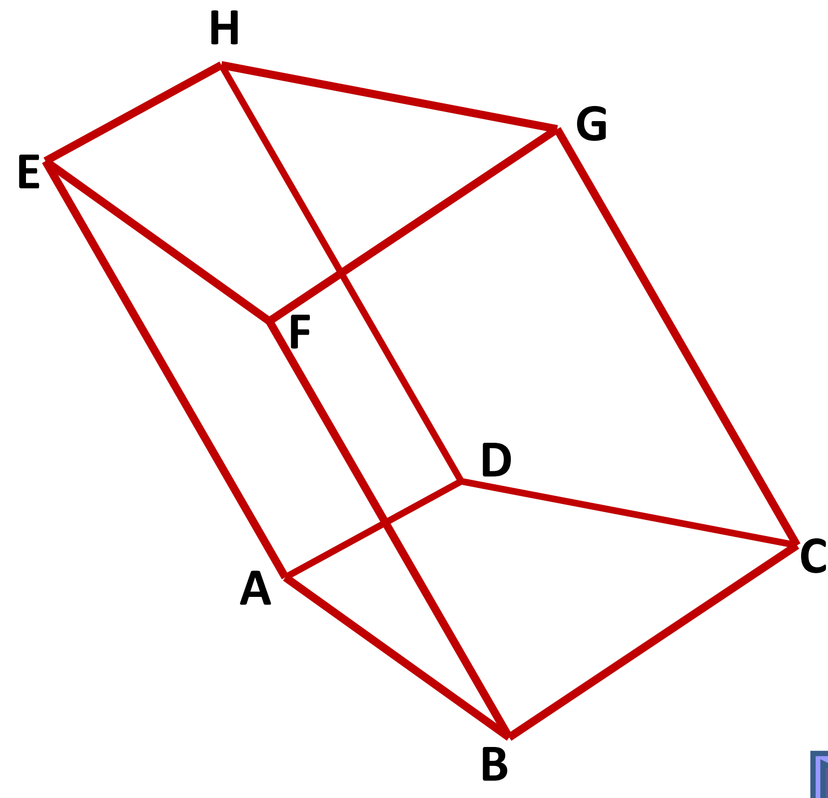
Dacă această suprafaţă se secţionează cu un plan β, paralel cu planul α, atunci se obţine o **prismă**.

În funcţie de numărul laturilor poligonului director, prisma poate fi de trei, patru, …, n laturi.

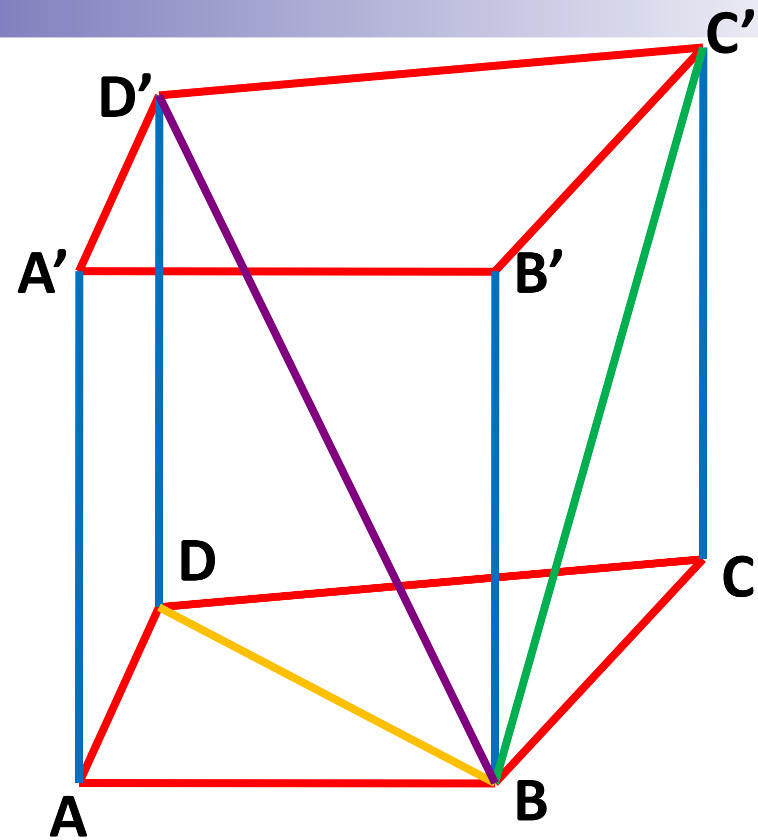
Dacă dreapta directoare este perpendiculară pe planul poligonului director, atunci vorbim despre o **prismă dreaptă**.



În caz contrar, despre prismă oblică.



Elementele prismei



Vârfuri

Baze

Muchii ale bazelor

Feţe laterale

Muchii laterale

Diagonale
- ale feţelor
- ale bazelor
- ale prismei

Dacă numărul laturilor bazei ≥ 3

Înălţimea prismei: distanţa dintre bazele prismei, în cazul prismei drepte coincide cu lungimea muchiei laterale.

Prisme regulate

Dacă baza prismei este un poligon regulat (triunghi echilateral, pătrat, hexagon regulat, etc) atunci prisma se numeşte **prismă regulată.**

- Feţele laterale ale prismei regulate sunt dreptunghiuri congruente.

! !Dacă baza prismei drepte este un dreptunghi, atunci prisma NU este regulată! !

- Dacă toate feţele prismei sunt paralelograme, atunci se numeşte **paralelipiped**.
- Dacă toate feţele sunt dreptunghiuri, atunci este un **paralelipiped dreptunghic**.
- paralelipiped dreptunghic = paralelipiped drept

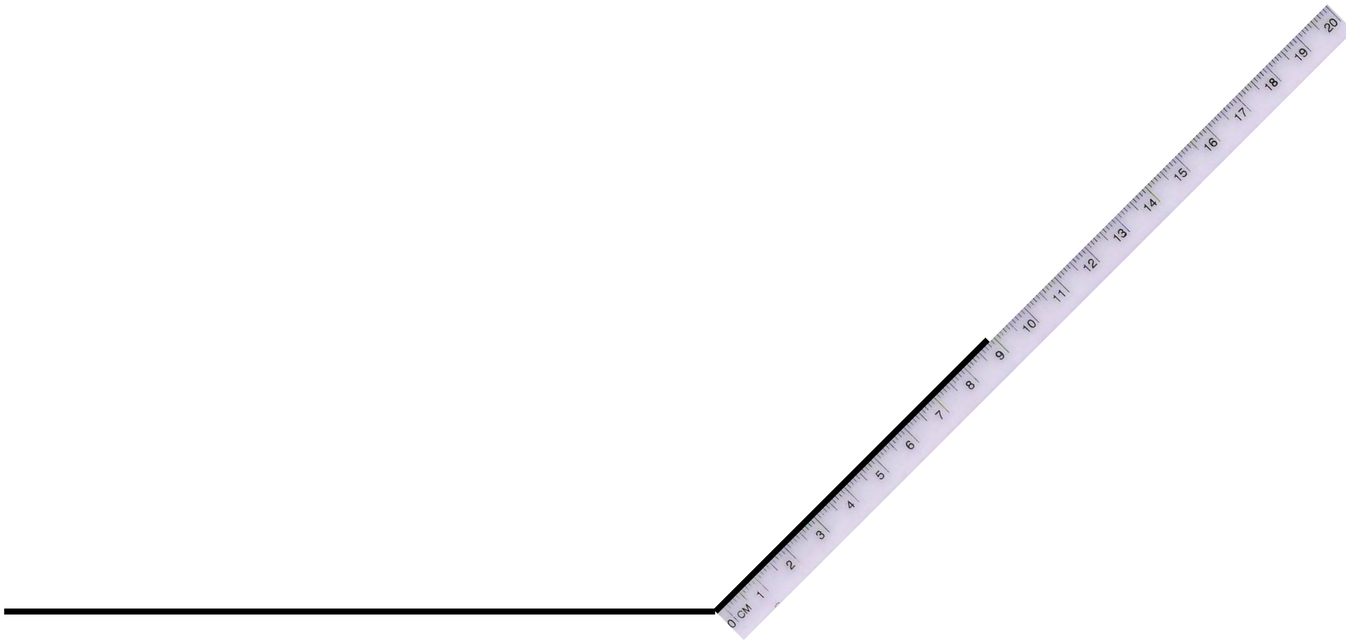
Dacă toate muchiile prismei sunt congruente (toate feţele pătrate), atunci vorbim despre un **cub**.

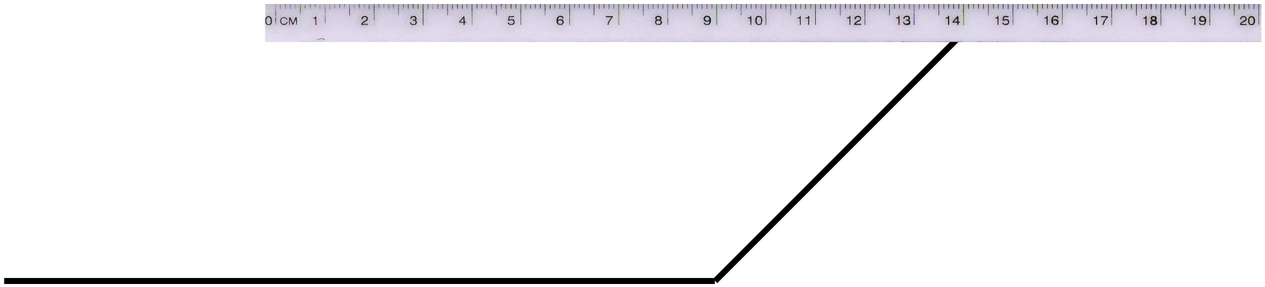
Realizarea desenelor

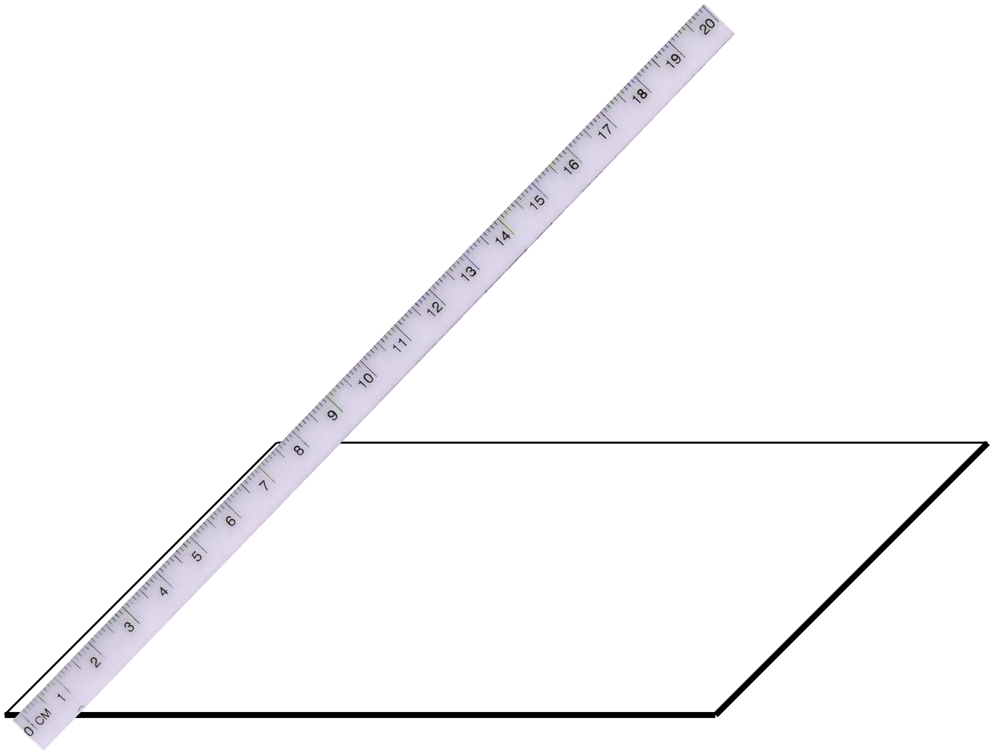
- Paralelipiped dreptunghic
- Cub
- Prismă triunghiulară (regulată) dreaptă
- Prismă hexagonală regulată dreaptă

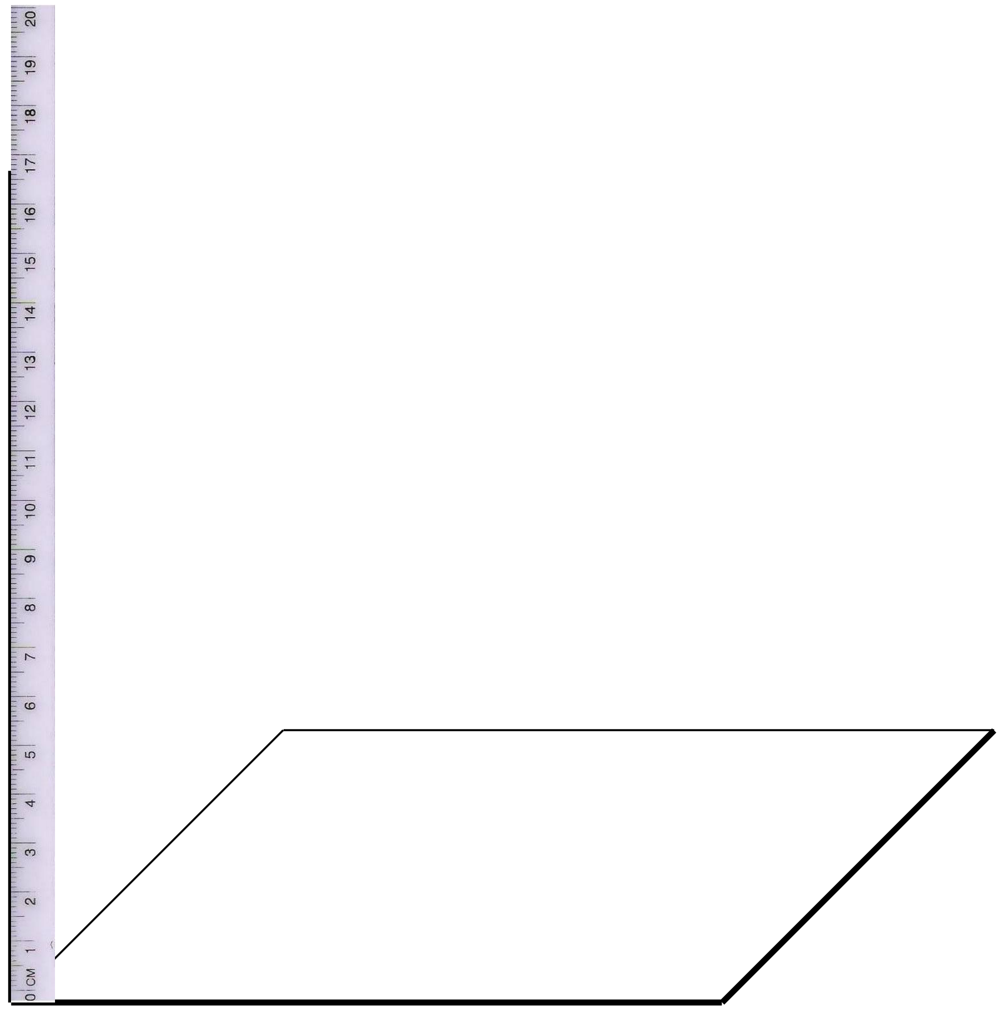
Prisme patrulatere

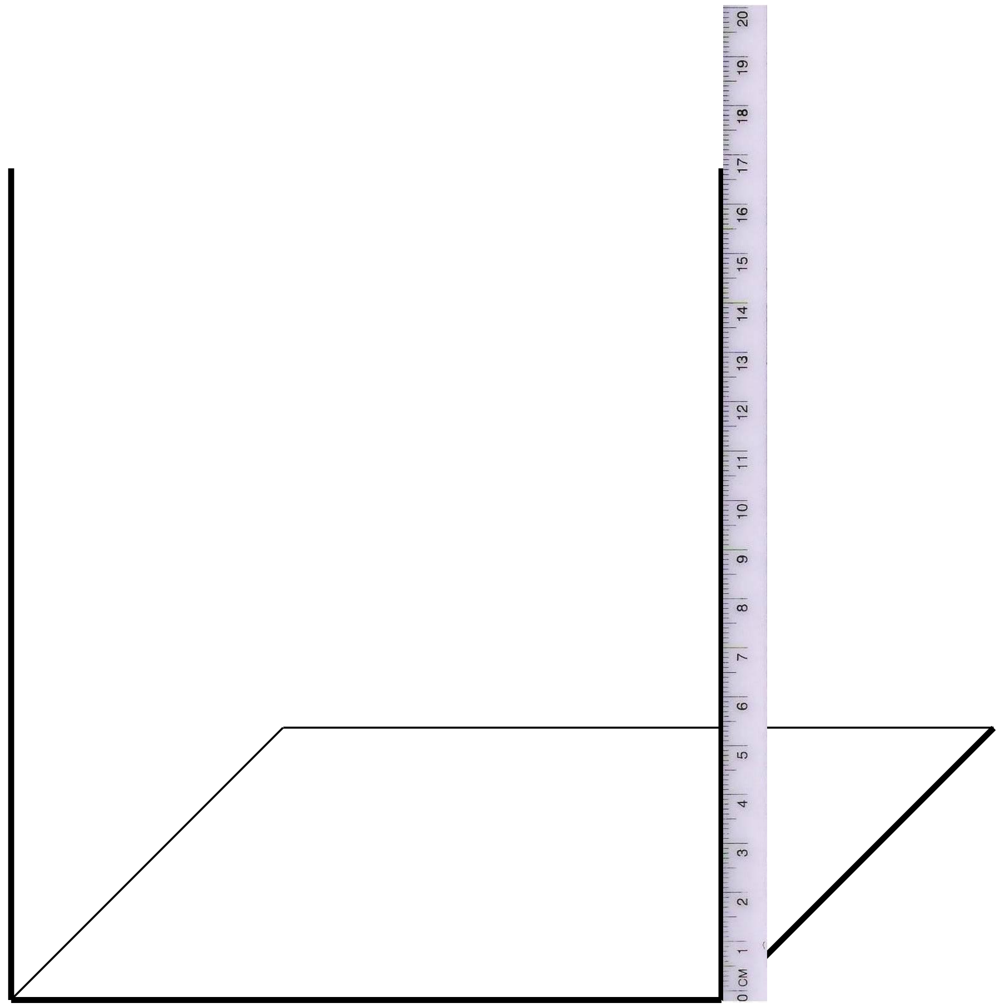
- Paralelipiped dreptunghic
- Cub

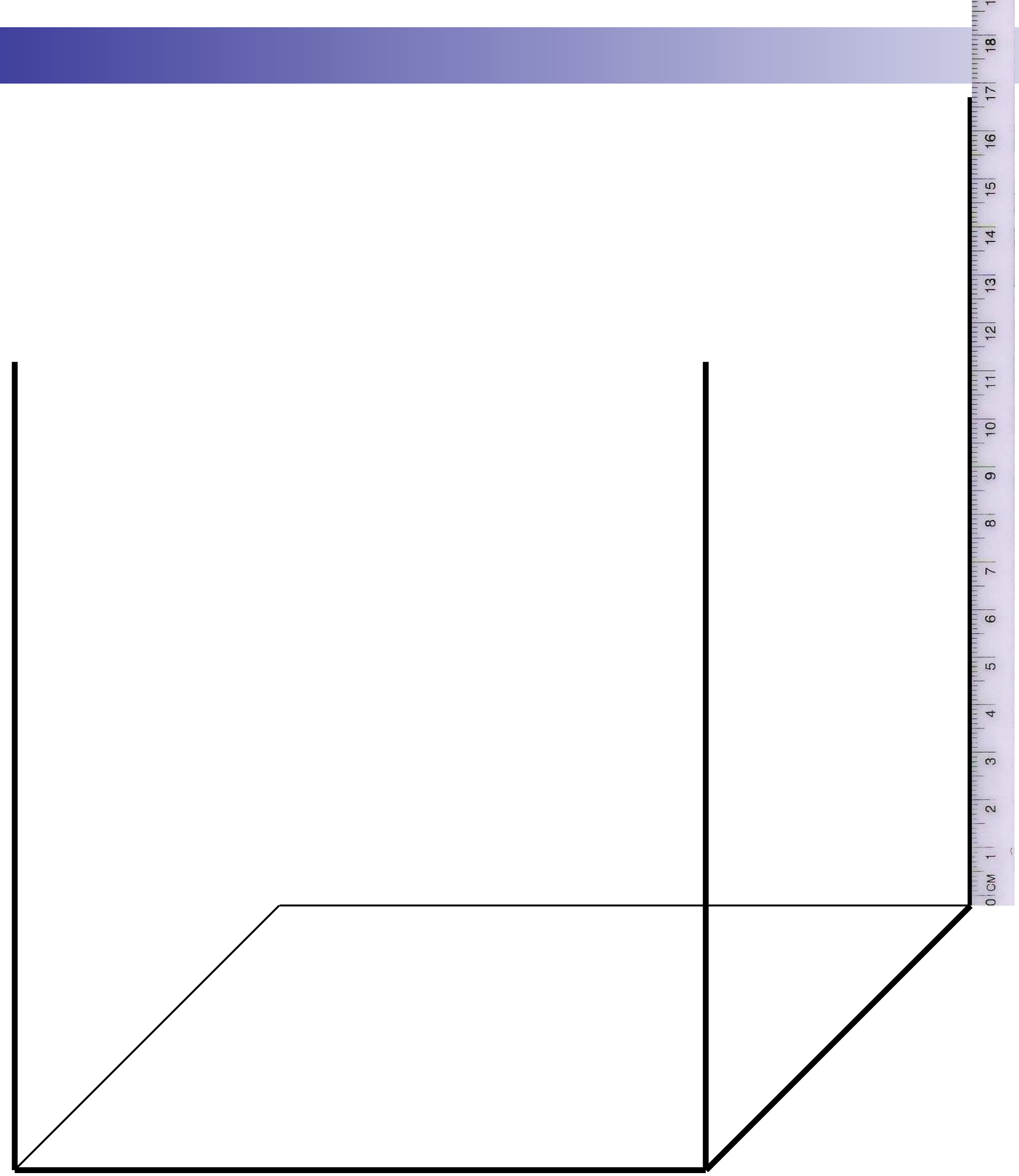

0 CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

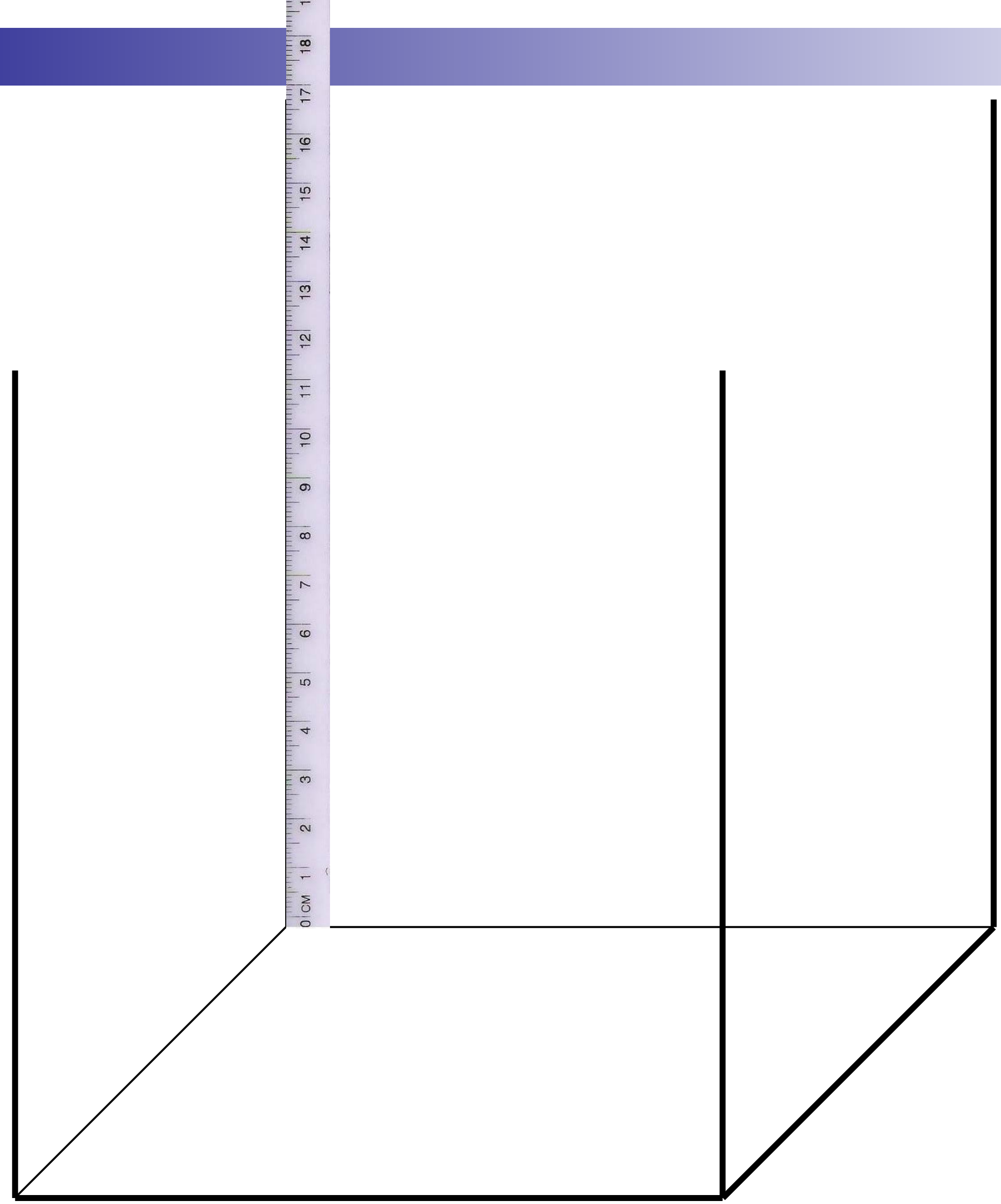

0 CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

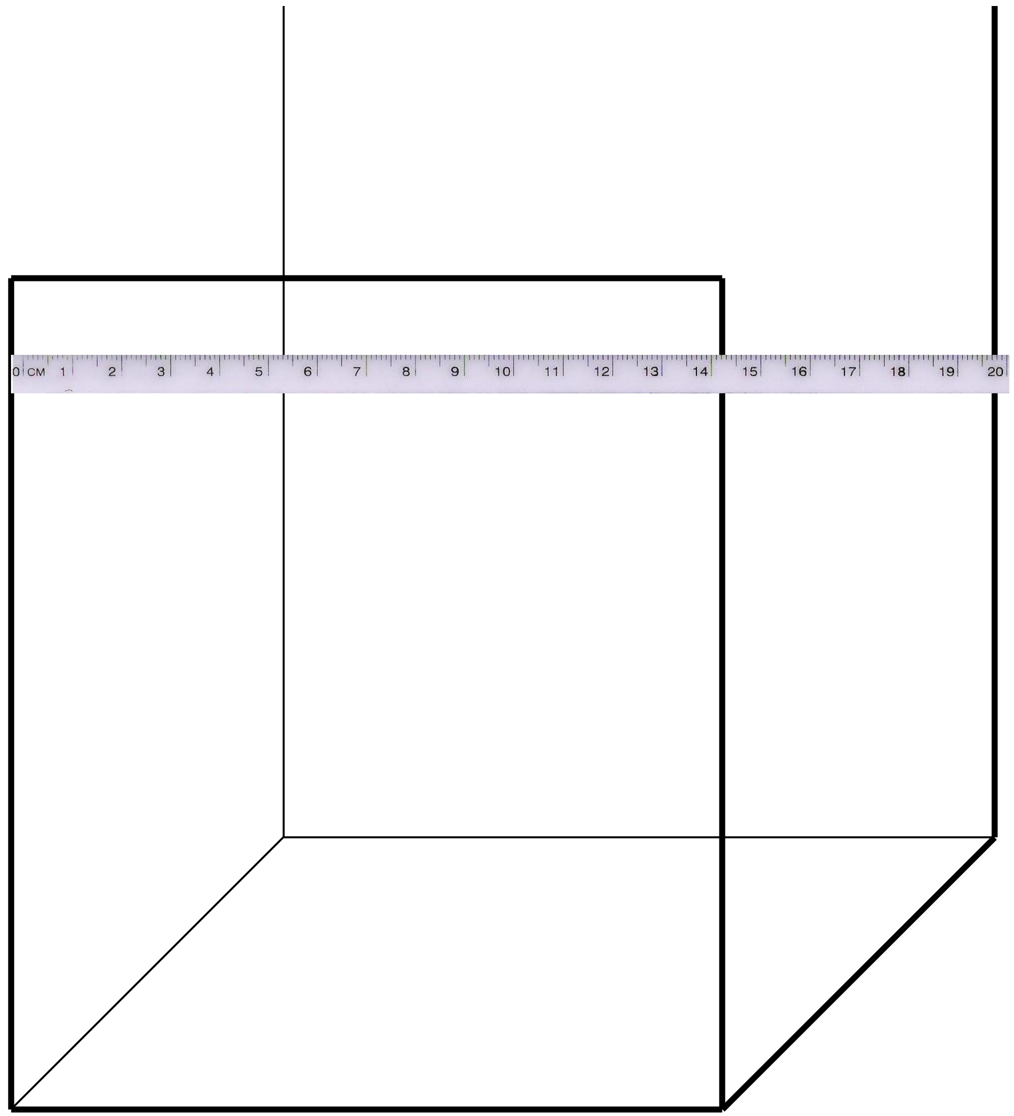


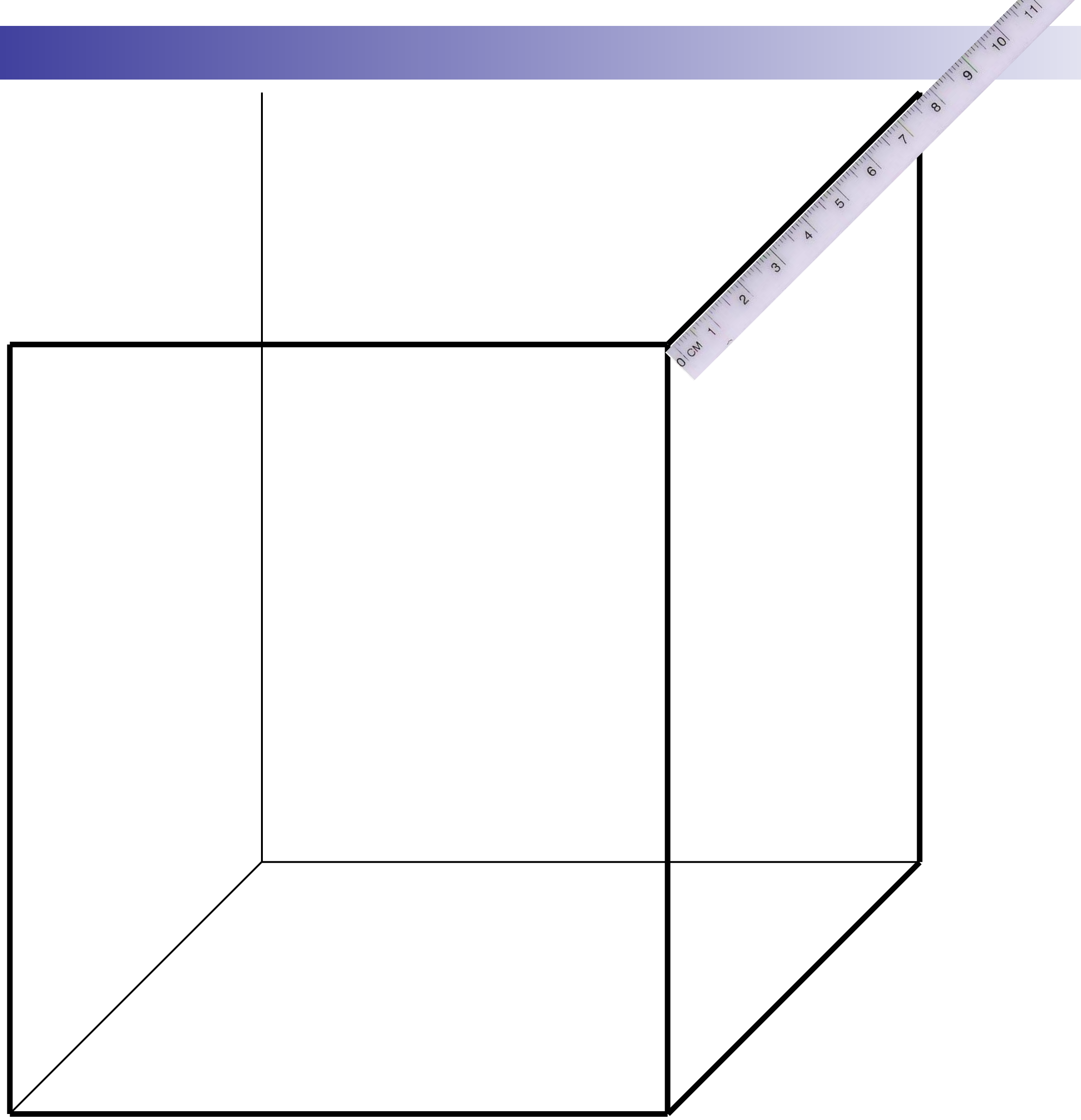

0 CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

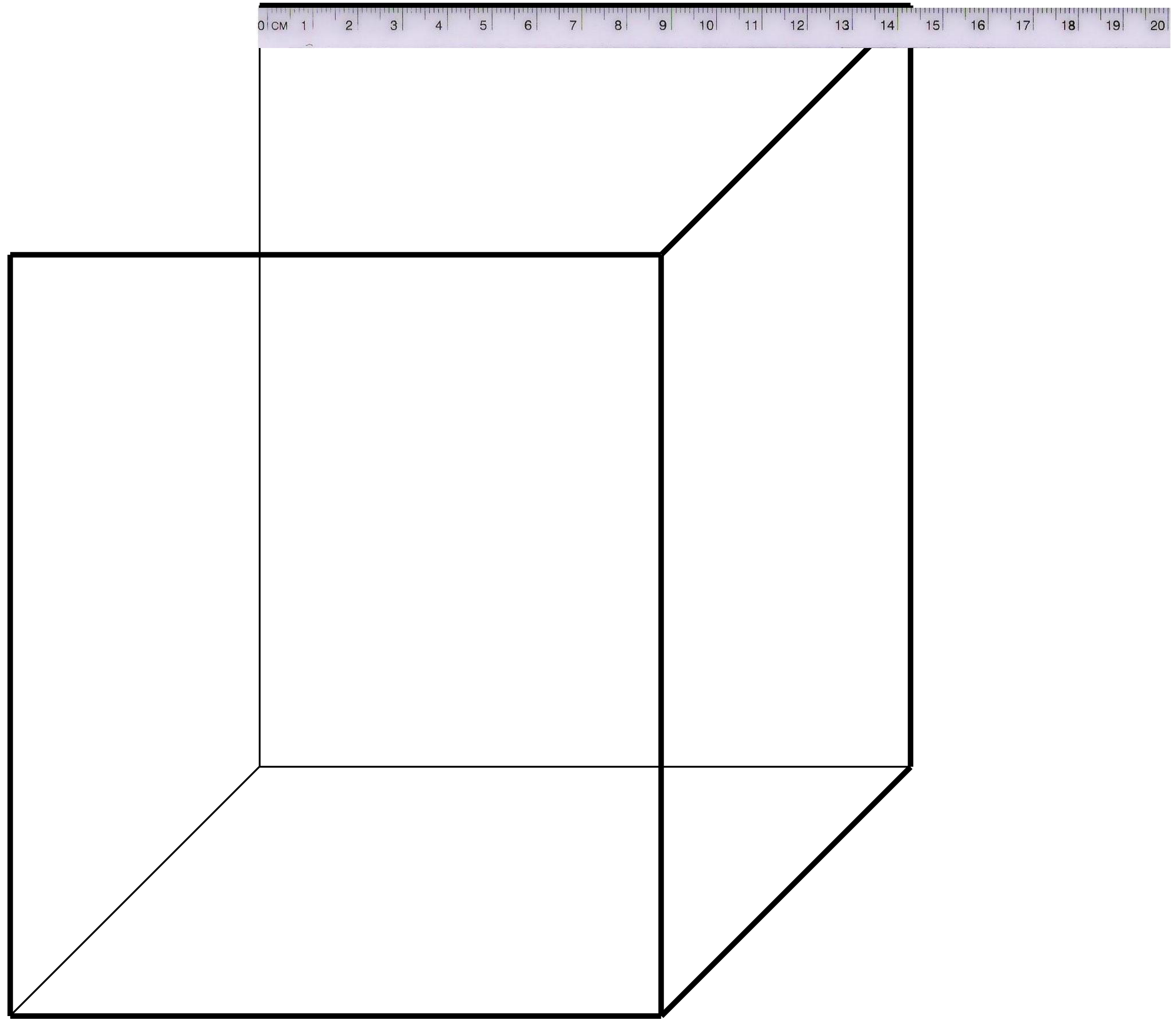


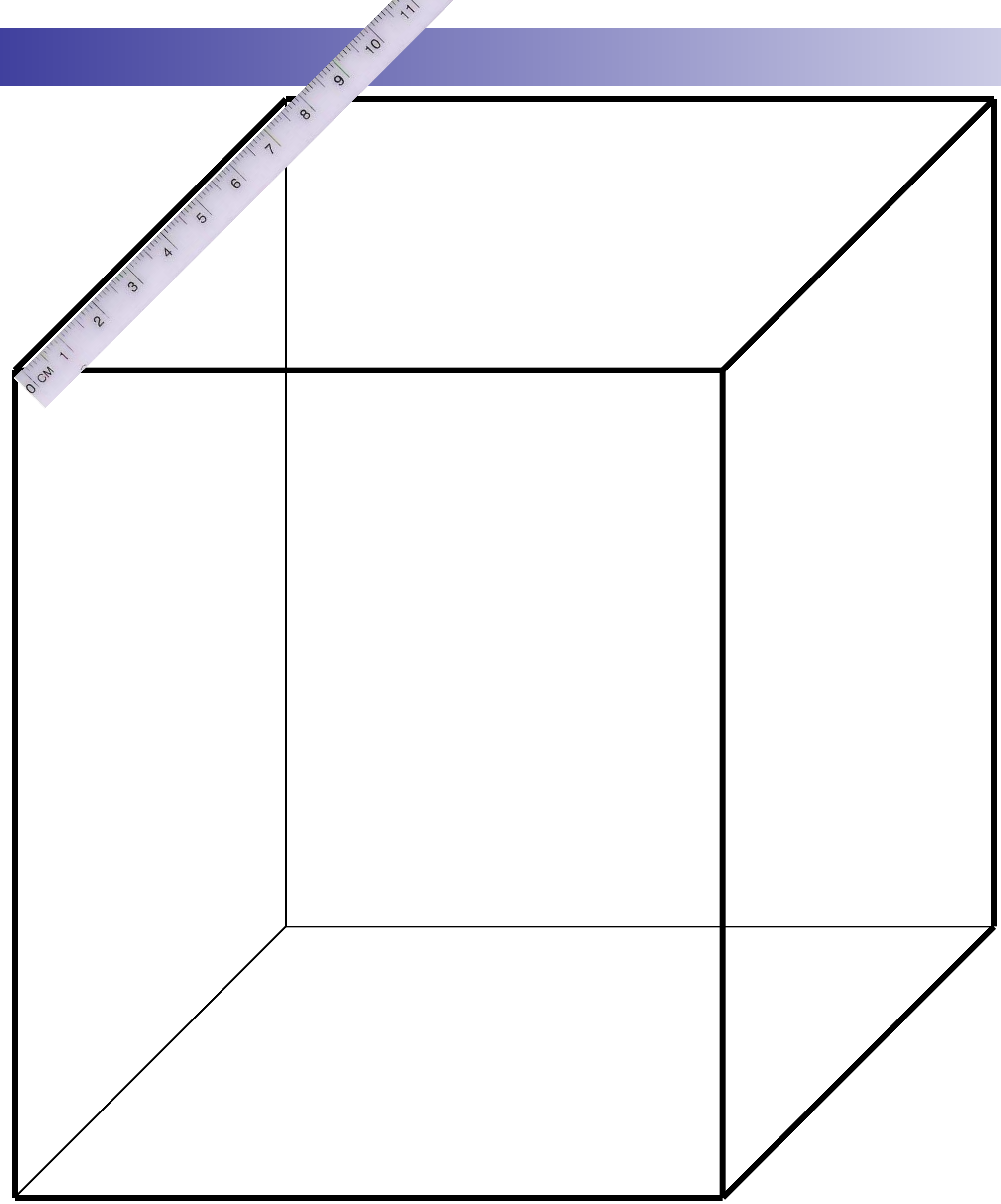

0 CM
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18

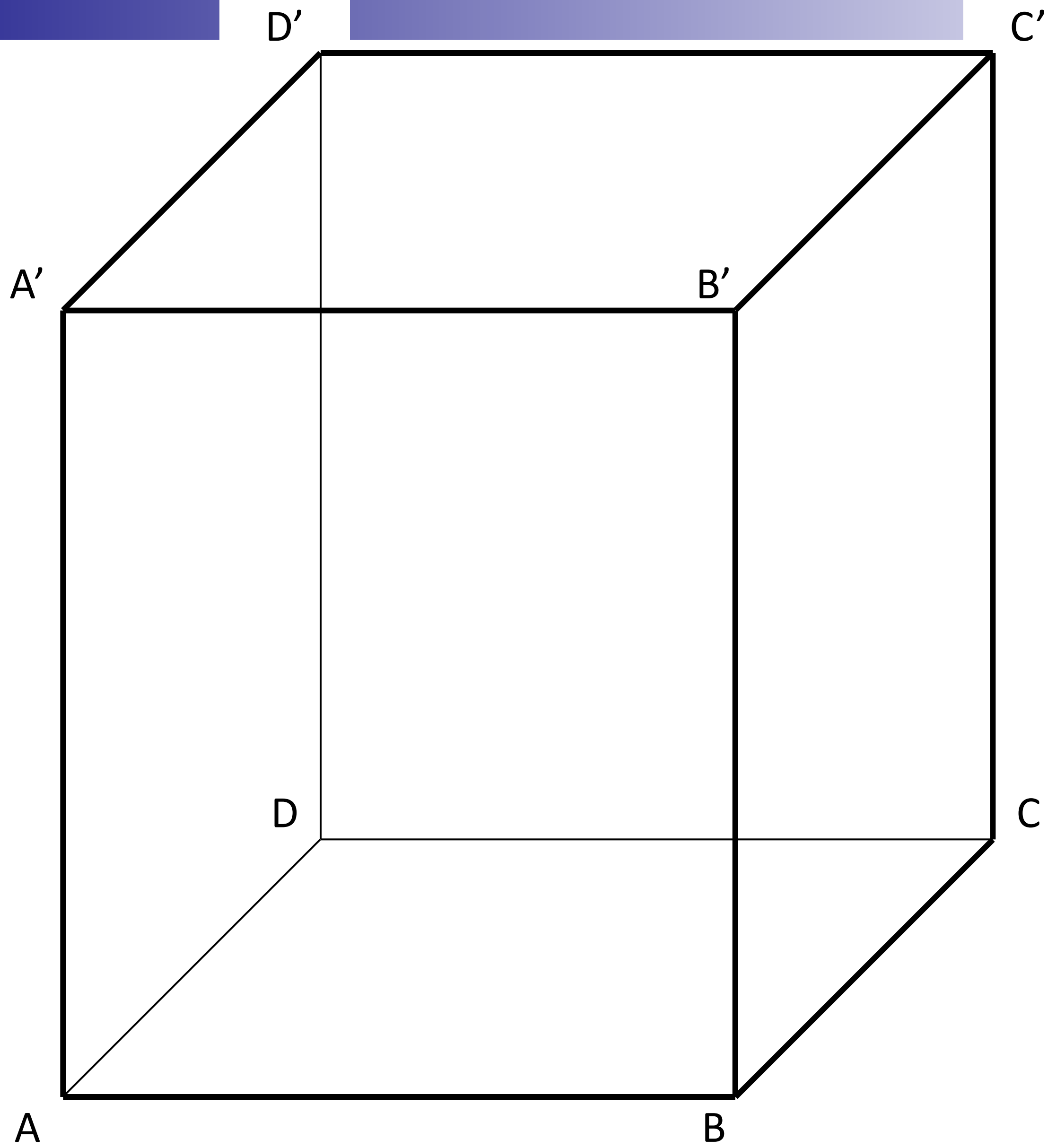

0 CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18


0 CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

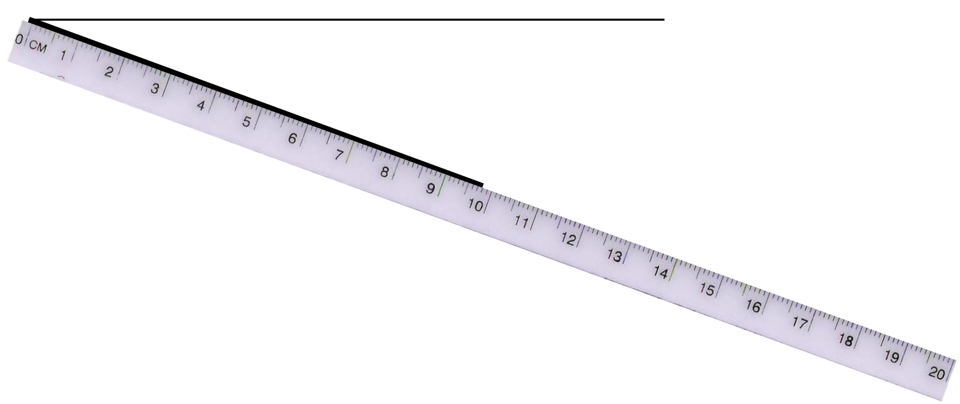

0 CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

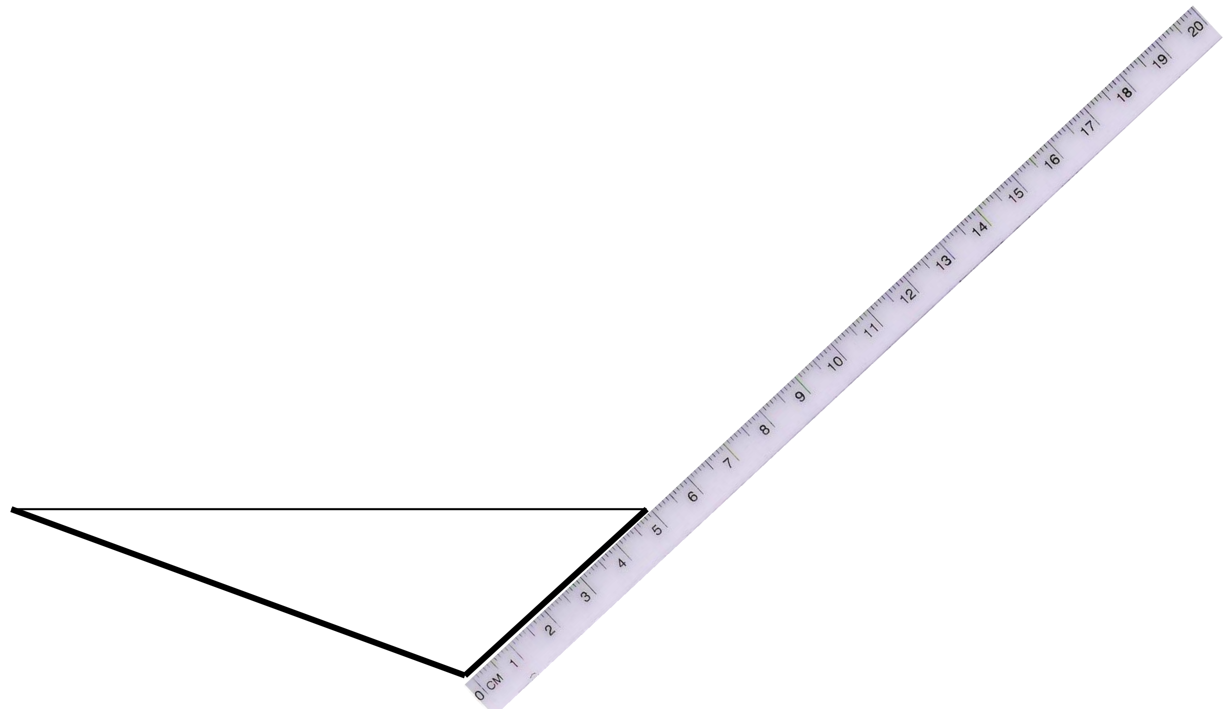

0 CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

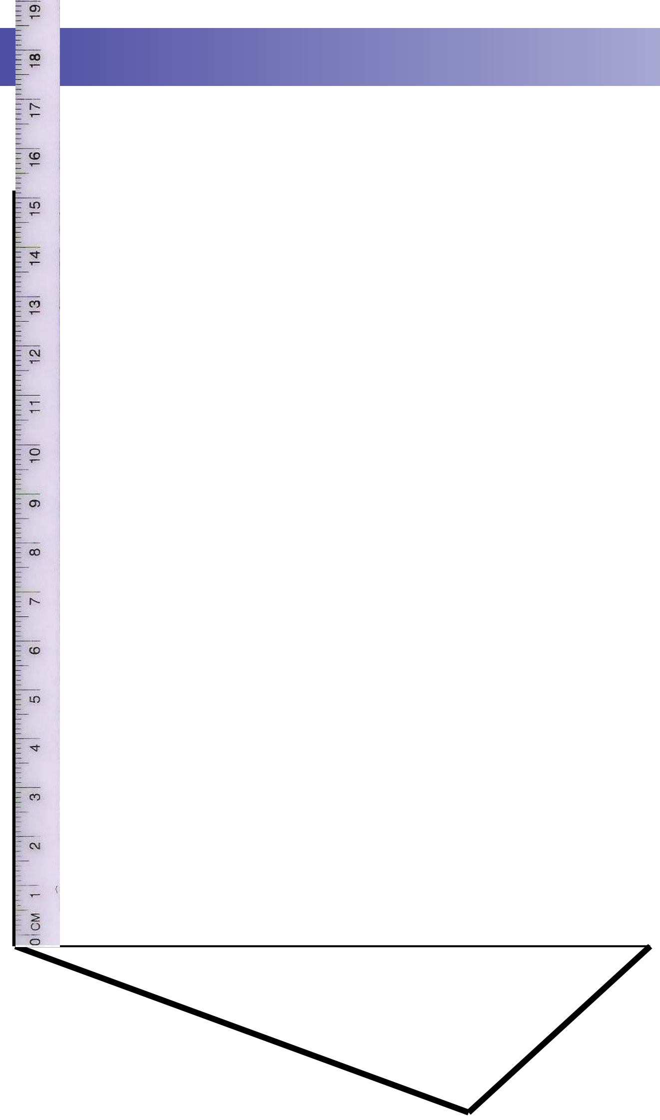


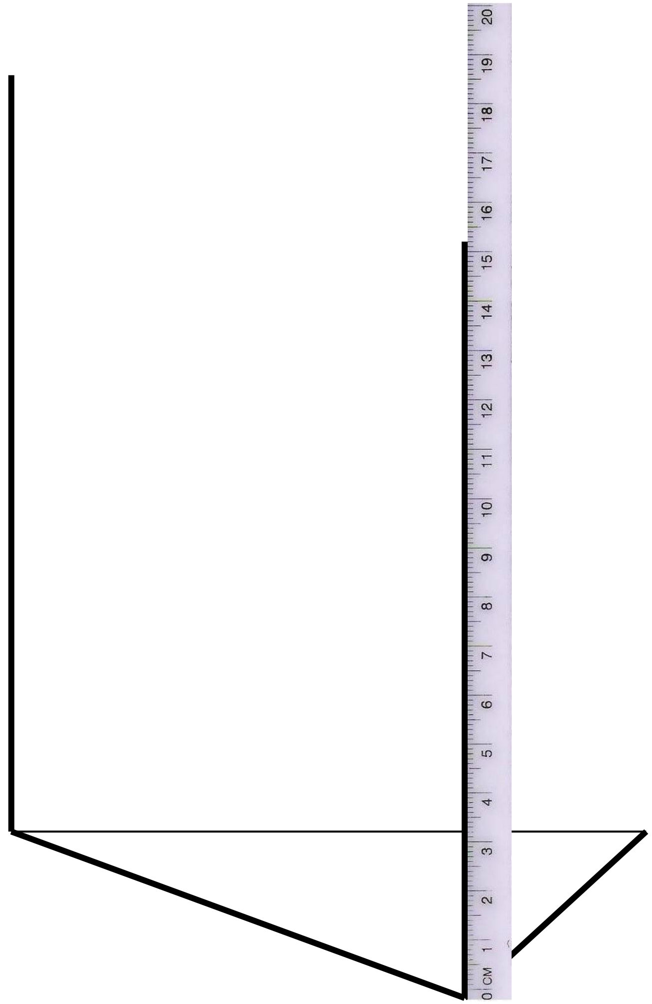

D’
C’
A’
B’
D
C
A
B

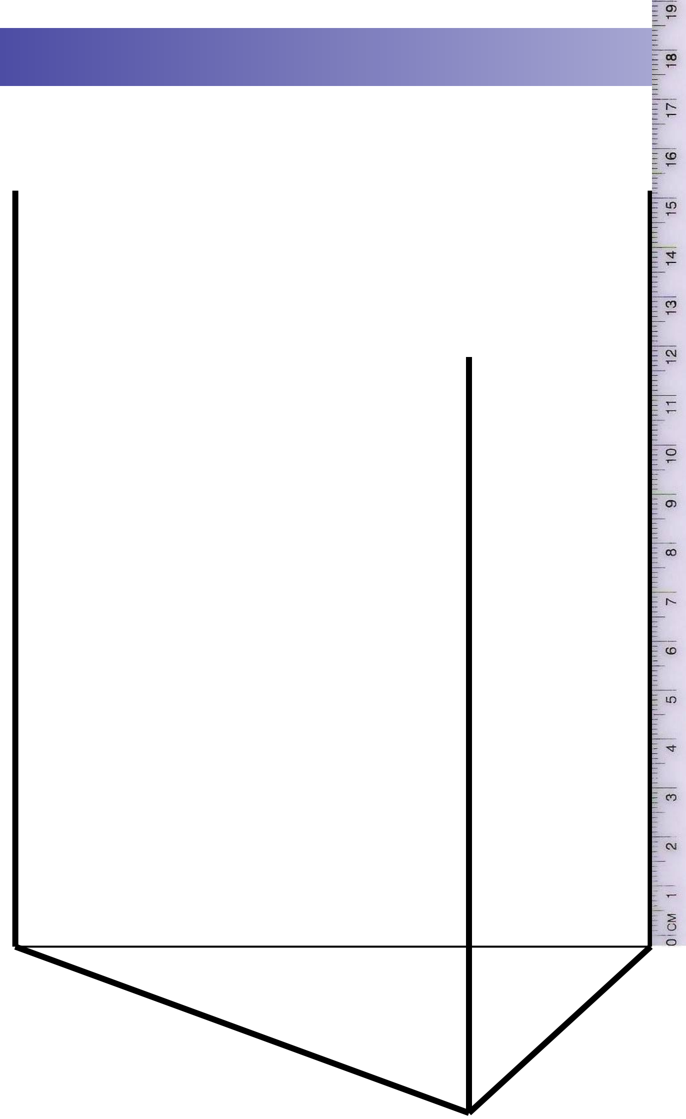
Prisma triunghiulară (regulată)

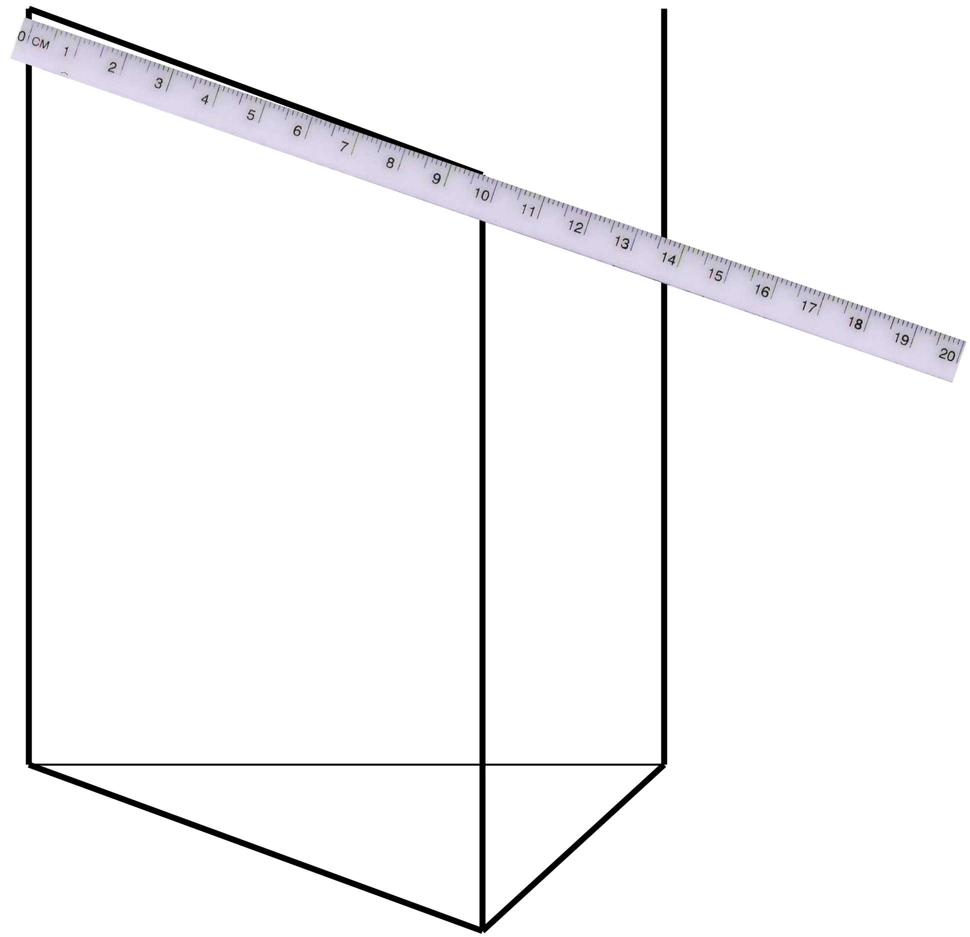

0 CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

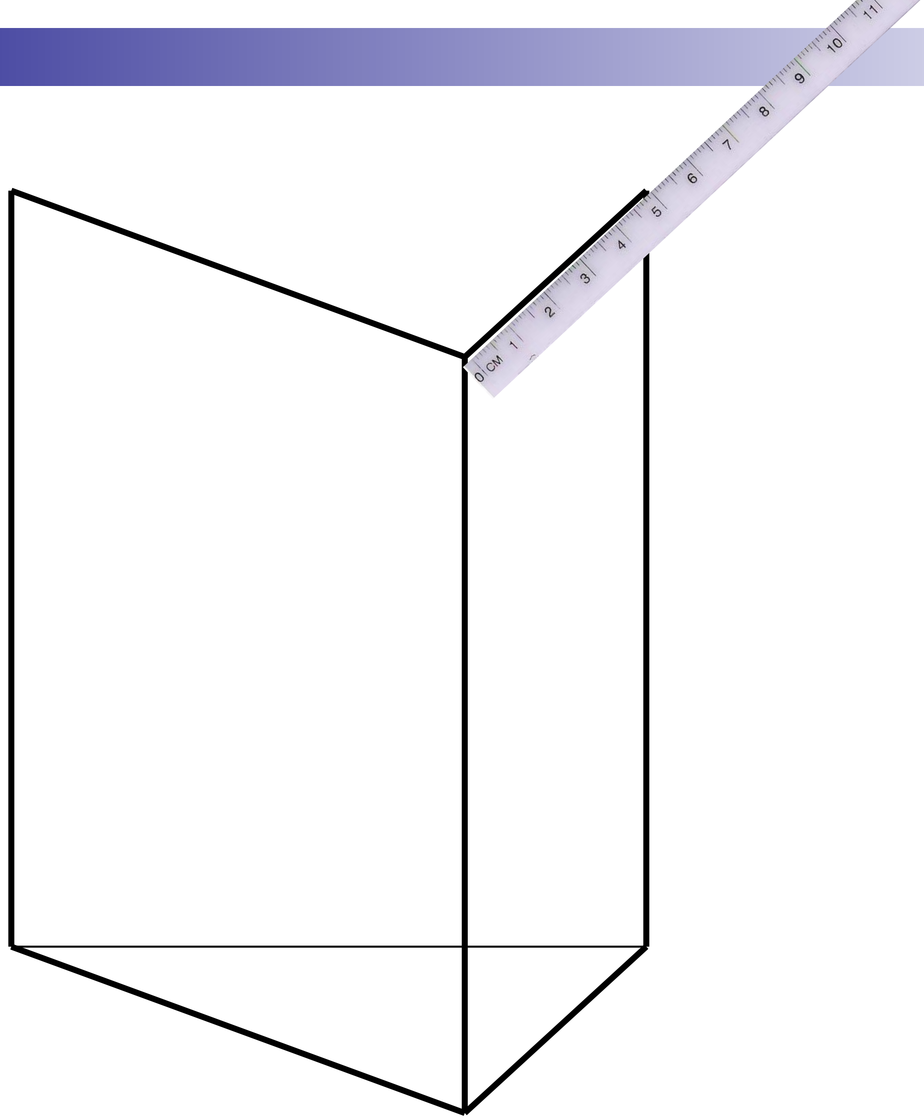

0 CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20


0 CM
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19

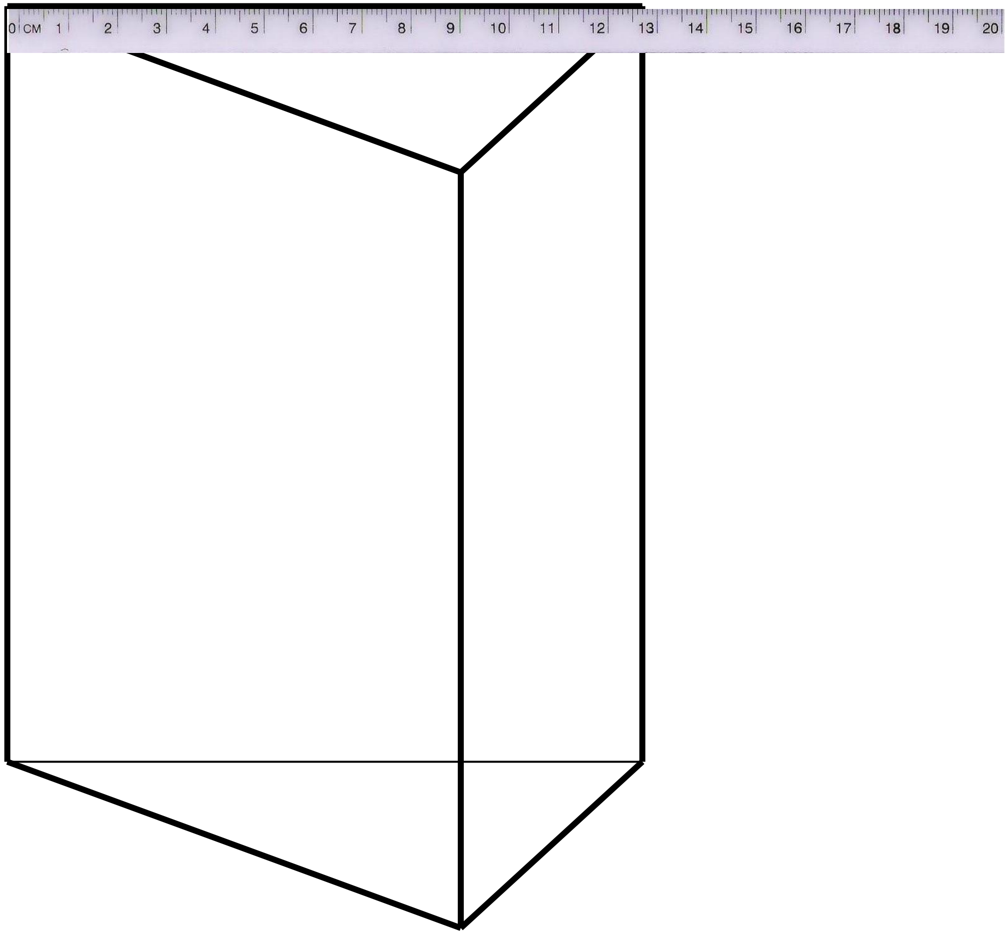

0 CM
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

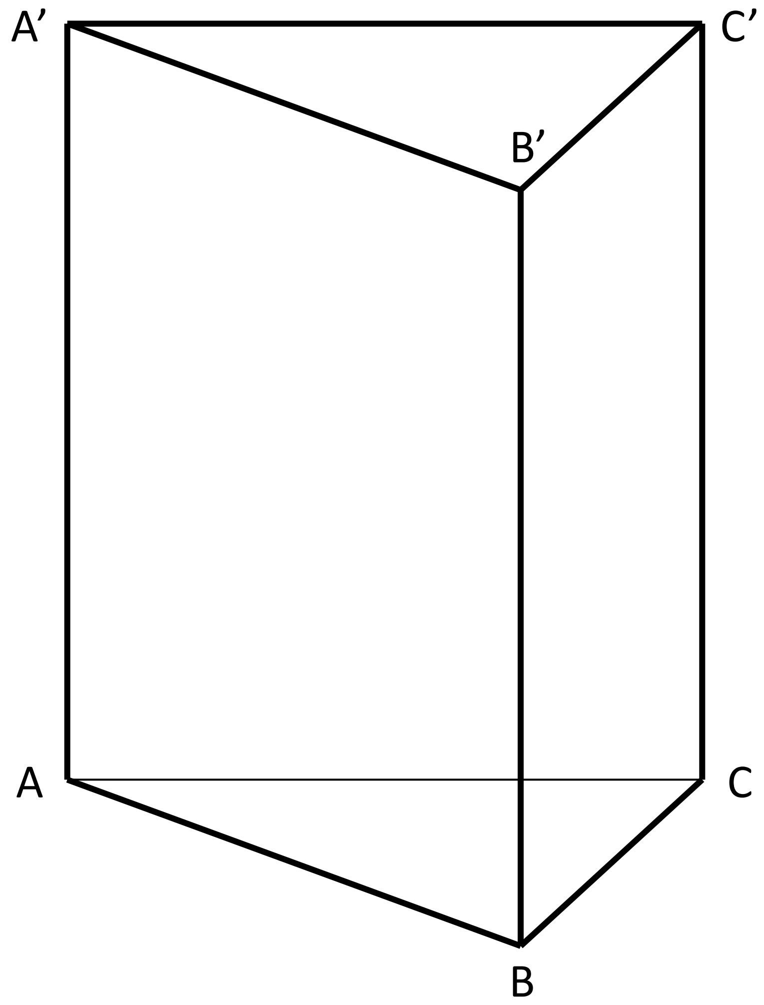

0 CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19


0 CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

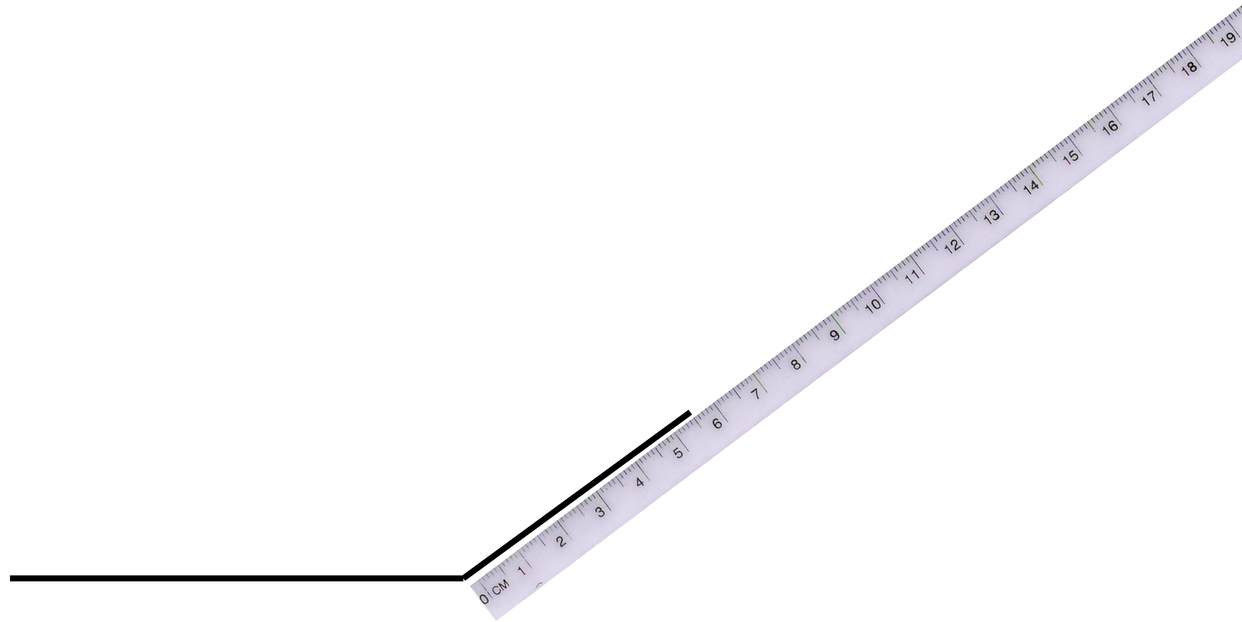


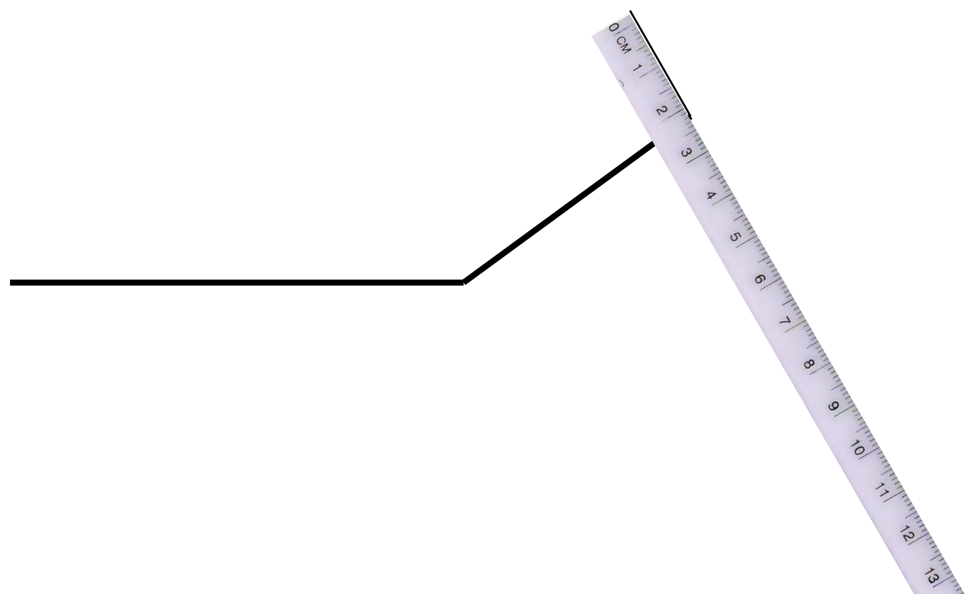
0 CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

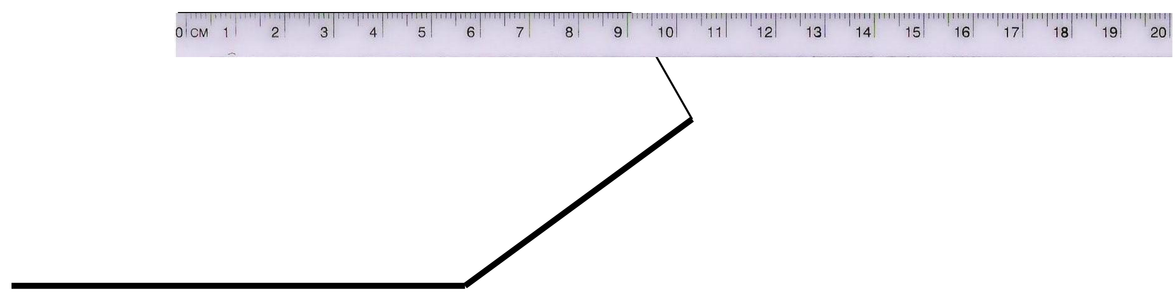

0 CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

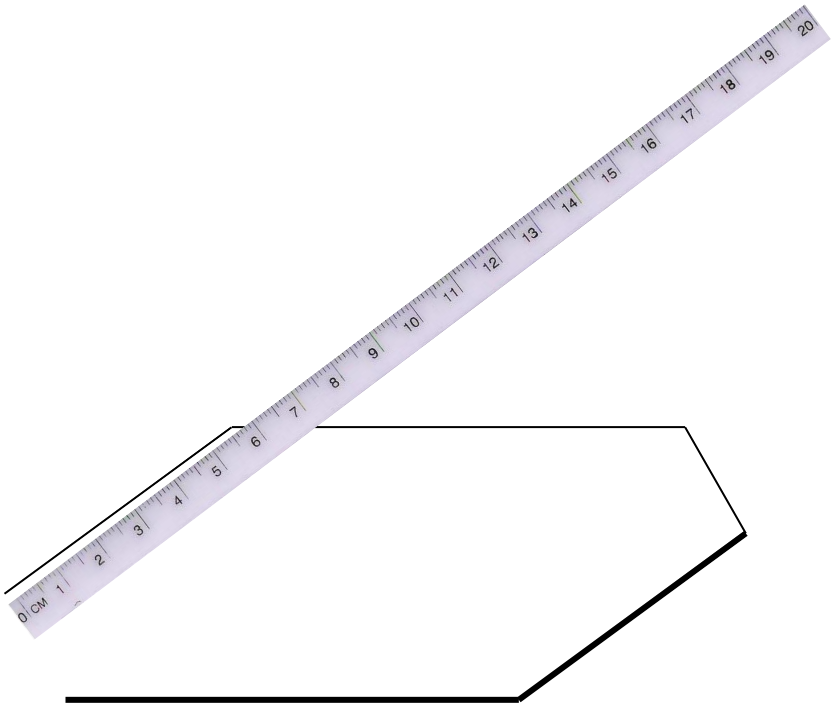

A’
C’
B’
A
C
B

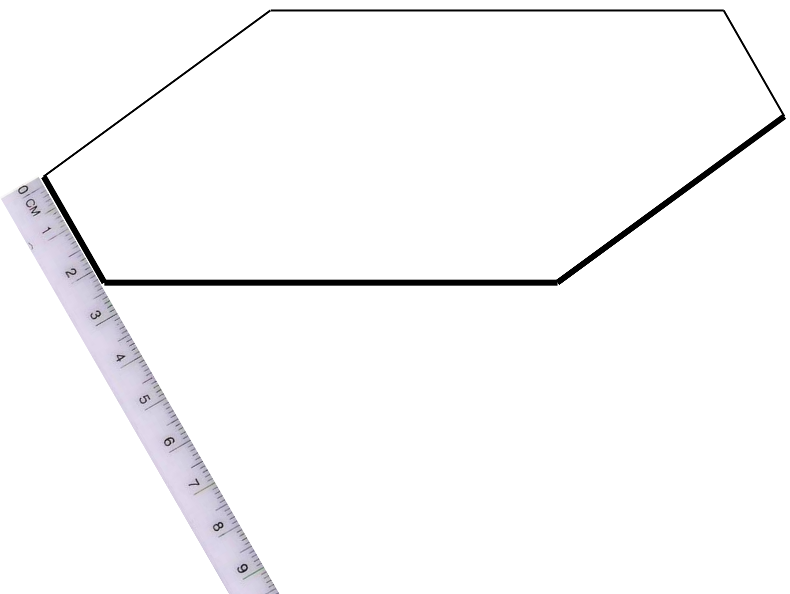
Prismă hexagonală regulată

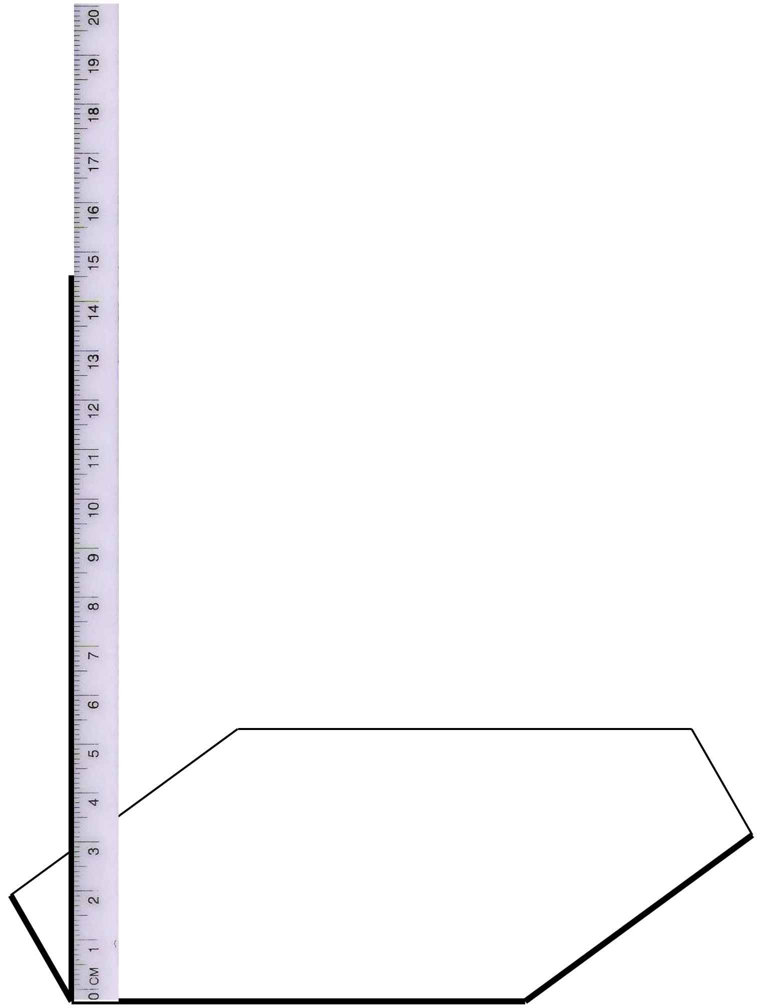

0 CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

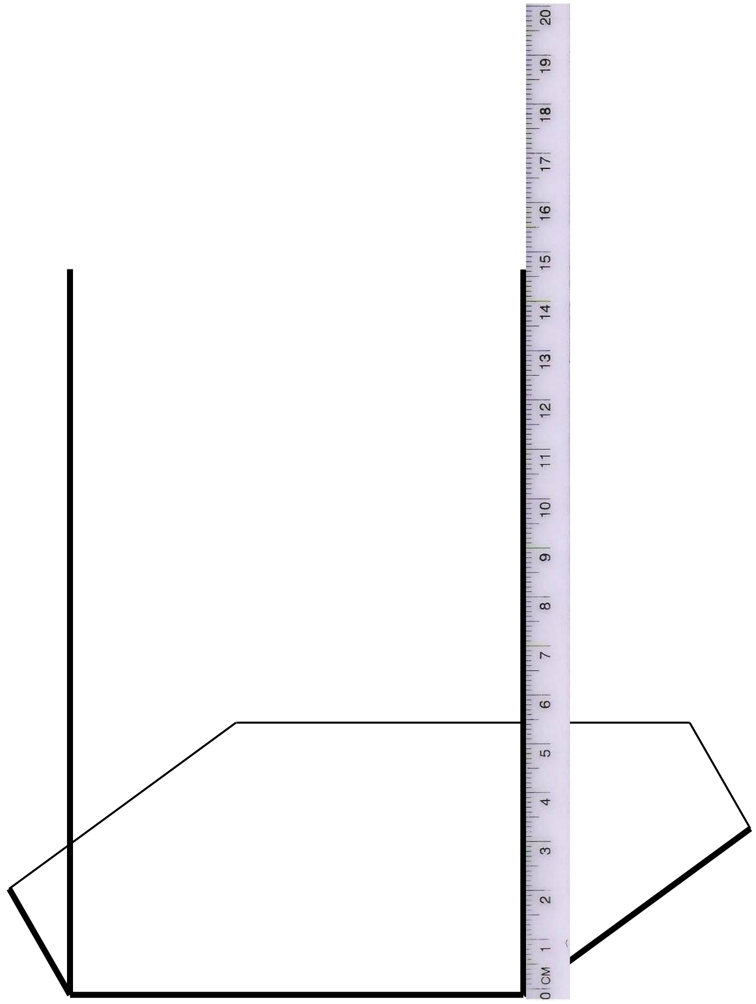

0 CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

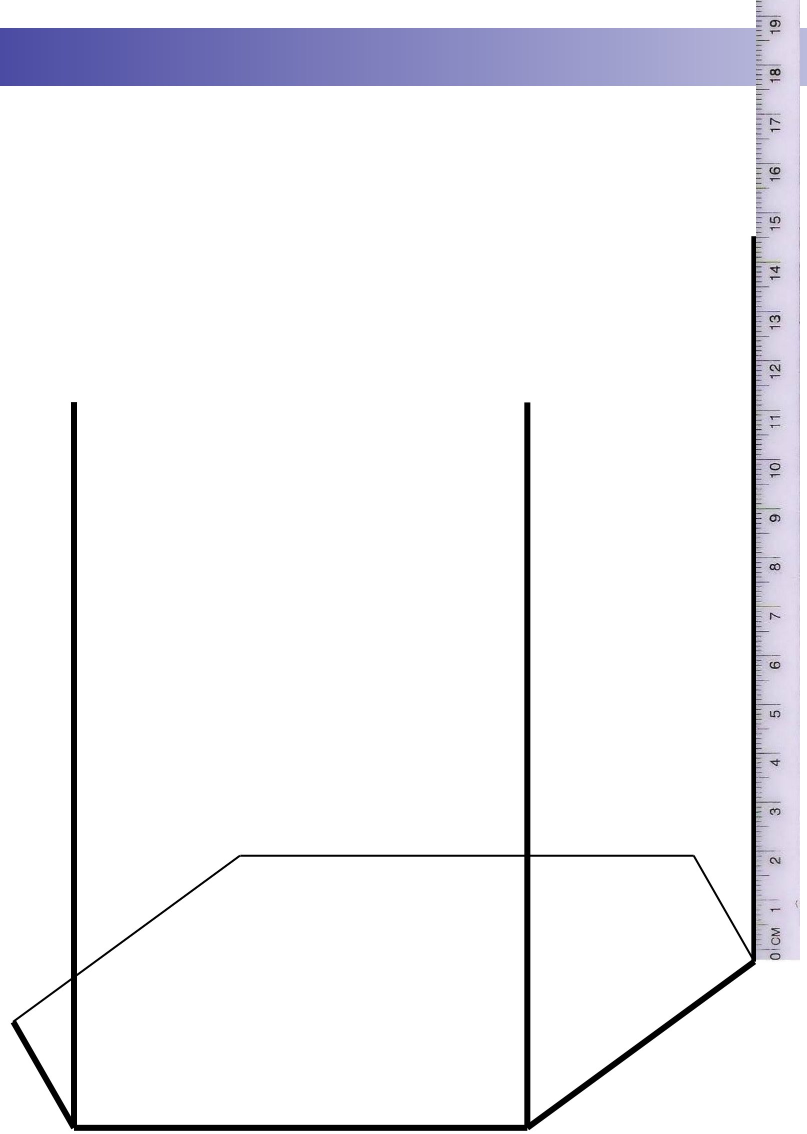

0 CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20


0 CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

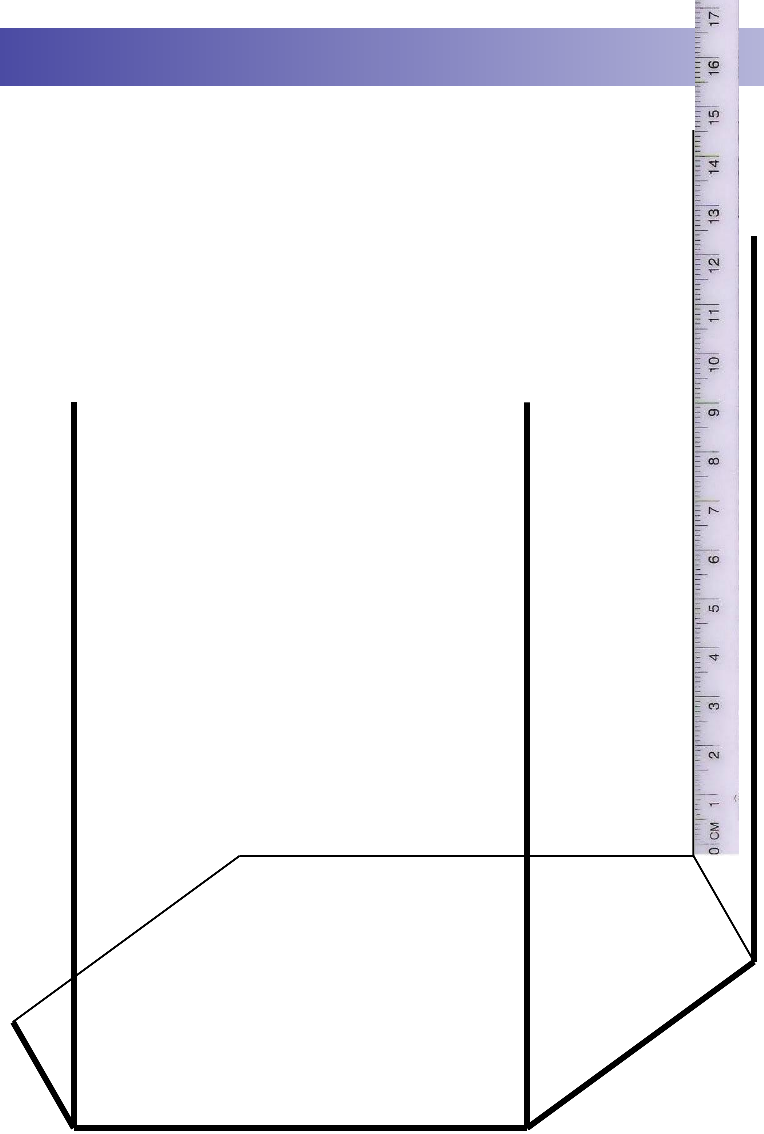

0 CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9

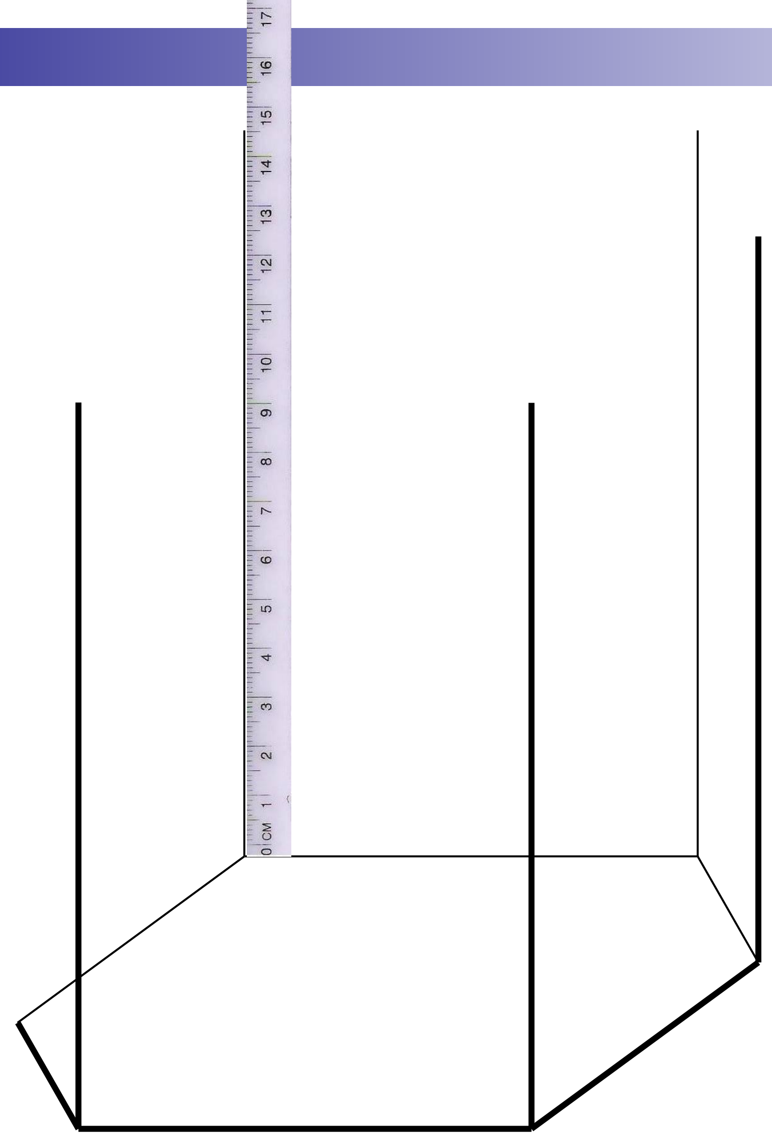


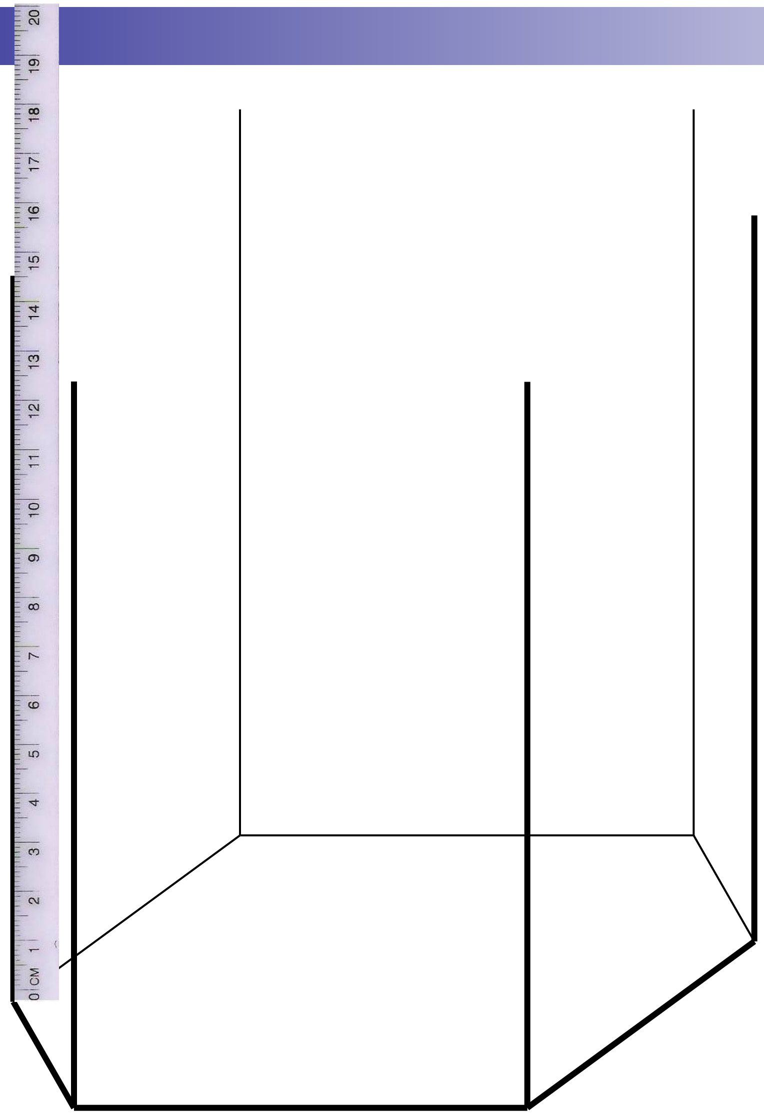


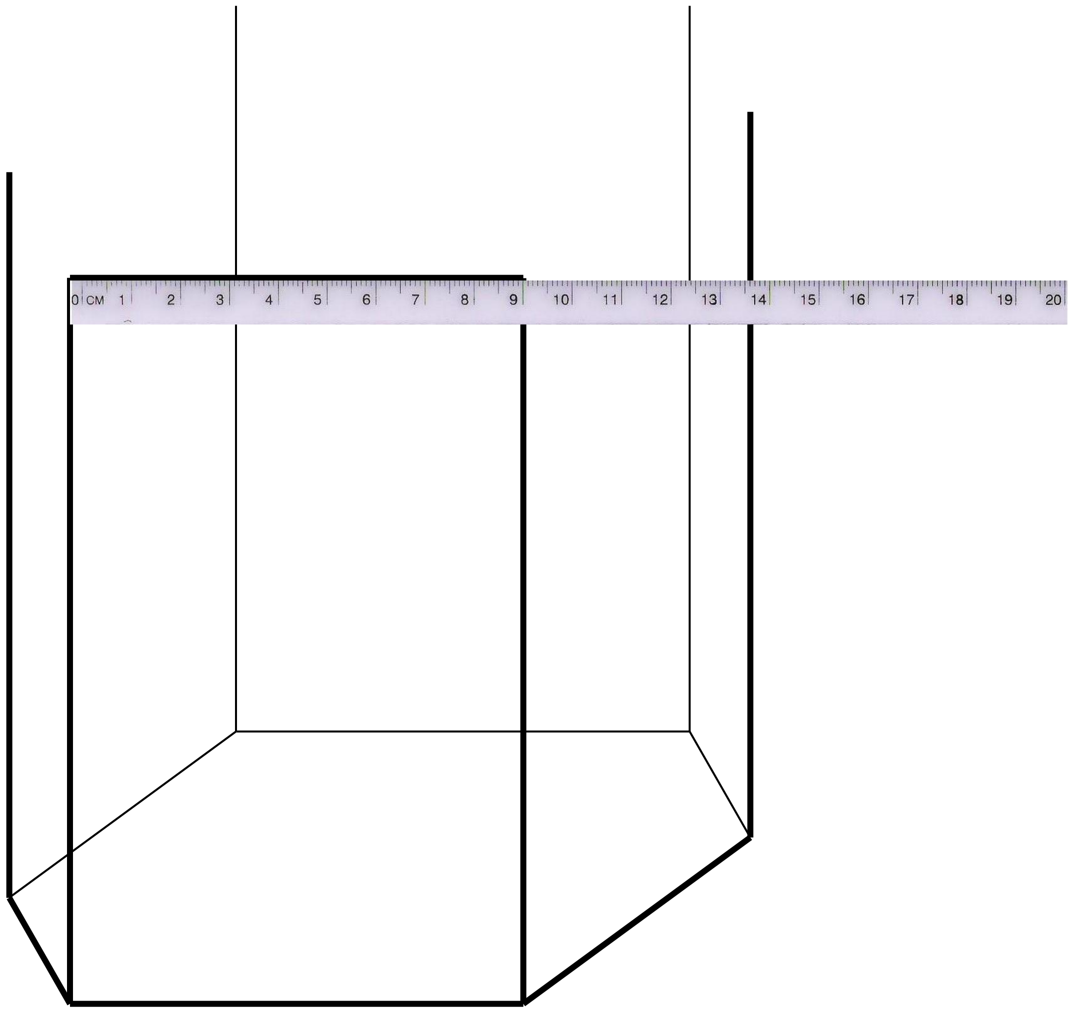


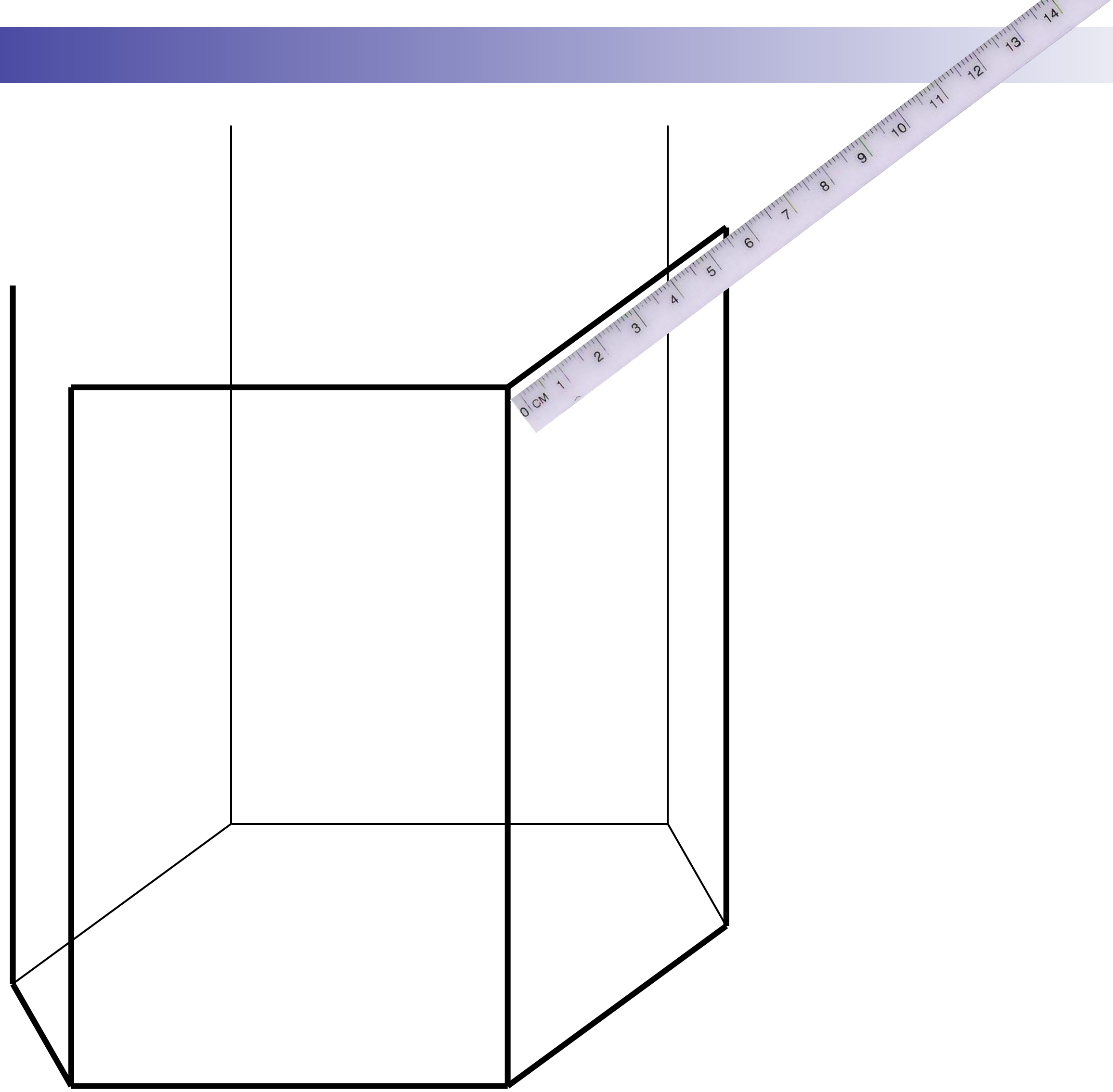
0 CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

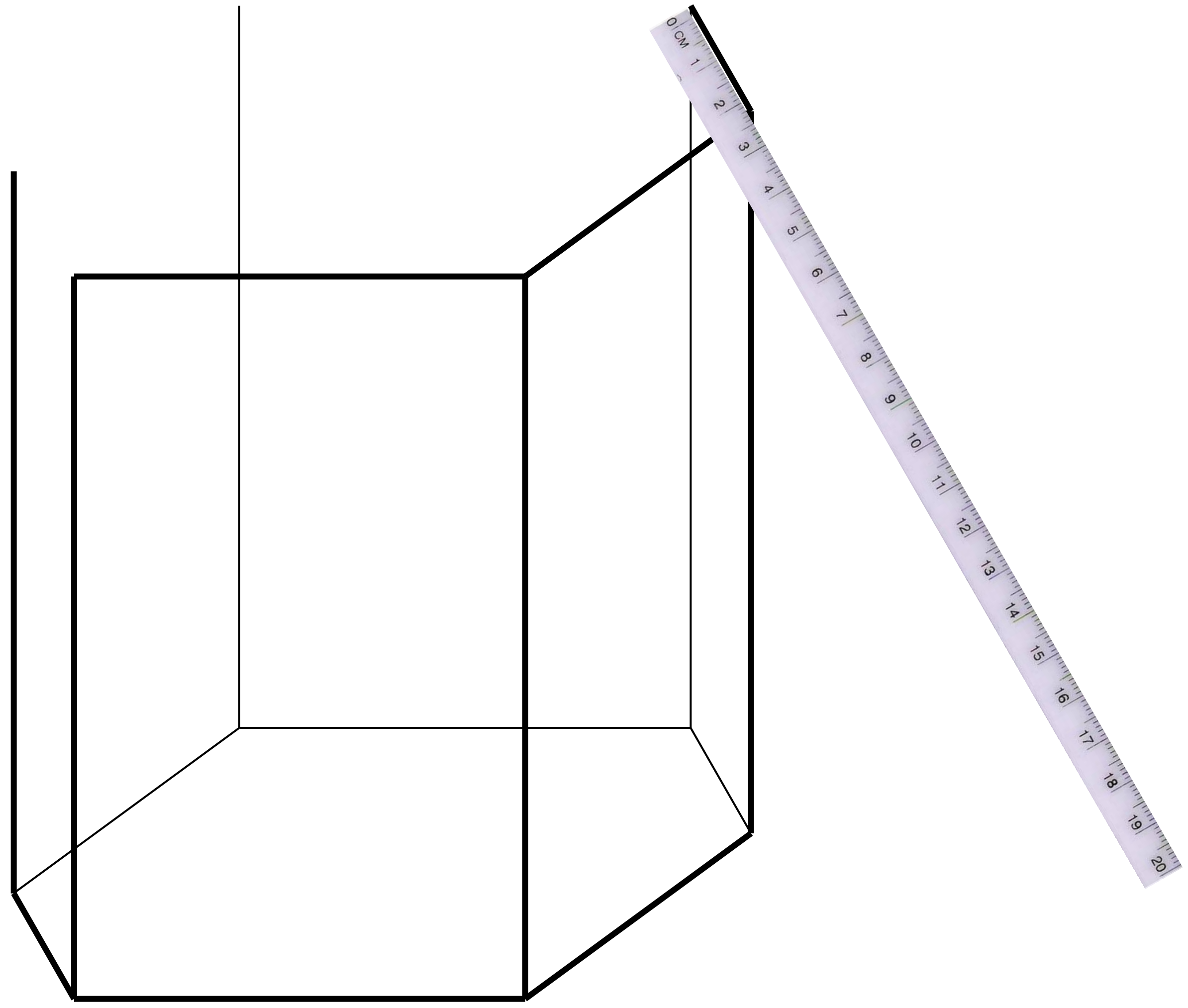


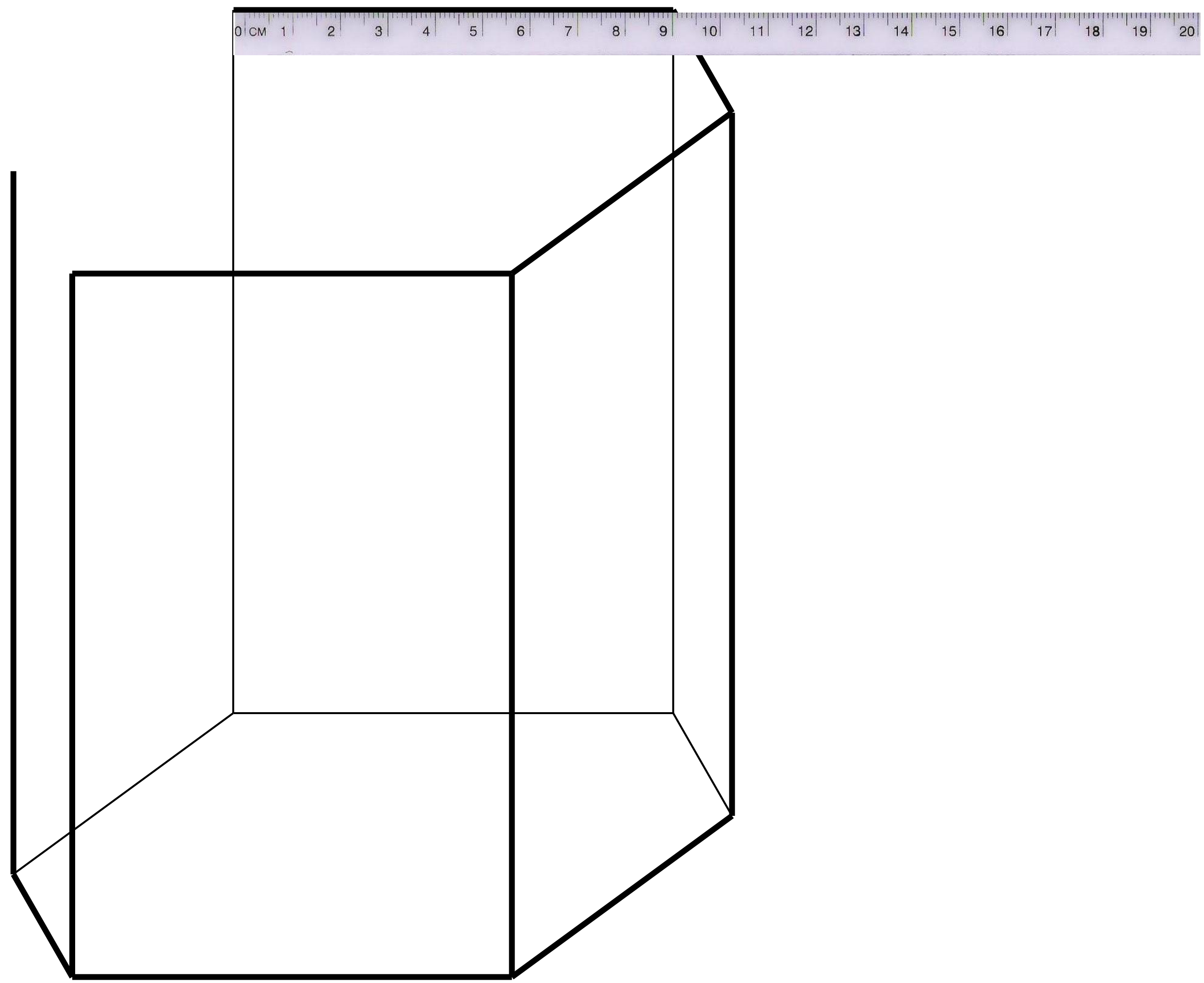

0 CM
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17

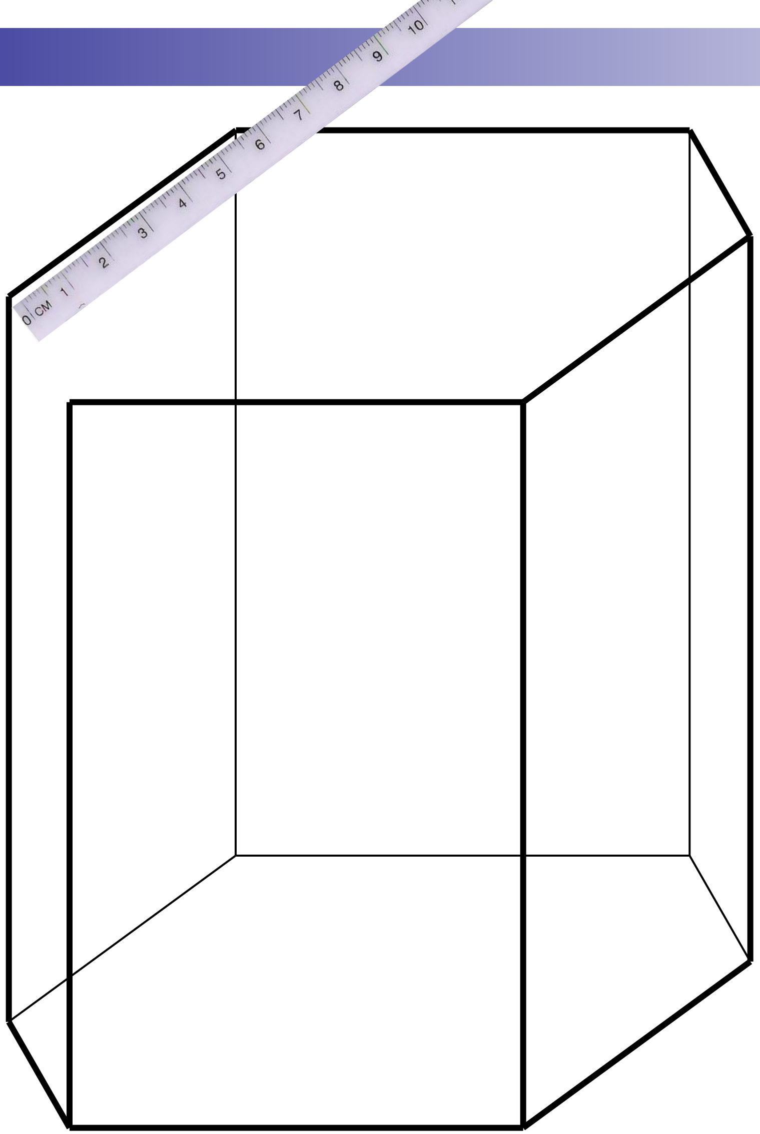

0 CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

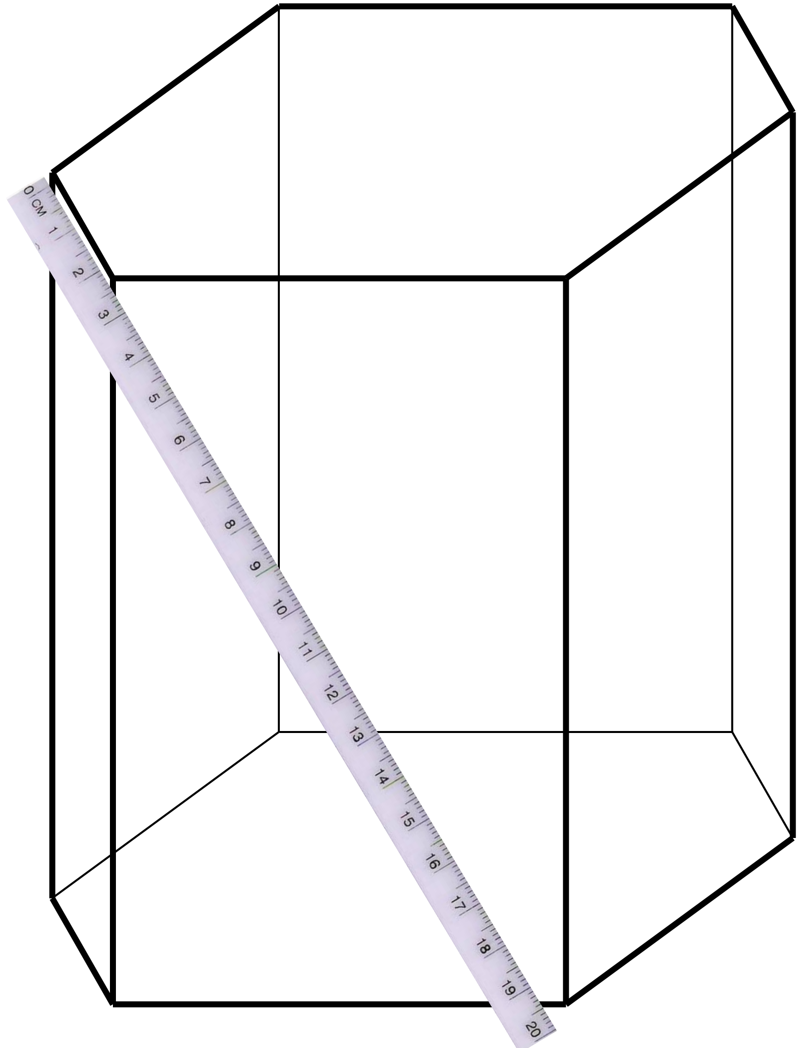

0 CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

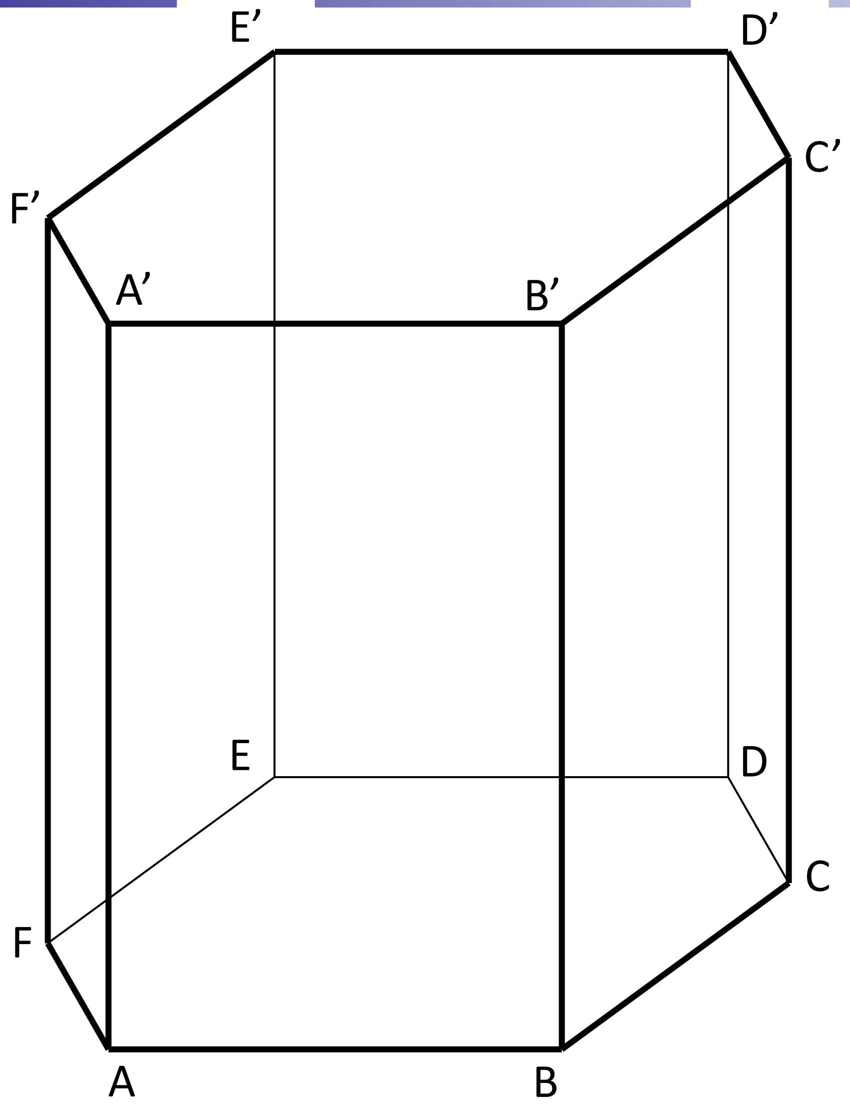



0
CM
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20


0 CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20


0 CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


0 CM
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20


E'
D'
C'
F'
A'
B'
E
D
C
F
A
B

FORMULE de calcul

A_l= arie laterală=suma ariilor feţelor laterale

A_t= arie totală = A_l + ariile bazelor

$A_t = A_l + 2A_{bază}$

V = volum= $A_{bază}$. înălţime

Formule particulare

$A_l = P_{bază} \cdot înălţime$ (pentru orice prismă dreaptă)

Paralelipiped dreptunghic:

$A_l = 2ac+2bc$
$A_t = 2ab+2ac+2bc$
$V = abc$
$d^2 = a^2+b^2+c^2$

a= lungime
b = lăţime
c =înălţime
d =diagonala prismei

Cub:

$A_l = 4a^2$
$A_t = 6a^2$
$V = a^3$
$d^2 = 3a^2$

a =muchia cubului

PROBLEME

- Probleme ce se rezolvă (şi) fără desen
- Probleme a căror rezolvare necesită desen
- Probleme propuse

1. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt de 7cm, 4cm, 8cm. Calculaţi aria laterală şi volumul.

R1

2. Volumul unui cub este de 125 cm^3. Calculaţi aria totală a cubului.

R2

3. O prismă triunghiulară regulată are muchia bazei de 4cm, înălţimea de 8 cm. Determinaţi aria laterală şi volumul ei.

R3

4. Suma dimensiunilor unui paralelipiped dreptunghic este de 24 cm, lungimea diagonalei de 18 cm. Calculaţi aria totală a paralelipipedului.

R4

5. O prismă hexagonală regulată are muchia bazei de 2cm, iar feţele laterale sunt pătrate. Calculaţi aria laterală şi volumul prismei.

R5

Probleme

R1

$$Avem \quad a = 7cm, b = 8cm, c = 4cm$$

$$A_l = 2ac + 2bc$$

$$V = abc$$

Deci: $$A_l = 2 \cdot (7 + 8) \cdot 4 = 2 \cdot 15 \cdot 4 = 120 \left(cm^2\right)$$

$$V = 7 \cdot 8 \cdot 4 = 224 \left(cm^3\right)$$

R2

$$Avem\ V = 125cm^3$$

$$V = a^3 \Rightarrow 125 = a^3 \Rightarrow 5^3 = a^3 \Rightarrow a = 5cm$$

deci $A_t = 6 \cdot a^2 \quad \Rightarrow A_t = 6 \cdot 5^2 = 6 \cdot 25 = 150\left(cm^2\right)$

R3

Prisma este regulată, deci are ca bază un triunghi echilateral
Fie a=4 cm lungimea laturii bazei, h=8 cm înălţimea prismei.

$$A_l = P_{baza} \cdot h$$

$$A_l = 3 \cdot 4 \cdot 8 = 96\left(cm^2\right)$$

$$V = A_{baza} \cdot h$$

$$A_{baza} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_{baza} = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}\left(cm^2\right)$$

$$V = 4\sqrt{3} \cdot 8 = 32\sqrt{3}\left(cm^3\right)$$

R5

Deoarece feţele prismei sunt pătrate, înălţimea corespunde cu muchia bazei: a=h=2 cm.

$$A_l = P_{baza} \cdot h$$

$$V = A_{baza} \cdot h$$

$$A_l = 6 \cdot 2 \cdot 2 = 24\left(cm^2\right)$$

$$V = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$$

$$V = 6 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{4} \cdot 2 = 12\sqrt{3}\left(cm^3\right)$$

1. Fie ABCDA'B'C'D' un cub. Fie M mijlocul lui A'D', iar P mijlocul lui AB. Dacă MP= $4\sqrt{2}$ cm, calculaţi muchia şi volumul cubului.

R1

2. Fie ABCDEF o prismă dreaptă, având baza ABC triunghi dreptunghic. Înălţimea prismei este congruentă cu ipotenuza bazei, ([AD]≡[AC]) şi AB=12cm, BC=9cm. Calculaţi:
   a) Aria totală şi volumul prismei;
   b) Aria triunghiului EBM, unde M este mijlocul AC.

R2

3. Fie ABCDA'B'C'D' o prismă patrulateră regulată cu muchia bazei AB=2 cm. Dacă aria triunghiului A'BC este de 4 cm^2, calculaţi:
a) Volumul prismei,
b) sinusul unghiului format de diagonala prismei cu planul bazei.

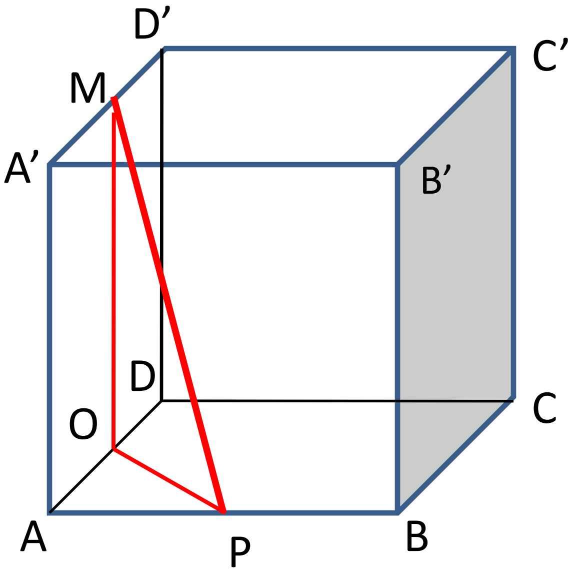
R3

4. Fie ABCA'B'C' o prismă triunghulară regulată. Se ştie că distanţa dintre centrele a două feţe laterale este de 4 cm, şi aria laterală de $96\sqrt{3}cm^2$. Calculaţi:
a) Înălţimea prismei
b) Volumul prismei
c) Măsura unghiului format de planele (A'BC) şi (ABC).

R4

Probleme

R1



Fie triunghiul dreptunghic MOP. (O mijlocul lui AD)

*Notăm muchia cubului cu **a** .*

atunci $MO = a$

$$OP = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad l.m.\ în\ \Delta ABD$$

$$\Delta MOP : m(O) = 90° \Rightarrow MO^2 + OP^2 = MP^2$$

$$a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2$$

$$a^2 + \frac{2a^2}{4} = 16 \cdot 3$$

$$\frac{6a^2}{4} = 48$$

$$a^2 = \frac{4 \cdot 48}{6}$$

$$a^2 = 32$$

$$a = \sqrt{16 \cdot 2}$$

$$a = 4\sqrt{2}cm$$

$$V = a^3$$

$$V = \left(4\sqrt{2}\right)^3 = 64 \cdot 2\sqrt{2} = 128\sqrt{2}\ \left(cm^3\right)$$

R4

$$avem \quad a+b+c=24$$

$$d=18 \Rightarrow d^2=324 \Rightarrow a^2+b^2+c^2=324$$

$$dar \quad (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+\underbrace{2ab+2ac+2bc}_{A_t}$$

deci

$$24^2=324+A_t$$

$$576=324+A_t$$

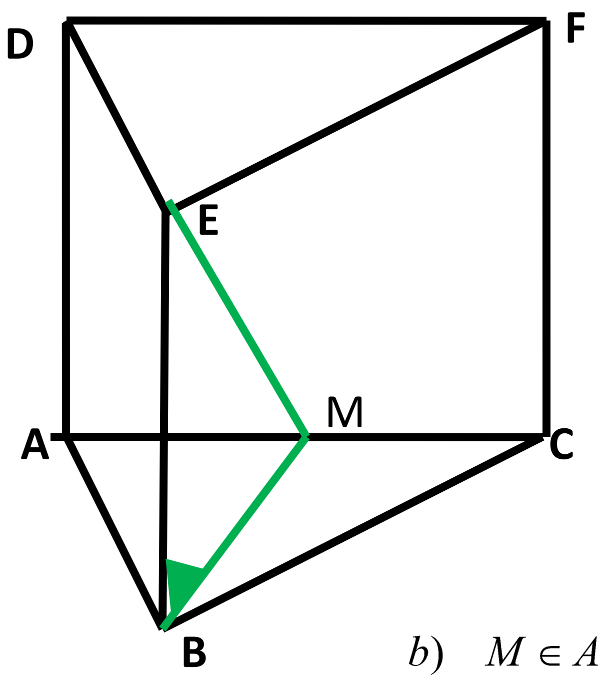
$$A_t=576-324=252\left(cm^2\right)$$

R2

$a)\quad \Delta ABC : m\left(\hat{B}\right) = 90° \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 12^2 + 9^2$

deci $\quad AC = 15cm = AD$



$P_{baza} = AB + BC + AC$

$P_{baza} = 9 + 12 + 15 = 36(cm)$

$A_{baza} = \dfrac{AB \cdot BC}{2}$

$A_{baza} = \dfrac{12 \cdot 9}{2} = 54\left(cm^2\right)$

$A_t = A_l + 2A_{baza}$

$A_t = P_{baza} \cdot h + 2A_{baza}$

$V = A_{baza} \cdot h$

$A_t = 648cm^2$

$V = 810cm^3$

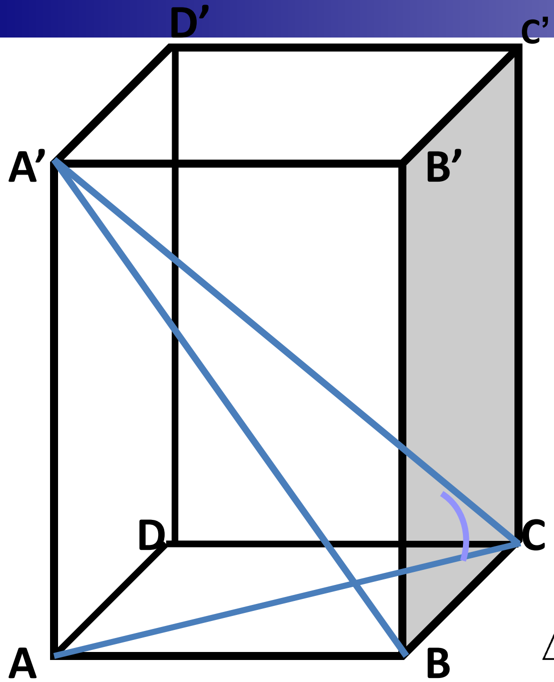
$b)\quad M \in AC, [AM] \equiv [MC] \Rightarrow BM = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{15}{2}(cm)$

$EB \perp (ABC), BM \subset (ABC) \Rightarrow EB \perp BM$

$A_{EBM} = \dfrac{EB \cdot BM}{2}$

$A_{EBM} = \dfrac{225}{4} cm^2$

R3



a) Ce fel de triunghi este triunghiul A'BC?

$$\left.\begin{array}{l} A'A \perp (ABC) \\ AB \perp BC \end{array}\right\} \overset{t3\perp}{\Rightarrow} A'B \perp BC \Rightarrow m(\widehat{A'BC}) = 90^\circ$$

$$A_{A'BC} = \frac{A'B \cdot BC}{2} \Rightarrow 4 = \frac{A'B \cdot 2}{2} \Rightarrow A'B = 4cm$$

$$\Delta A'AB \;: m(\widehat{A}) = 90^\circ \Rightarrow A'A^2 + AB^2 = A'B^2$$

$$A'A^2 + 4 = 16 \Rightarrow A'A = 2\sqrt{3}cm = m$$

$$V = A_{baza} \cdot h \Rightarrow V = 2^2 \cdot 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}\left(cm^3\right)$$

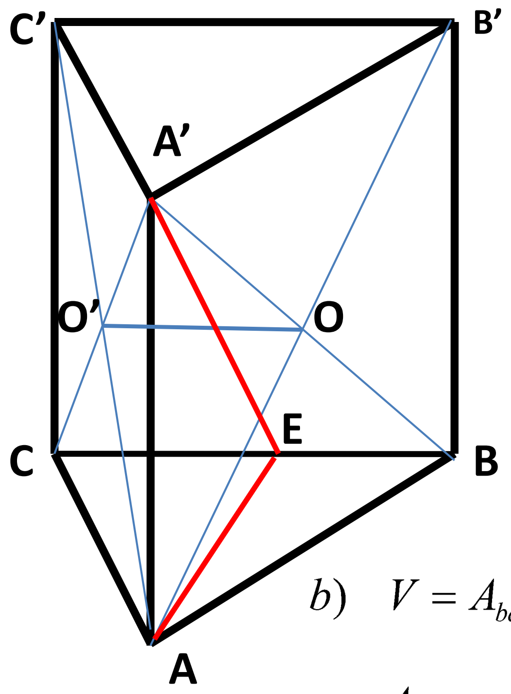
$$b) \quad A'A \perp (ABC) \Rightarrow pr_{(ABC)} A'C = AC$$

$$\sin\left(A'C, (ABC)\right) = \sin\left(A'CA\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta A'AC \;: m(A) = 90^\circ \\ A'A = 2\sqrt{3}cm \\ AC = 2\sqrt{2}cm \end{array}\right\} \Rightarrow A'C^2 = A'A^2 + AC^2$$

$$A'C = 2\sqrt{5}cm \Rightarrow \sin\left(A'CA\right) = \frac{A'A}{A'C} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

R4



a) Notăm cu O' şi O centrele feţelor (A'ACC') şi (A'ABB').

Deoarece diagonalele dreptunghiului se înjumătăţesc OO' este linie mijlocie în triunghiul A'CB.

$$OO' = \frac{BC}{2} \Rightarrow BC = 2OO' \Rightarrow BC = 8cm$$

$$A_l = P_{baza} \cdot h \Rightarrow h = \frac{A_l}{P_{baza}} \qquad h = \frac{96\sqrt{3}}{3 \cdot 8} = 4\sqrt{3}\,(cm)$$

$$b) \quad V = A_{baza} \cdot h$$

$$A_{baza} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}\left(cm^2\right) \qquad V = 16\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 64 \cdot 3 = 192\left(cm^3\right)$$

$$c) \quad \left.\begin{array}{l} A'A \perp (ABC) \\ AE \perp BC \end{array}\right\} \overset{t3\perp}{\Rightarrow} A'E \perp BC \qquad \left.\begin{array}{l} (A'BC) \cap (ABC) = BC \\ A'E \perp BC \\ AE \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow \angle((A'BC),(ABC)) = \angle(A'EA)$$

$$\Delta A'AC : \left.\begin{array}{l} m(A) = 90^\circ \\ A'A = AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow m(A'EA) = 45^\circ$$

1. Toate muchiile prismei regulate $ABCA'B'C'$ sunt de 3cm. Calculaţi lungimea segmentului AD, unde D este mijlocul lui $B'C'$.
2. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile bazei de 15 cm,resp. 5 cm, aria laterală este de două ori mai mare decât aria bazei. Calculaţi înălţimea şi volumul paralelipipedului.
3. Suma muchiilor concurente într-un singur vârf al unui paralelipiped dreptunghic este de 15 m, diagonala corpului de $\sqrt{77}$ m. Calculaţi aria totală a paralelipipedului.
4. Volumul unei prisme patrulatere regulate este de 175 cm^3, înălţimea de 7 cm. Calculaţi diagonala şi aria totală a prismei .
5. O prismă hexagonală regulată are muchia bazei de 6 cm, înălţimea de 8 cm. Calculaţi lungimea diagonalelor prismei, aria totală şi volumul ei.
6. Fie ABCA'B'C' o prismă triunghiulară. În triunghiul ABC se cunosc două laturi de 17 dm, şi 23 dm, iar măsura unghiului cuprins între ele de 45°. Dacă înălţimea prismei este de 12 dm, calculaţi volumul.
7. Fie paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D'. AB=12 cm, BC=35 cm, aria secţiunii determinate de muchiile AA' şi CC' este de 370 cm^2. Calculaţi aria laterală şi volumul paralelipipedului.

Probleme