Лекция № 6

КОЛЕБАНИЯ

(продолжение)

Свободные затухающие колебания

В реальных механических колебательных системах энергия постепенно расходуется на работу против сил сопротивления и сил внутреннего трения. Такие системы являются диссипативными (рис.6.1)

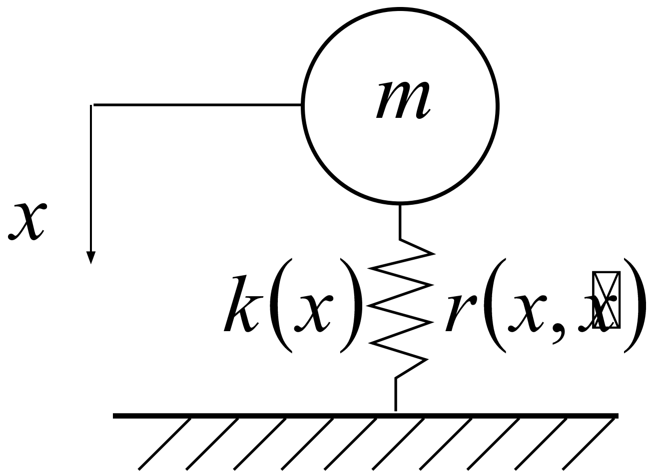

Рис. 6.1

В них механическая энергия переходит в тепловую, а амплитуда колебаний уменьшается с течением времени.

Ур-е движения тела под действием силы упругости и силы сопротивления при небольших скоростях $\vec{F}^{\text{с}} = -r\vec{\upsilon}$ имеет вид:

$$m\vec{a} = \vec{F}^{\text{у}} + \vec{F}^{\text{с}}$$

$$x: \qquad m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} \qquad \Big|: m$$

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

ДУ свободных затухающих колебаний:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (6.1)$$

Здесь $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ – собственная частота осциллятора,

$\beta = \dfrac{r}{2m}$ – коэффициент затухания системы,

r – коэффициент сопротивления.

Решение ур-я (6.1) при $\omega_0 > \beta$ имеет вид:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) \qquad (6.2)$$

где ω – циклическая частота затухающих колебаний:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \qquad (6.3)$$

Амплитуда затухающих колебаний (рис. 6.2):

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

Затухающие колебания Процесс релаксации

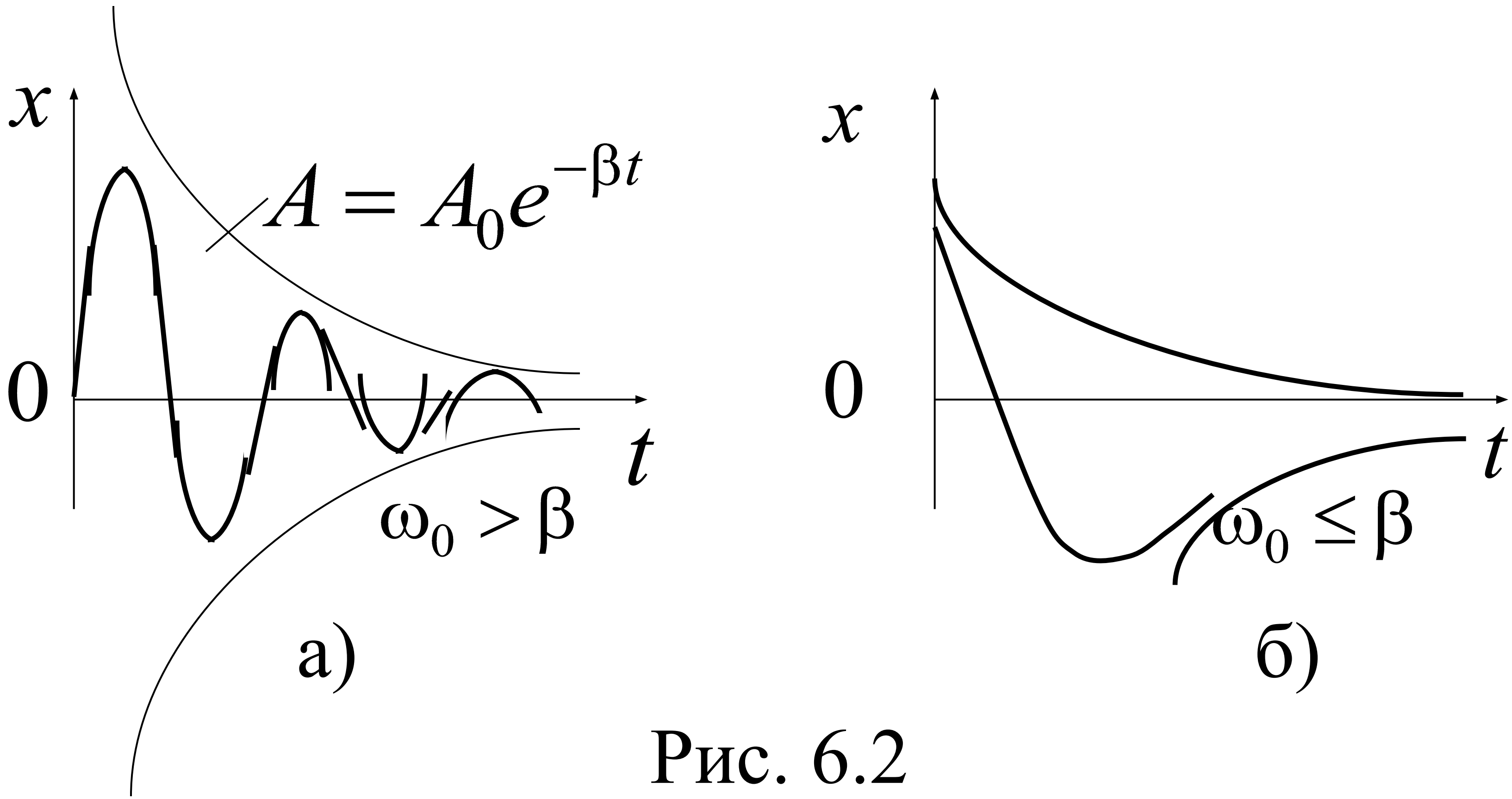

Рис. 6.2

Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Если затухание велико ($\omega_0 \leq \beta$), то при выводе системы из положения равновесия колебания не возникают – она возвращается в состояние равновесия в процессе, называемом процессом релаксации.

Декремент затухания характеризует относительное уменьшение амплитуды колебаний за период

$$D = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T} \qquad (6.4)$$

Логарифмический декремент затухания:

$$\lambda_D = \ln D = \ln e^{\beta T} = \beta T \qquad (6.5)$$

Время релаксации

$$\tau = 1/\beta$$

За это время амплитуда уменьшается в *e* раз. Число колебаний, совершаемых системой за время релаксации

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T} = \frac{1}{\lambda_D}$$

Добротность колебательной системы:

$$Q=\frac{\pi}{\lambda_D}=\frac{\pi}{\beta T}=\pi N_e \qquad\qquad Q \sim N_e$$

Фазовая траектория затухающих колебаний на рис. 6.3.

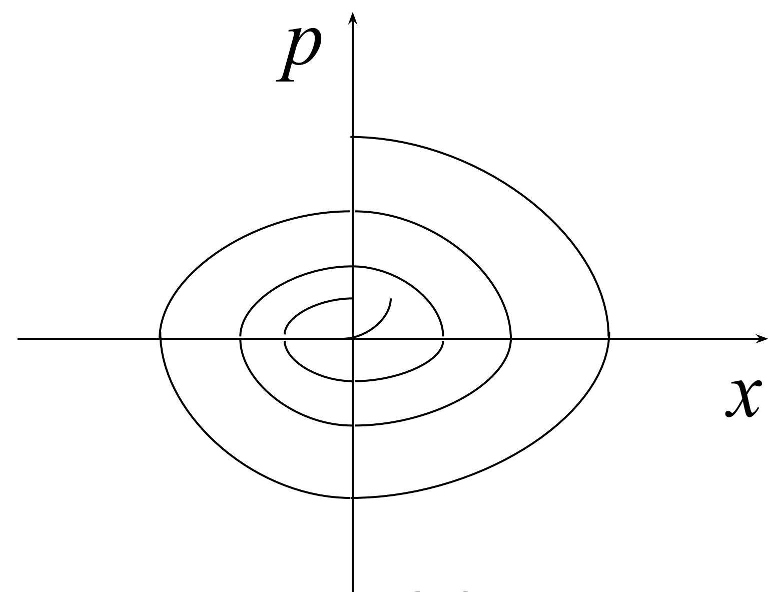

Рис. 6.3

Вынужденные колебания

Чтобы возбудить в реальной колебательной системе незатухающие колебания, необходимо компенсировать потери энергии, обусловленные силами сопротивления. Для этого на систему (рис. 6.4) воздействуют переменной внешней силой $\vec{F}$, в простейшем случае изменяющейся по гармоническому закону:

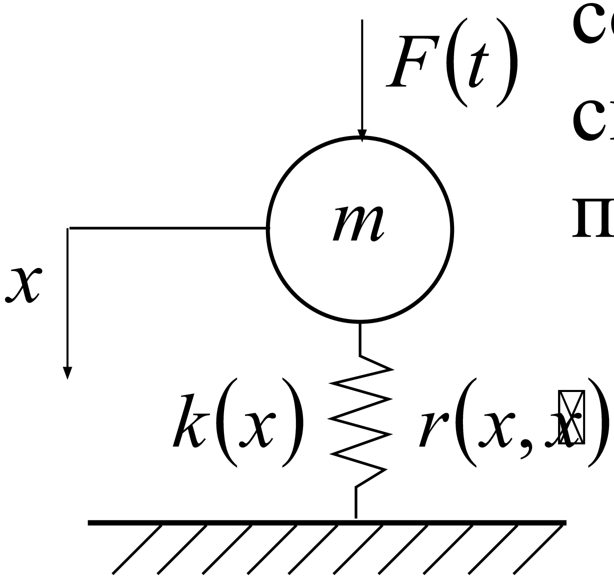

Рис. 6.4

$$F_x = F_0 \cos \Omega t$$

где Ω – частота вынуждающей силы.

Поведение системы описывается ДУ:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t \qquad (6.6)$$

$$f_0 = \frac{F_0}{m}$$

Установившиеся вынужденные колебания

Опыт показывает, что через некоторое время после начала действия вынуждающей силы в системе устанавливаются гармонические колебания с частотой вынуждающей силы, но отстающие от нее по фазе. Общее решение уравнения (6.6) может быть представлено в виде суммы решения уравнения свободных затухающих колебаний и установившихся колебаний. Для установившихся колебаний имеем:

$$x = A\cos(\Omega t - \alpha) \tag{6.7}$$

где A – амплитуда колебаний объекта массой m, α – сдвиг фаз между колебаниями объекта и внешней силой $F(t)$.

Продифференцируем (6.7) по времени:

$$\dot{x} = -A\Omega\sin(\Omega t - \alpha) = A\Omega\cos\left(\Omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\ddot{x} = -A\Omega^2\cos(\Omega t - \alpha) = A\Omega^2\cos(\Omega t - \alpha + \pi)$$

Чтобы найти A и α, подставим решение (6.7) в ур-е (6.6):

$$\underbrace{A\Omega^2}_{|C_1|}\cos(\Omega t-\alpha+\pi)+\underbrace{2\beta A\Omega}_{|C_2|}\cos\left(\Omega t-\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+\underbrace{\omega_0^2 A}_{|C_3|}\cos(\Omega t-\alpha)=\underbrace{\frac{F_0}{m}}_{|C_4|}\cos\Omega t \qquad (6.8)$$

Правая часть (6.8) – результат сложения трех гармонических колебаний, описанных в его левой части. Сложение произведем при помощи графического построения.

Построим векторную диаграмму при t=0.

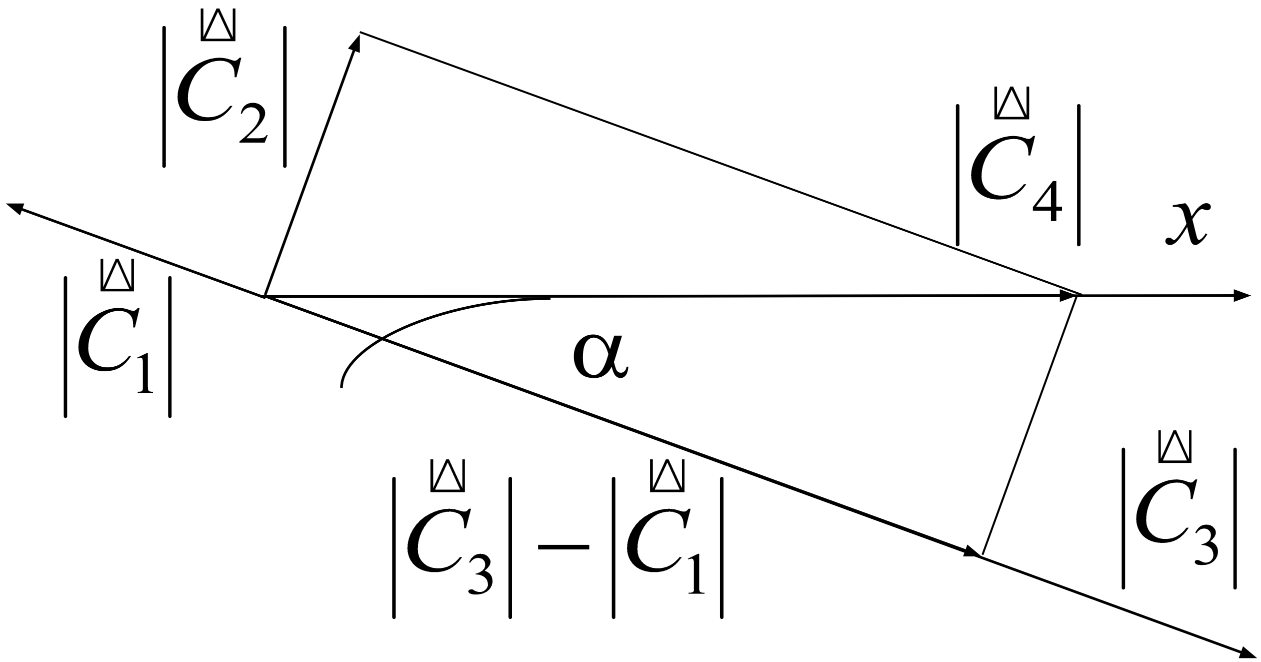

Рис. 6.5

$$C_4^2 = C_2^2 + \left(C_3 - C_1\right)^2$$

$$\frac{F_0^2}{m^2} = 4\beta^2 A^2 \Omega^2 + \left(A\omega_0^2 - A\Omega^2\right)^2$$

откуда значение амплитуды

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \qquad (6.9)$$

Из векторного многоугольника (см. рис. 6.5) находим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{C_2}{\left(C_3 - C_1\right)}$$

Начальная фаза

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

Механический резонанс

Резонанс – физическое явление, состоящее в резком возрастании амплитуды установившихся вынужденных колебаний системы, вызываемое вынуждающей силой с некоторой характерной частотой, называемой *резонансной*.

Из условия экстремума функции $A(\Omega)$

$$\frac{\mathrm{d}\,A(\Omega)}{\mathrm{d}\,\Omega}=0,$$

определим резонансную частоту.

Найдем частоту вынуждающей силы, при которой амплитуда установившихся вынужденных колебаний будет максимальной, и, следовательно, выражение в знаменателе (6.9) примет минимальное значение. Исследуем на экстремум знаменатель выражения (6.9).

$$\frac{1}{2}\left[2\left(\omega_0^2-\Omega_p^2\right)\left(-2\Omega_p\right)+8\beta^2\Omega_p\right]=0$$

Резонансная частота $\Omega_p \neq 0$:

$$-4\left(\omega_0^2-\Omega_\text{р}^2\right)+8\beta^2=0,$$

$$\omega_0^2-\Omega_\text{р}^2-2\beta^2=0,$$

откуда **резонансная частота**

$$\Omega_\text{р}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2} \qquad (6.10)$$

Подставив (6.10) в (6.9) определим **амплитуду резонанса**

$$A_\text{р}=\frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}} \qquad (6.11)$$

При $\beta \to 0$ из (6.11) следует, что $A_р \to \infty$. Из (6.10) следует, что при $2\beta^2 > \omega_0^2$ резонанс не наблюдается (рис. 6.6). При $\Omega \to 0$,

$$A(\Omega) \to \frac{F_0}{m\omega_0^2};$$

при $\Omega \to \infty$, $A(\Omega) \to 0$

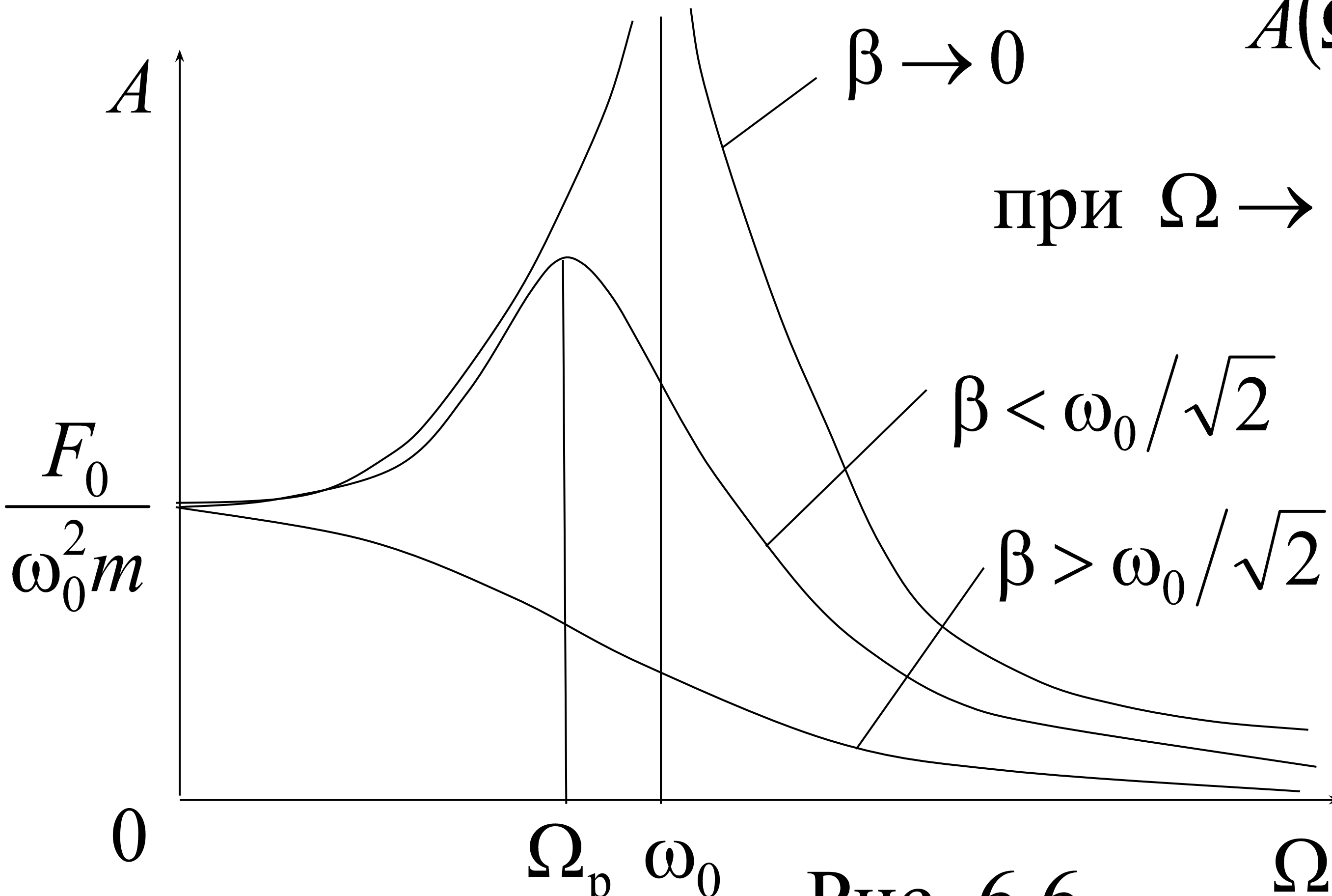

Рис. 6.6