

**Математик на фабрике обоев
или
алгоритмическое рисование узоров**

Смирнов Артемий МАОУ ОЦ «Горноста́й» 4ж класс

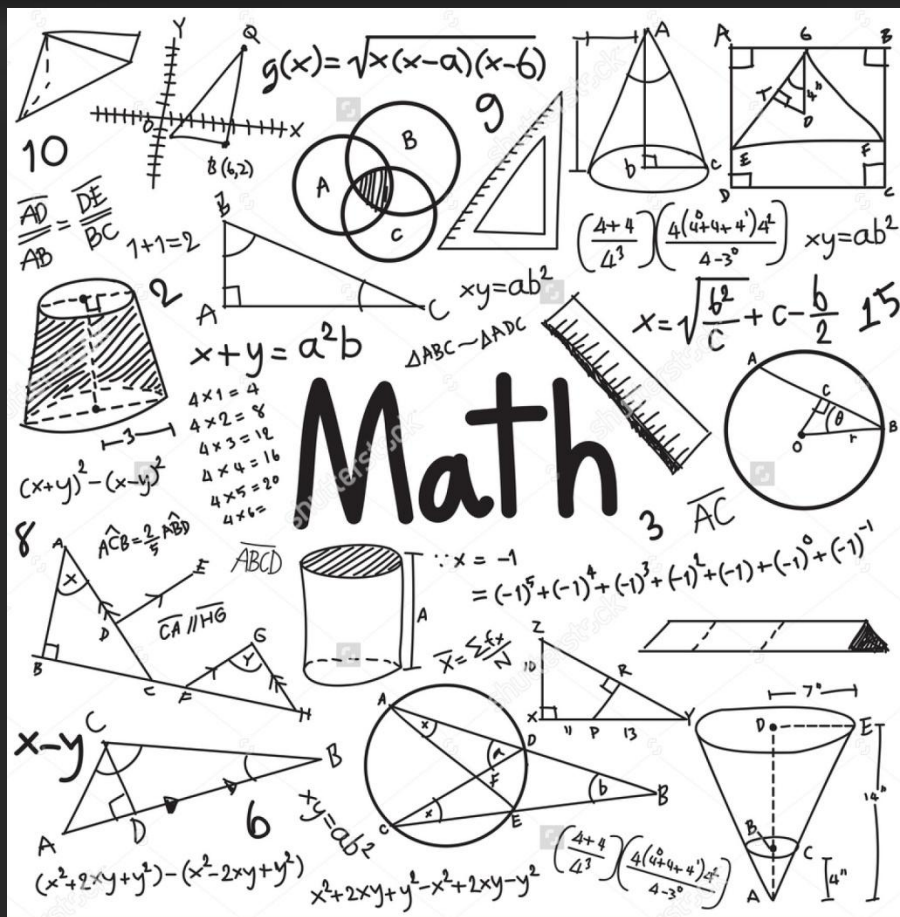
Выбор темы

Я выбрал эту тему,
потому что люблю
математику и люблю
экспериментировать.



Цель проекта

Понять, как
рисуются узор с
помощью формул



Задачи проекта



Разработать простой алгоритм, позволяющий создавать узоры;



Написать программу, рисующую узоры по этому алгоритму;



Используя программу, получить разные виды узоров

Несерьезно о серьезном

Французский математик Паскаль, сказал, что математика является слишком серьезной наукой и поэтому необходимо использовать любые возможности, чтобы сделать ее более занимательной.



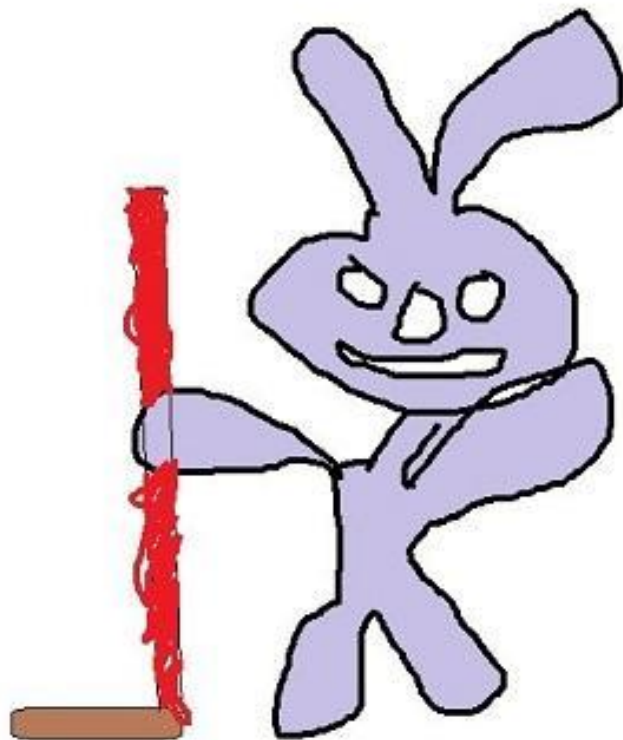
Жил был математик.
Он решил устроиться на работу



Была только одна вакансия – дизайнер на фабрике обоев



Но рисовать он совсем не умел



Поэтому он решил рисовать с
ПОМОЩЬЮ...

$$\langle \phi_n | \phi_n \rangle = \langle \phi_n | \int dx |x\rangle \langle x| \phi_n \rangle$$

$$\phi_n(x) = \langle x | \phi_n \rangle^{-1/2} \quad \phi_n'(x) = \phi_n / x$$

$$\langle \phi_n | \phi_n \rangle = \int dx |\phi_n(x)|^2 = \int dx \frac{1}{L} = L \cdot \frac{1}{L} = 1$$

$$\langle \phi_n | \phi_{n'} \rangle = \langle \phi_n | \phi_{n'} \rangle$$

$$\langle \phi_n | \phi_{n'} \rangle = \int_0^{+L/2} \int_{-L/2}^0 dx \dots$$

$$\langle \phi_n | \phi_{n'} \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} dx \dots$$

$$\psi_a - \psi_b = 0, 2\pi, \dots \Rightarrow e^{i\psi_a} = e^{i\psi_b} \quad \{ |R\rangle, |L\rangle \}$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{i\psi_0} \left(e^{i(\frac{2\pi}{L}n + k_0)x} + e^{-i(\frac{2\pi}{L}n + k_0)x} \right)$$

$$\rho = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{L}$$

$$k_n = \frac{h}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{L} n \right)$$

$$\psi_n(x = \pm L/2) = 0$$

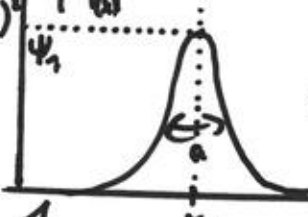
$$\frac{2}{L} \sin \left[\frac{2\pi}{L} n x \right]$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(\frac{2\pi}{L} n \right)$$

Формул!

$$|\psi(x)|^2 = |\psi_0|^2 e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-Ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{A}}$$

$$A = \frac{1}{2a^2} \Rightarrow |\psi_0| = \frac{1}{(2\pi a^2)^{1/4}}$$


$a \approx 10^{-10} \text{ m}$

$$\hat{H} \psi_a = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi_a(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{2a^2} \psi_a(x) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{4a^4} (x-x_0)^2 \psi_a(x)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{1}{2a^2} + \left(\frac{1}{2a^2} (x-x_0) \right)^2 e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2}} \right) \psi_a$$

$$\hat{H} \psi_a = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{2a^2} \psi_a = E_a \psi_a$$

$$\hat{H} \rightarrow \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + V(x); \quad \hat{H} \psi_a = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{2a^2} \psi_a = E_a \psi_a$$

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 (x-x_0)^2 \rightarrow m \omega^2 = \frac{\hbar^2}{m 4 a^4} \Rightarrow \omega = \frac{\hbar}{2ma}$$

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{2a^2}$$

$$[\hat{p}, \hat{x}] = \frac{\hbar}{i}; \quad \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \partial_x; \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2$$

На экране компьютера у каждой точки
есть координаты: по оси x и по оси y

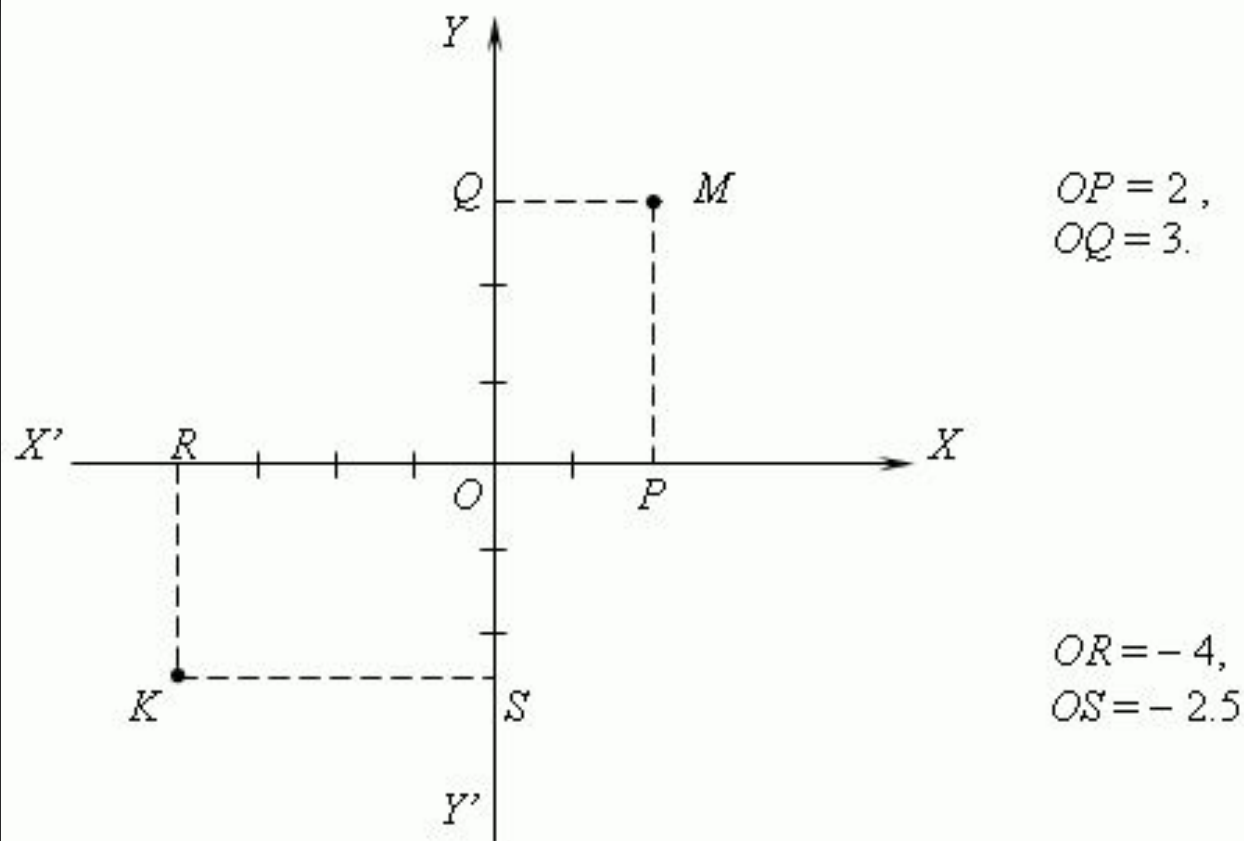


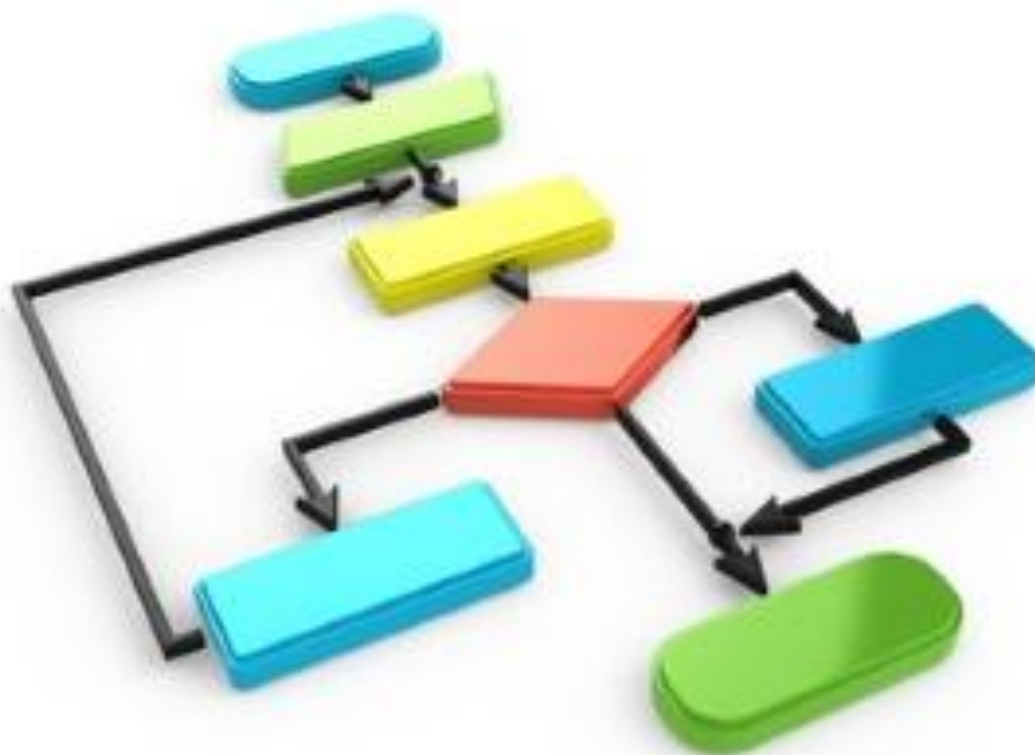
Рис. 1

Если придумать алгоритм, который
окрашивает точки в зависимости от их
координат...



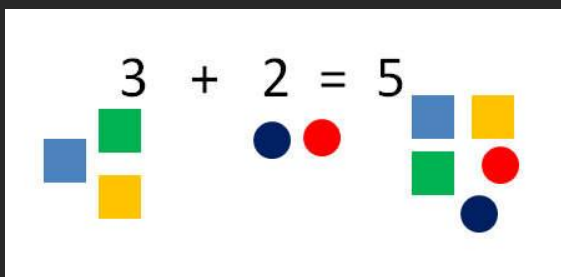
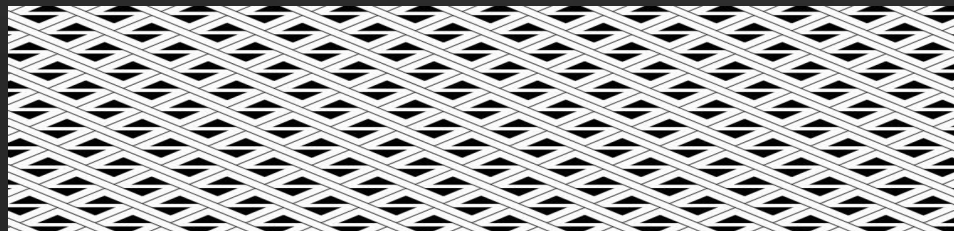
...то получится узор

Алгоритм – это определенная последовательность действий для выполнения задачи



Требования к алгоритму

- Количество окрашенных и неокрашенных точек примерно одинаково;



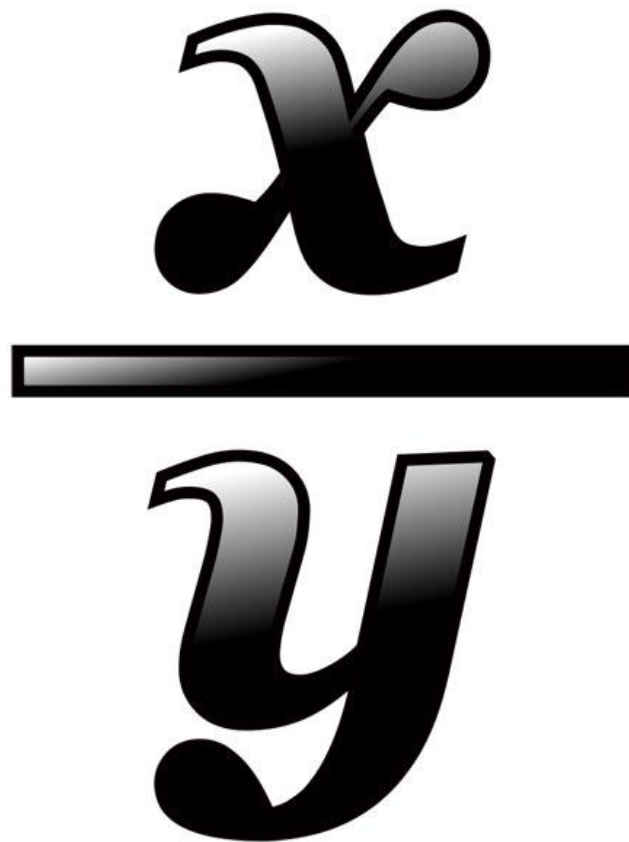
- Алгоритм включает только простейшие математические операции: «+», «-», «x», «/».

- Его должно быть легко изменить для получения нового узора



Описание алгоритма

1. Составляем математическое выражение из координат;



Описание алгоритма



2. Если две последних цифры значения выражения < 50 , то точка окрашивается в зеленый цвет. Иначе точка остается белой.

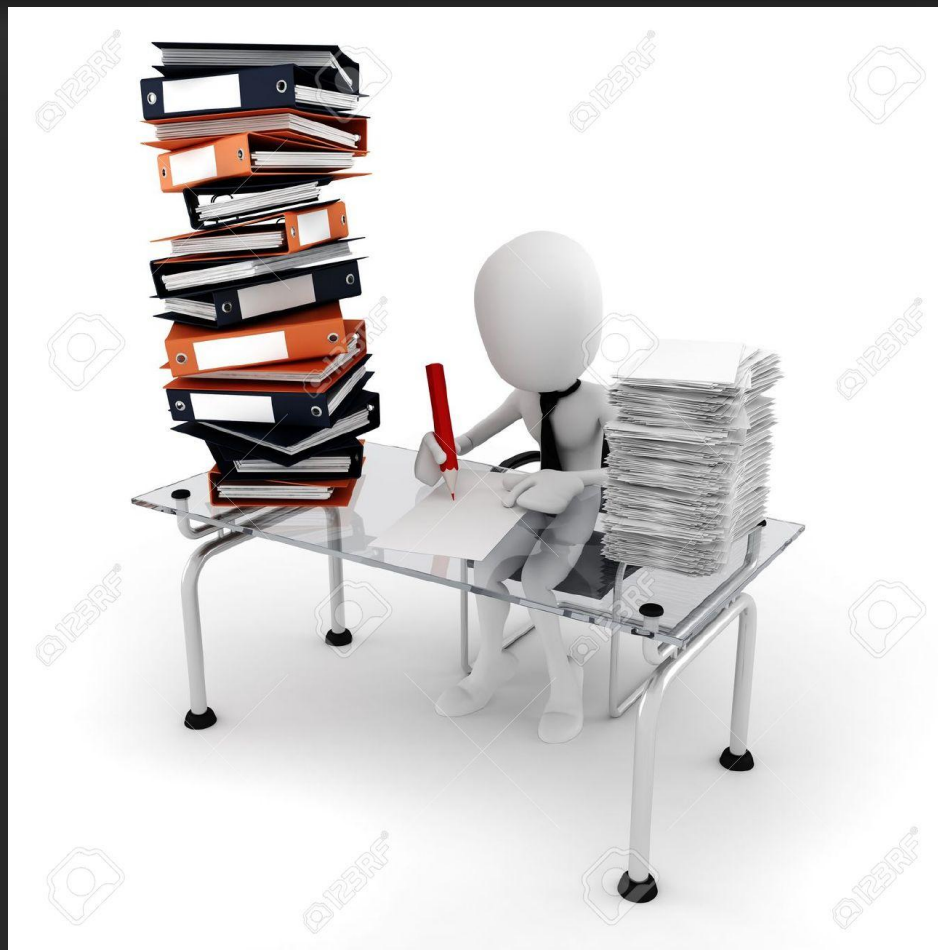
Метод решения задачи

Для решения задачи использовался один из простейших языков программирования Basic.



```
For X=1 To 500
  For Y=1 To 500
    If X*X+Y*Y-100*math.Floor((X*X+Y*Y)/100)<50
      Then GraphicsWindow.SetPixel(X,Y,"green")
    EndIf
  EndFor
EndFor
```


И математик принялся за работу!

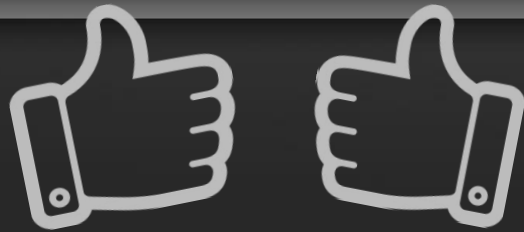


Он нарисовал свои первые обои – узор
«ПОЛОСЫ» с помощью выражения $x+y$

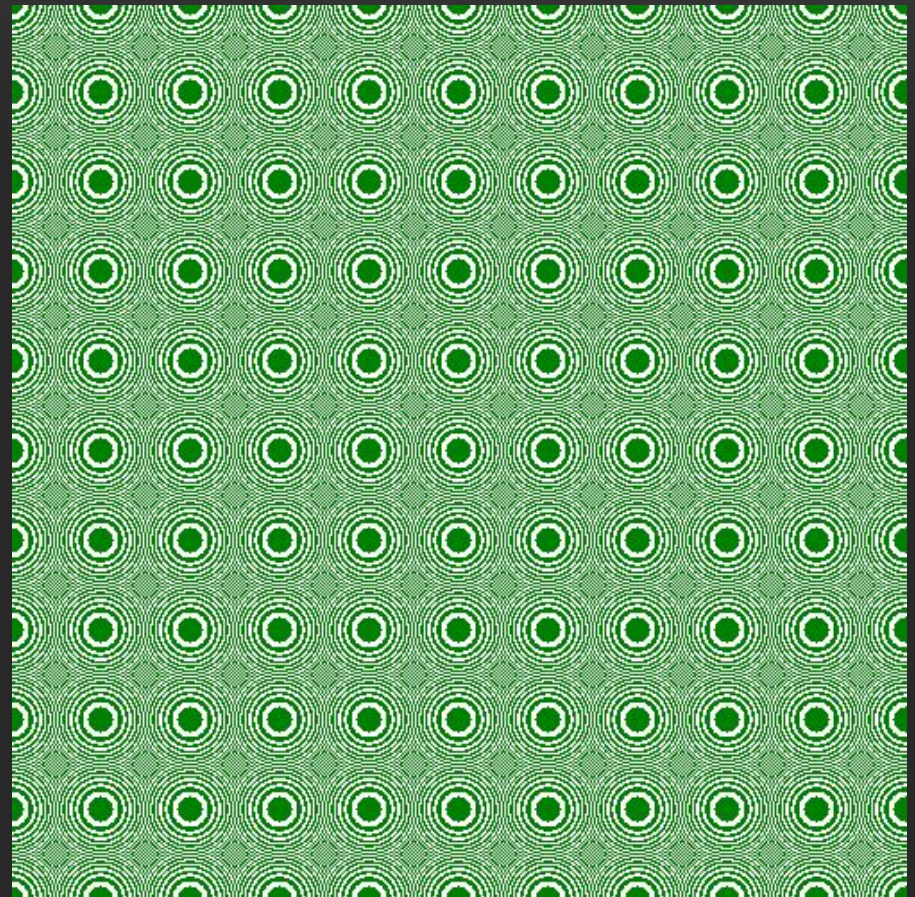


Ему сказали – хорошо!

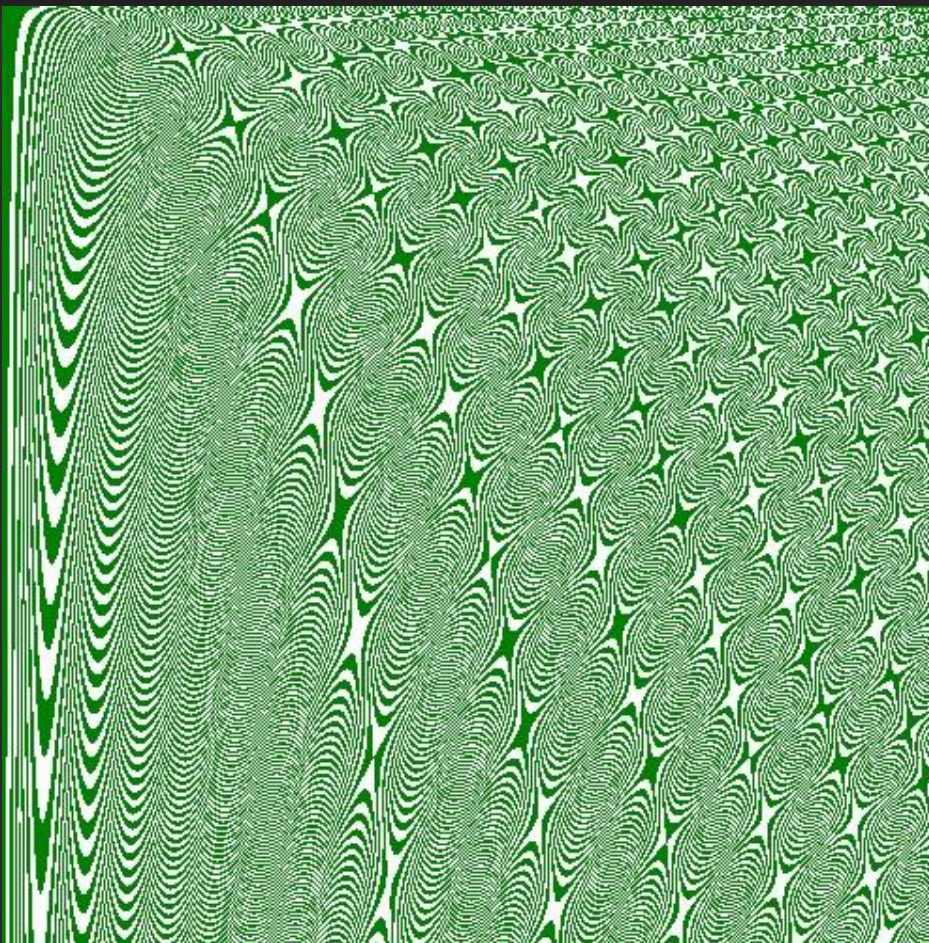
А можете какой-нибудь орнамент?



Не проблема! И
нарисовал узор
«концентрические
круги» с помощью
выражения
 x^2+y^2



Ему сказали – отлично! А можете более сложный и неповторяющийся узор?



Запросто!

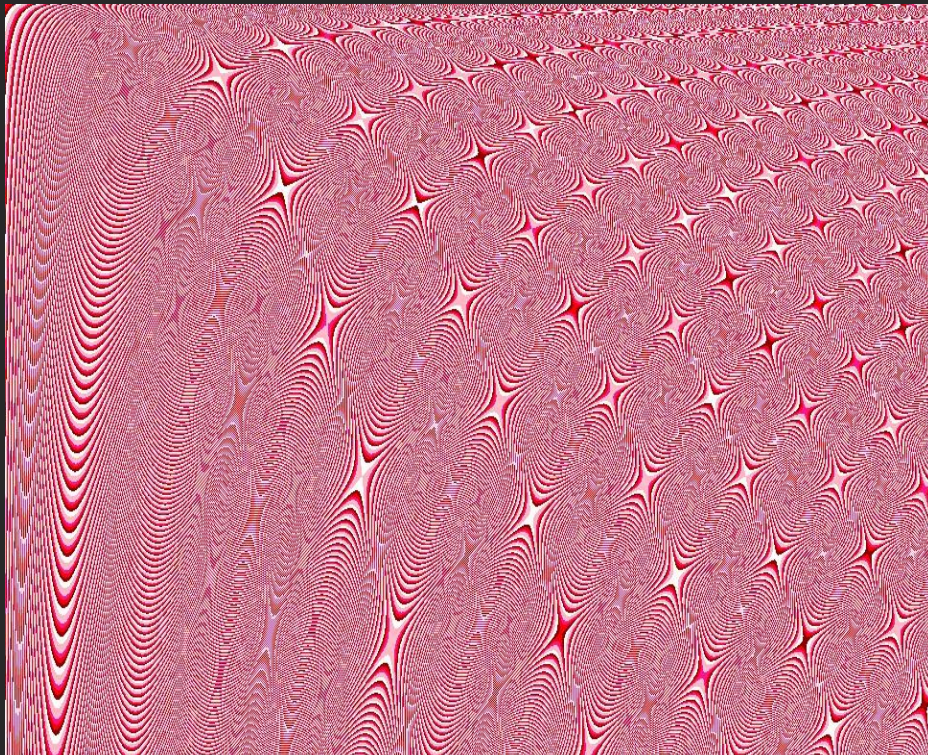
И нарисовал узор
«звезды» с
помощью
выражения
 $x+y*y*y*y$

Ему сказали – замечательно! А можете такие же звезды, но разноцветные?

Легко! И нарисовал разноцветные «звезды» с помощью выражения



$x+y*y*y$ и
множественного
условия на две
последние цифры:
от 0 до 20 – цвет 1, от
20 до 40 – цвет 2, и
т.д.



Результат проекта



Алгоритм разработан;



Программа написана;



Подобраны выражения, дающие
разные узоры

Направления развития проекта

Использование более сложных функций и получение более сложных узоров.

Картина
компании Google,
нарисованная с
помощью
компьютерного
алгоритма



Применение алгоритмического рисования на практике

- Дизайн отделочных материалов



- Защитные узоры для бумажных денег



- Дизайн тканей, одежды



- Разработка текстур для дизайна различных устройств

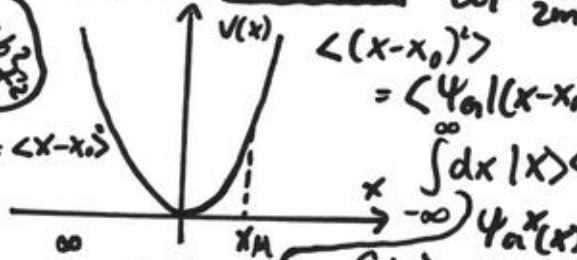


И, пожалуй, самое важное
практическое применение...

Это решение нестандартных задач с помощью
ограниченного количества ресурсов!



Спасибо за
внимание!

$\langle \phi_n | \phi_n \rangle = \langle \phi_n | \int dx |x\rangle \langle x| \phi_n \rangle$ $\varphi_a - \varphi_b = 0, 2\pi \dots \Rightarrow e^{i\varphi_a} = e^{i\varphi_b}$ $\{ |R\rangle, |L\rangle \}$ $\| \psi \|^2 = \langle \psi | \psi \rangle$
 $\phi_n(x) = \langle x | \phi_n \rangle^{-1/2}$ $\phi_n^*(x) = \phi_n(x)$ $\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{i\varphi_0} \left(e^{i(\frac{2\pi}{L}n + k_0)x} + e^{-i(\frac{2\pi}{L}n + k_0)x} \right)$ $\rho = \hbar \frac{2\pi}{\lambda}$
 $\langle \phi_n | \phi_n \rangle = \int dx |\phi_n(x)|^2 = \int dx \frac{1}{L} = L \cdot \frac{1}{L} = 1$ $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \dots$
 $\langle \phi_n | \phi_{n'} \rangle = 0$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\langle \phi_n | \phi_{n'} \rangle = 0$ $[\frac{2\pi}{L}nx]$
 $\langle \phi_n | \phi_{n'} \rangle = 0$ $\psi(x)$
 $|\psi(x)|^2 = |\psi_0|^2$ $\psi(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{L}n \right)^2$
 $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-Ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{A}}$ $x_0)^2 \psi_a(x)$
 $A = \frac{1}{2a^2} \Rightarrow |\psi_0| = \frac{1}{(\frac{2\pi a^2}{\hbar^2})^{1/4}}$ $\frac{1}{m} \frac{1}{\hbar^2} (x-x_0)^2$
 $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 (x-x_0)^2 \rightarrow m \omega^2 = \frac{\hbar^2}{m^2 a^4} \Rightarrow \omega = \frac{\hbar}{2ma}$ $E_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{2a}$
 $[\hat{p}, \hat{x}] = \frac{\hbar}{i}$; $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \partial_x$ / $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2$
1. $a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib)$; $a, b \in \mathbb{R}$; 2. $(a\hat{p} + ib\hat{x})(a\hat{p} - ib\hat{x})$, $a, b \in \mathbb{R}$
 $= a^2 \hat{p}^2 + ib a \hat{x} \hat{p} - i a b \hat{p} \hat{x} + b^2 \hat{x}^2 = a^2 \hat{p}^2 + b^2 \hat{x}^2 - \hbar a b$
 $\hat{H} = (a\hat{p} + ib\hat{x})(a\hat{p} - ib\hat{x}) = \hbar a b$; $a^2 = \frac{1}{2m}$; $b^2 = \frac{1}{2} m \omega^2$
Def: $C^+ = \frac{1}{\sqrt{\hbar m \omega}} (a\hat{p} + ib\hat{x})$; $C^- = \frac{1}{\sqrt{\hbar m \omega}} (a\hat{p} - ib\hat{x}) \Rightarrow \hat{H} = \hbar \omega C^+ C^- + \frac{1}{2} \hbar \omega$
 $\left\{ \begin{pmatrix} \omega & \epsilon \\ -\epsilon & \omega \end{pmatrix} \mid \omega, \epsilon \in \mathbb{C} \right\} \cong SU(2) \cong S^3$ $A \rightarrow \omega \bar{A} \omega^{-1}$
 $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $S_1 = \frac{\hbar}{2} \sigma_1$; $S_2 = \frac{\hbar}{2} \sigma_2$; $S_3 = \frac{\hbar}{2} \sigma_3$; $i \in [1, 2, 3]$

 $\langle (x-x_0)^2 \rangle = \langle \psi_0 | (x-x_0)^2 | \psi_0 \rangle$
 $= \int dx |\psi_0(x)|^2 (x-x_0)^2$
 $= \int dx \psi_0^*(x) (x-x_0)^2 \psi_0(x)$
 $= \int dx (x-x_0)^2 |\psi_0(x)|^2$