

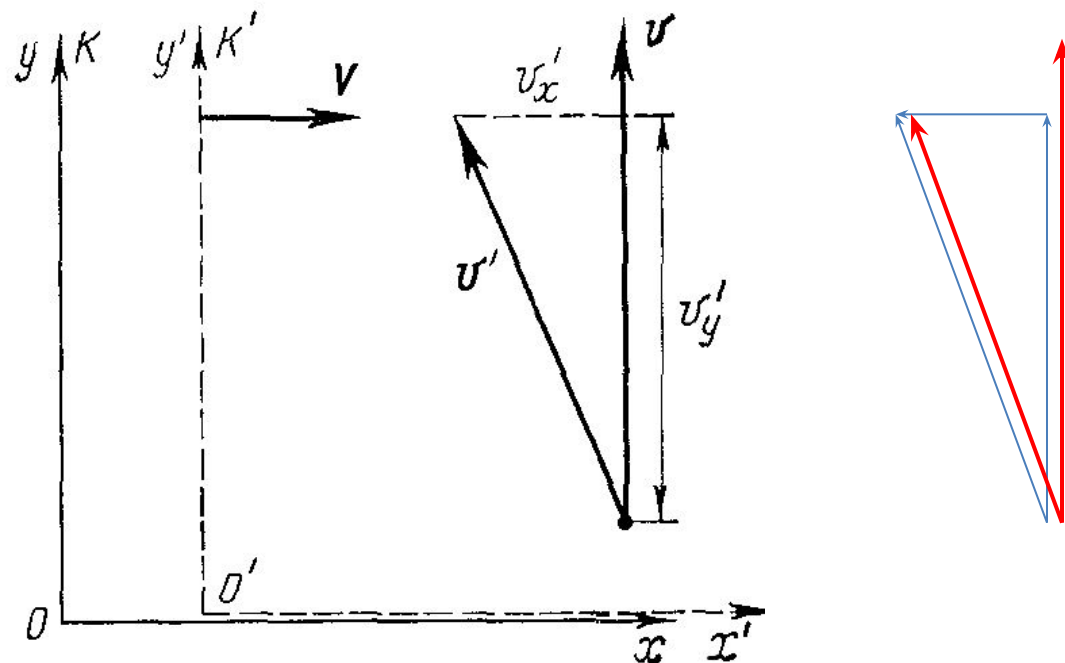
Лекция 9. ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

- элементы релятивистской динамики;
- взаимосвязь массы и энергии;
- связь между импульсом и энергией релятивистской частицы;
- основное уравнение релятивистской динамики;
- эффект Доплера;
- четырехвекторы;
- ОТО.

Релятивистское преобразование скорости

в K - системе:

$$v_x = 0 \text{ и } v_y = \bar{v}.$$



в K' - системе:

Согласно преобразованиям:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V / c^2} \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - v_x V / c^2}$$

$$v'_x = -V; \quad v'_y = v_y \sqrt{1 - \beta^2}$$

Таким образом

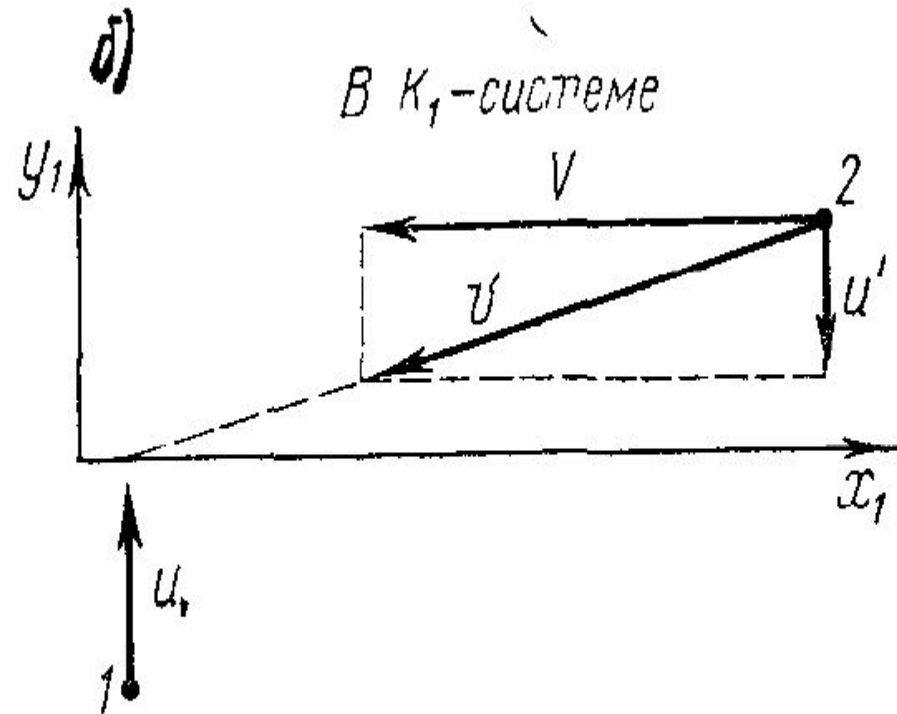
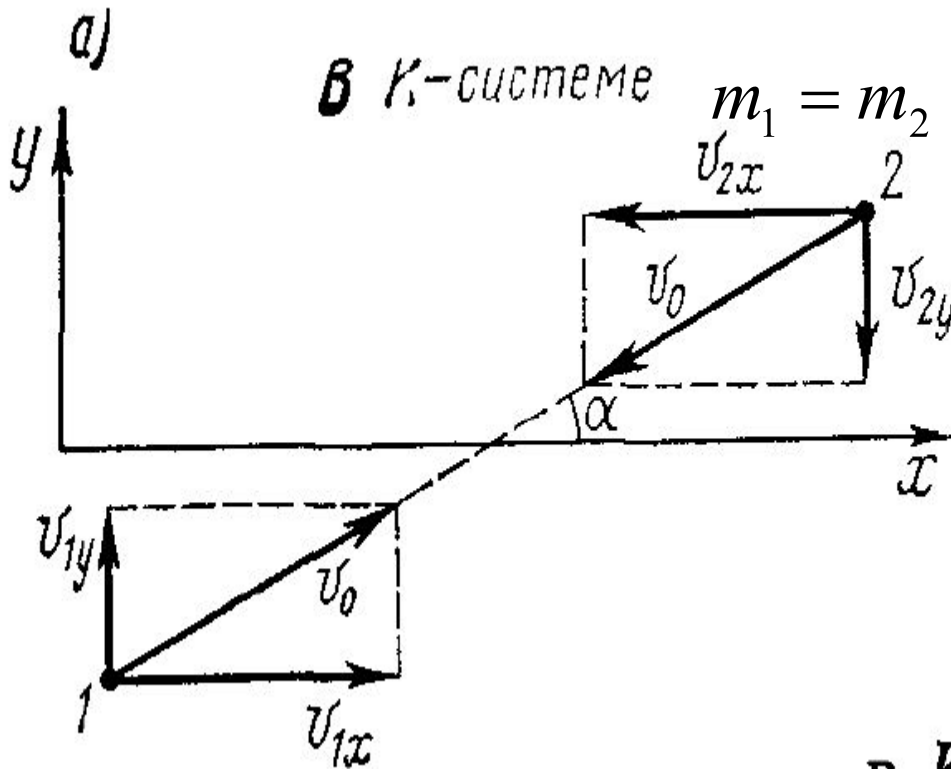
$$\vec{v}' \neq \vec{v} - \vec{V}$$

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА

Столкновение двух частиц

К - система неподвижна

K_1 - система движется направо



в K_1 -системе $u' = u \sqrt{1 - (V/c)^2}$.

ПОЛОЖИМ, ЧТО $m_1 u = m_2 u'$. Поскольку движения по оси Y нет для выполнения ЗСИ требуется:

$$m_2 = m_1 / \sqrt{1 - (V/c)^2}$$

V относительно K_1 -системы. Поэтому, согласно (6.16), y -составляющая скорости частицы 2 в K_1 -системе равна

$$u' = u \sqrt{1 - (V/c)^2}. \quad (7.1)$$

Запишем теперь y -составляющие импульсов обеих частиц в K_1 -системе: $m_1 u$ и $m_2 u'$. Согласно (7.1), $u' < u$, поэтому легко видеть, что закон сохранения импульса в его обычной (ньютоновской) формулировке не выполняется. Действительно, в нашем случае $m_1 = m_2$ (частицы одинаковые) и, следовательно, y -составляющая суммарного импульса частиц до столкновения отлична от нуля, а после столкновения равна нулю (образовавшаяся частица будет двигаться только вдоль оси x).

Потребуем, однако, чтобы закон сохранения импульса выполнялся и в K_1 -системе, т. е. положим, что $m_1 u = m_2 u'$. Отсюда с учетом (7.1) получим

$$m_2 = m_1 \sqrt{1 - (V/c)^2}.$$

Релятивистское выражение для импульса

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Здесь и далее $\beta = \frac{v}{c}$

Из уравнения

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

можно получить еще одно очень важное соотношение, связывающее полную энергию с импульсом частицы:

$$E = c \sqrt{m^2 c^2 + p^2}$$

или

$$E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4 = i h \nu$$

Вывод инвариантного соотношения для энергии и импульса

$$E^2 - p^2 c^2 = \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)^2 - m^2 v^2 c^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = m_0^2 c^4$$

По мнению некоторых, из последней формулы вытекает вывод о неправомерности широко распространенных представлений о возрастании массы при движении с большими скоростями

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Кинетическая энергия релятивистской частицы.

Вывод формулы

$$dT = Fv dt.$$

$$Fdt = d(mv) = dm \cdot v + m dv,$$

$$dT = v (dm \cdot v + m dv) = v^2 dm + mv dv,$$

где учтено, что $v dv = v dv$

Возведя в квадрат обе части формулы:

$$m = m_0 / \sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

получим: $m^2 c^2 = m^2 v^2 + m_0^2 c^2$

Найдем дифференциал этого выражения

m_0 и c — постоянные величины

$$2mc^2 dm = 2mv^2 dm + 2m^2 v dv,$$

сократив на $2m$ сравним

с выражением для dT .

$$dT = v (dm \cdot v + m dv) = v^2 dm + mv dv,$$

В результате получим:

$$dT = c^2 dm \qquad T = (m - m_0) c^2,$$

Приращение кинетической энергии равно приращению ее **массы**. Энергия покоя = $m_0 c^2$

Кинетическая энергия

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right)$$

$$T = E_{\text{полн}} - E_{\text{покоя}}$$

Полезные соотношения

$$E^2 - p^2 c^2 = \text{inv.}$$

$$p = m v = E v / c^2$$

$$pc = \sqrt{T(T + 2m_0 c^2)}.$$

Последнее соотношение при $T \ll m_0 c^2$ переходит в ньютоновское: $p = \sqrt{2m_0 T}$, а при $T \gg m_0 c^2$ приобретает вид $p = T/c$.

Взаимосвязь массы и энергии покоя

Масса и энергия покоя связаны соотношением:

$$E_0 = mc^2$$

из которого вытекает, что **всякое изменение массы Δm сопровождается изменением энергии покоя ΔE_0 .**

$$\Delta E_0 = c^2 \Delta m$$

Это утверждение носит название **взаимосвязь массы и энергии покоя** и стало **символом современной физики.**

Взаимосвязь между массой и энергией оценивалась А. Эйнштейном как самый значительный вывод специальной теории относительности. По его выражению, **масса должна рассматриваться как «сосредоточение колоссального количества энергии».**

При взаимодействии частиц суммарная масса взаимодействующих частиц не сохраняется.

Пример: пусть две одинаковые по массе частицы m движутся с одинаковыми по модулю скоростями навстречу друг другу и абсолютно неупруго столкнутся.

До соударения полная энергия каждой

частицы E равна:
$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Полная энергия образовавшейся частицы Mc^2 (эта новая частица имеет скорость $v = 0$).

Из закона сохранения энергии:

$$\frac{2mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = Mc^2$$

откуда M равно:

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1-\beta^2}} > 2m$$

Таким образом, **сумма масс исходных частиц $2m$, меньше массы образовавшейся частицы M !**

В этом примере, **кинетическая энергия частиц превратилась в эквивалентное количество энергии покоя**, а это привело к возрастанию массы

Приращение массы $\Delta M = \frac{\Delta K}{c^2}$

(это верно при отсутствии выделения энергии при соударении частиц).

Выражение «*масса покоя*» можно употребить как синоним «*энергия покоя*». Атомное ядро обычно состоит из N частиц с массами $m_1, m_2 \dots m_i$. Ядро не распадается на отдельные частицы, что означает наличие между частицами силовой связи друг с другом. Эту связь можно характеризовать энергией связи $E_{\text{св}}$.

Энергия связи – энергия которую нужно затратить, чтобы разорвать связь между частицами и разнести их на расстояние, при котором взаимодействием частиц друг с другом можно пренебречь:

$$E_{\text{св}} = c^2 \sum_{i=1}^n m_i - Mc^2 = c^2 \Delta M,$$

где **ΔM** – **дефект массы**.

$$\Delta M = (m_1 + m_2 + \dots + m_i) - M;$$

Видно, что $E_{\text{св}}$ будет положительна, если

$$M < \sum_{i=1}^n m_i$$

Частицы, для которых скорость близка к скорости света называются ультрарелятивистскими. Для них $E \gg mc^2$.

Такие частицы способны к множественному рождению других частиц (если ультрарелятивистские частицы присутствуют в космических лучах, то при их столкновении с атомами атмосферы возникают ливни рожденных частиц).

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} \text{ не утрачивает смысл и при } m = 0.$$

Тогда $E = cp$ и $v = c$.

Т.е. частицы с $m = 0$ (фотоны) движутся со скоростью света. Эти скорости являются для них врожденными.

Основное уравнение релятивистской динамики

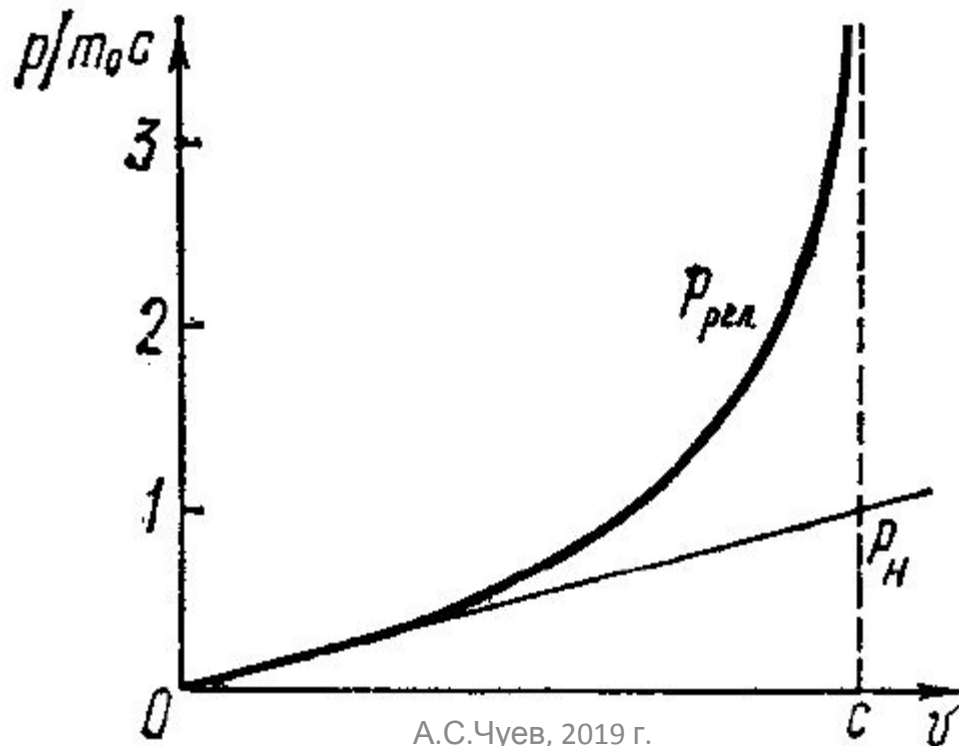
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right) = F$$

Соответствует общему уравнению:

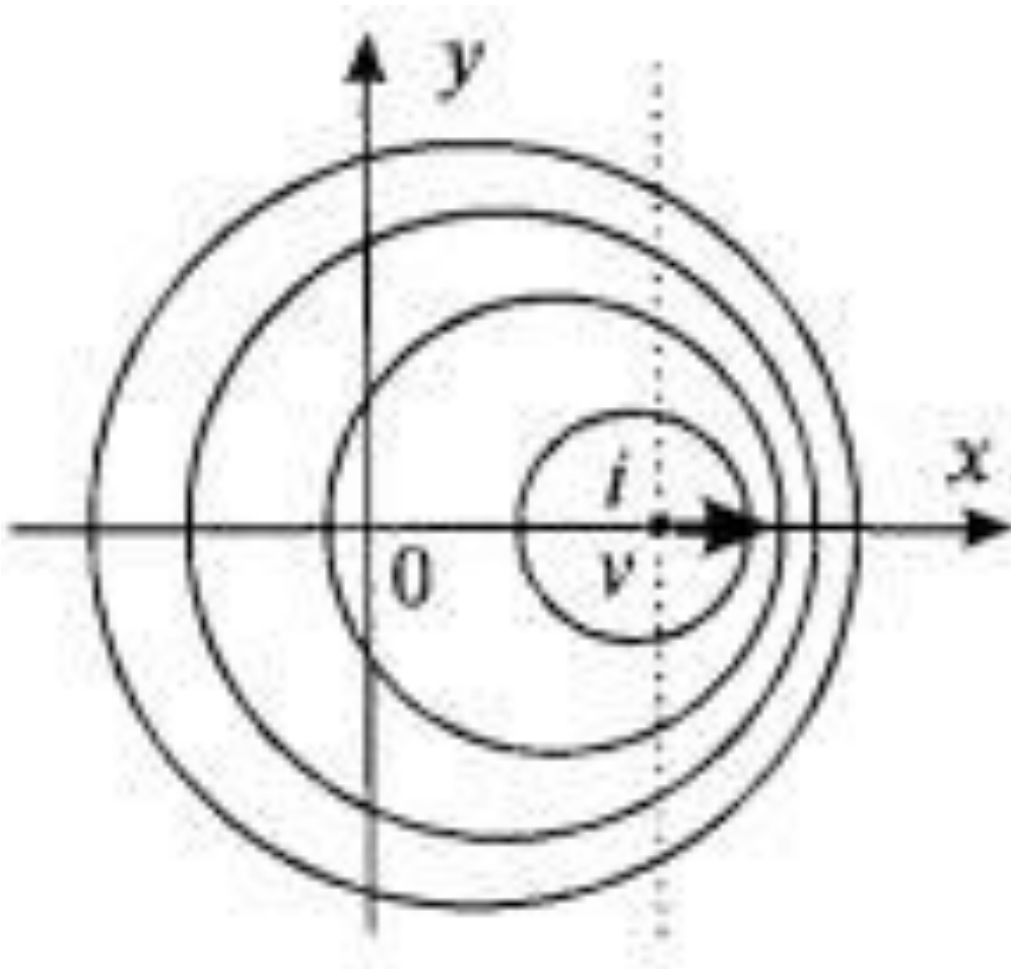
$$dp/dt = F$$

Эффект увеличения массы элементарных частиц, разгоняемых до больших скоростей на ускорителях

$$m = m_0 / \sqrt{1 - (v/c)^2}$$



Эффект Доплера



Изменение частоты:

$$\Delta \nu = \frac{u}{c} \nu_0$$

Эффект Доплера

Источник и приемник движутся по одной линии

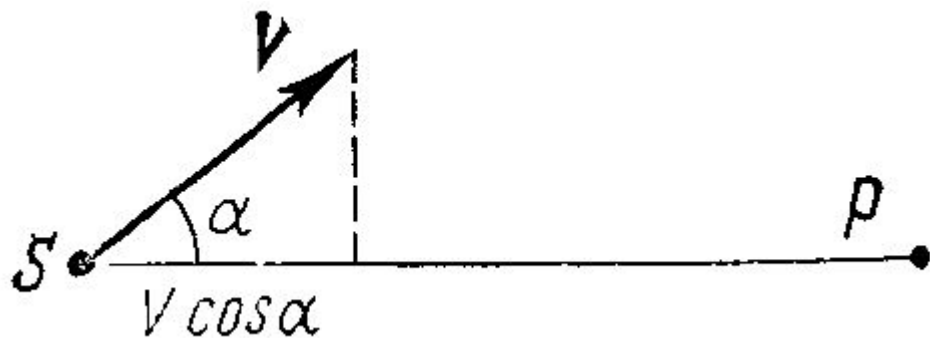
Воспринимаемая частота

$$\nu = \nu_0 \frac{1 - v_{\text{П}} / c_0}{1 - v_{\text{И}} / c_0}$$

Воспринимаемая длина волны при движении источника

$$\lambda = \frac{c_0}{\nu} = \frac{c_0}{\nu_0} \left(1 \pm \frac{v_{\text{И}}}{c_0} \right)$$

При движении источника под углом
в нерелятивистском случае:



$$v = v_0 \frac{1 \pm v_{\text{И}} \cos \alpha / c_0}{1 - (v_{\text{И}} \cos \alpha / c_0)^2}$$

В релятивистском случае наблюдается
поперечный эффект Доплера:

$$v = v_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 \pm \beta \cos \alpha}$$

при $\alpha = \pi/2$

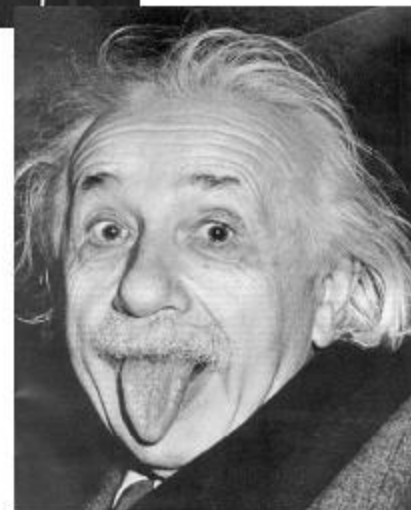
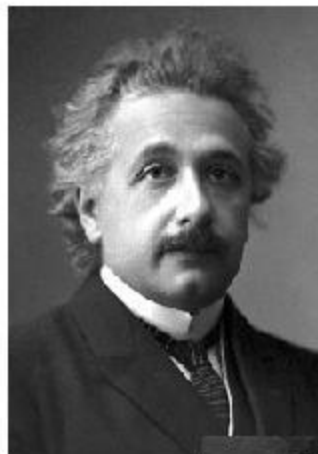
$$v = v_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

Далее материал
факультативный

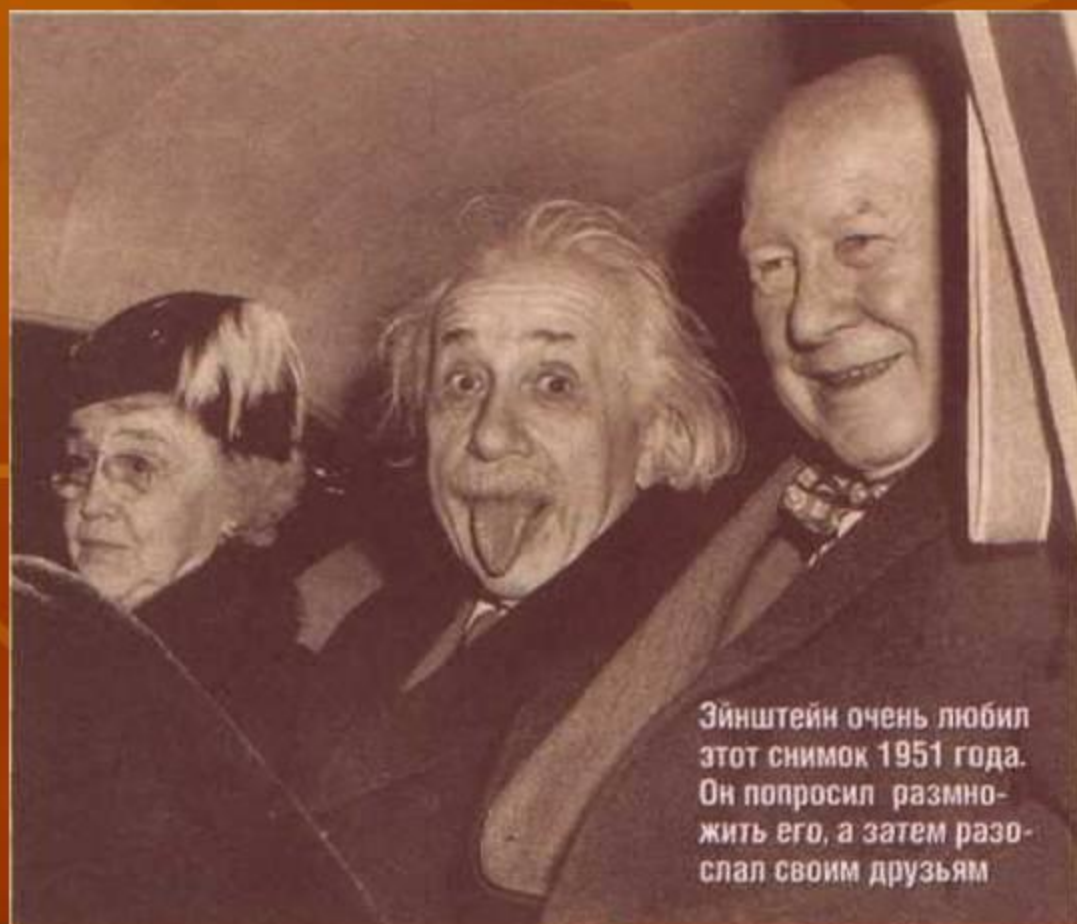
ОТО

Альберт Эйнштейн (1879-1955)

- Специальная теория относительности (СТО) - 1905 год
- Общая теория относительности (ОТО) - 2016 год.



Если бы человек смог однажды разогнаться до скорости света, ему удалось бы победить время и старость



Эйнштейн очень любил этот снимок 1951 года. Он попросил размножить его, а затем разослал своим друзьям

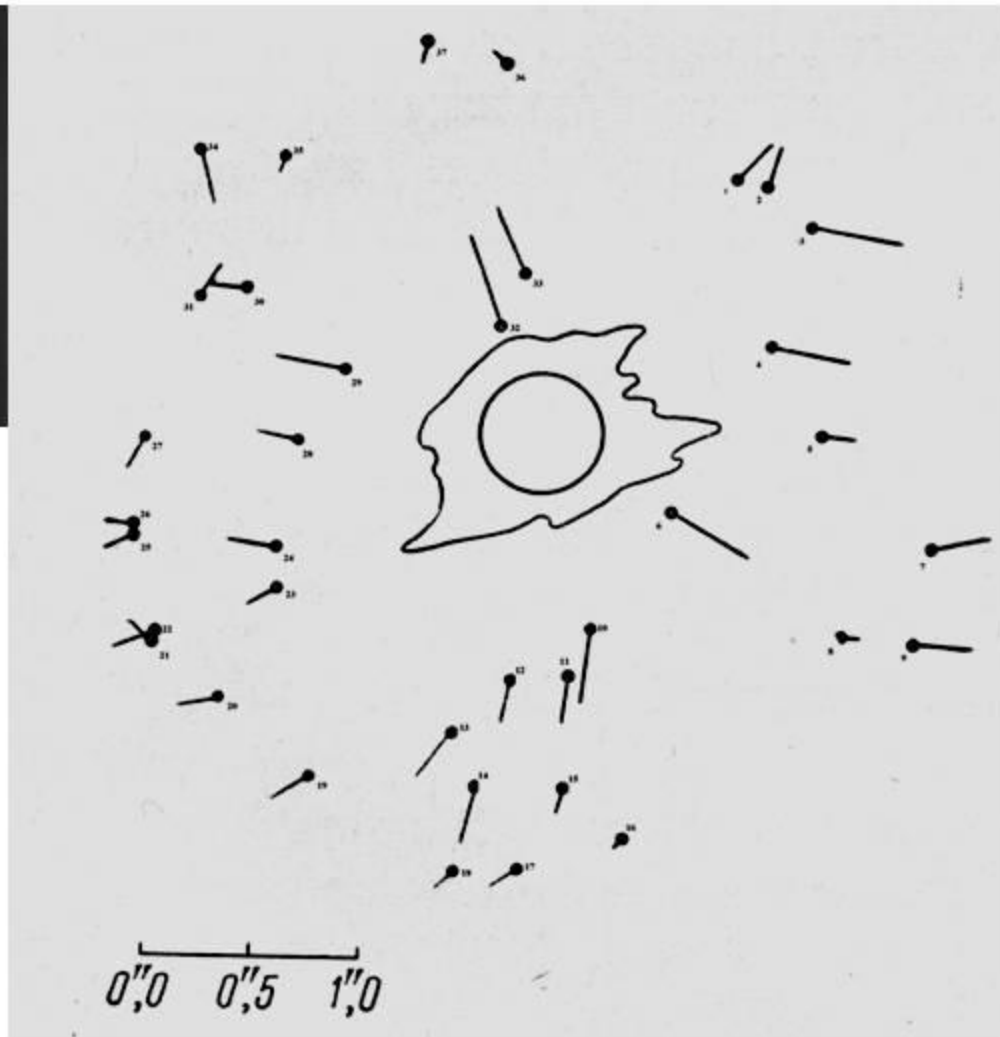
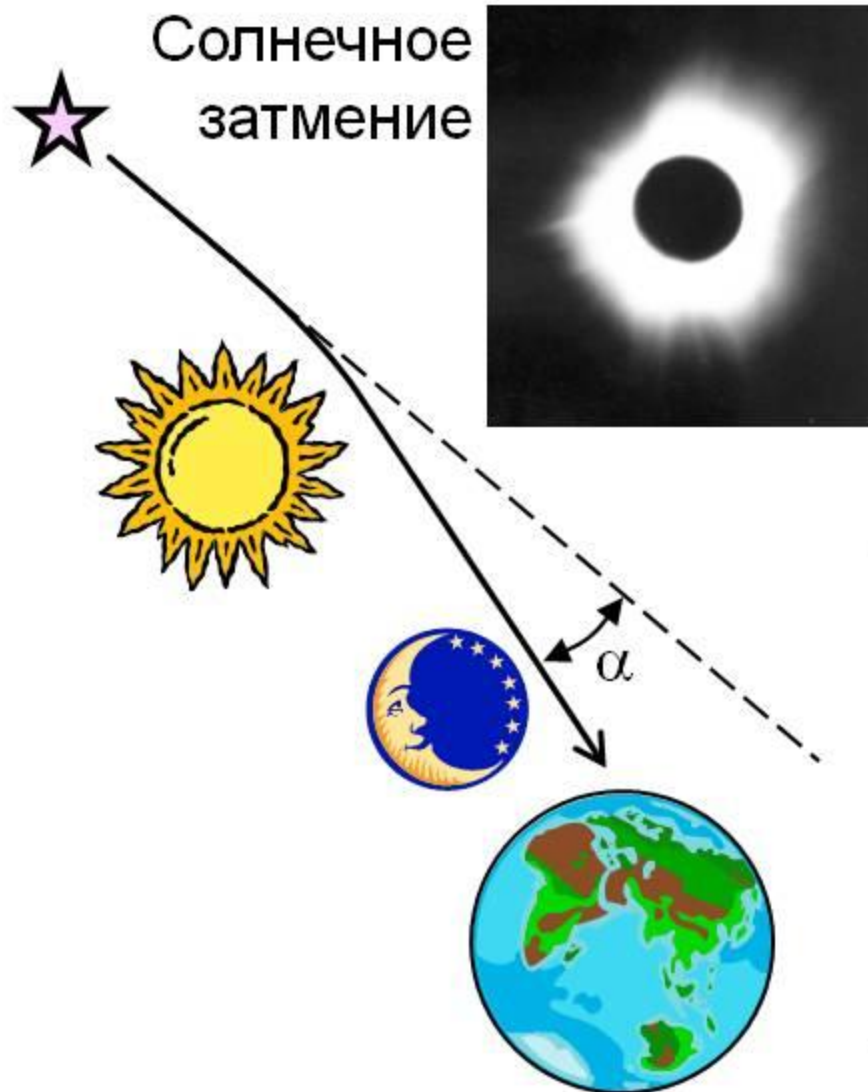
1916 г. Эйнштейн, обобщая идеи СТО создал теорию гравитации (ОТО): любой объект, обладающий энергией E , будет подвержен действию гравитационного поля как если бы он имел гравитационную массу m_g .

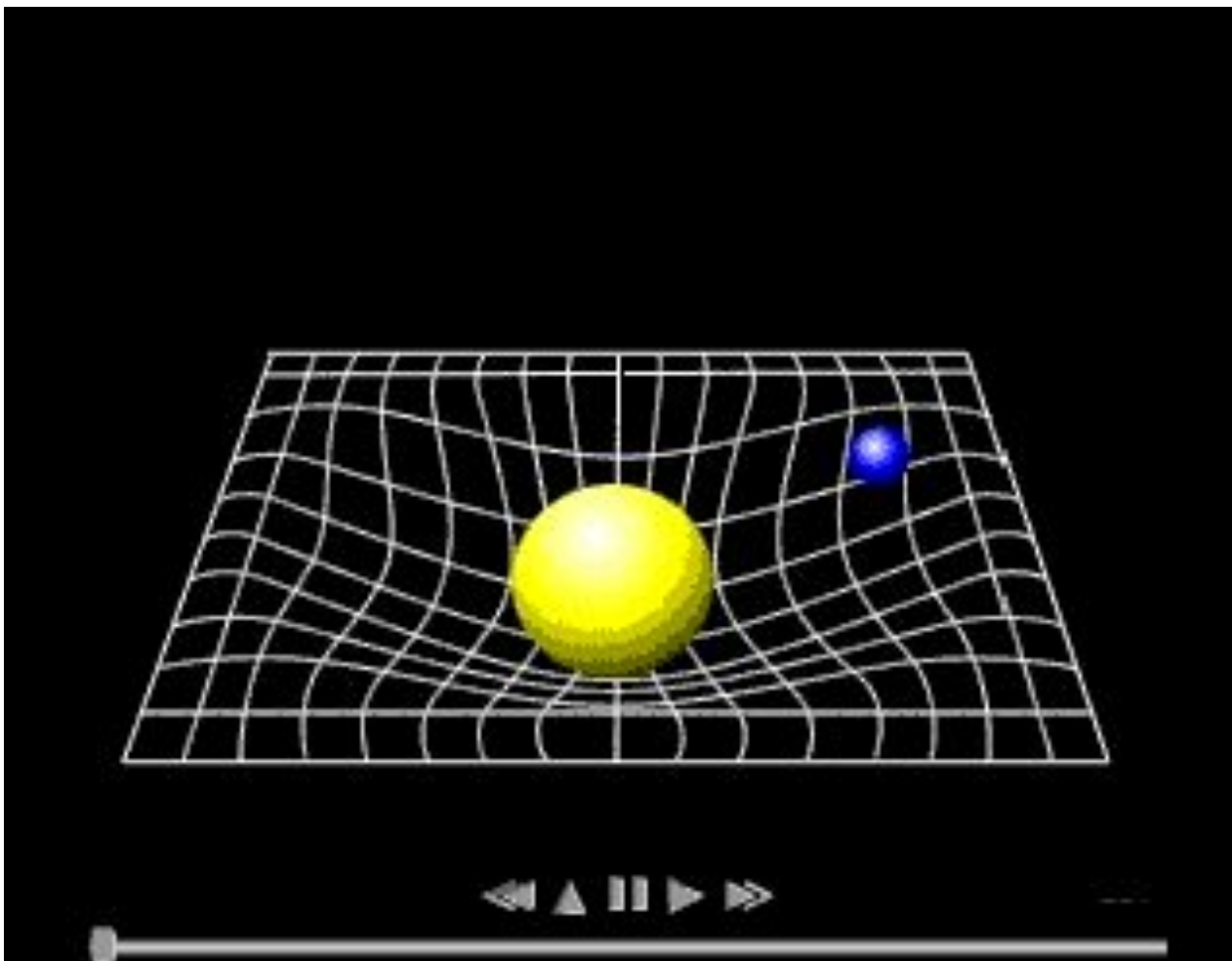
Связь m_g с энергией определяется: $E = m_g c^2$.

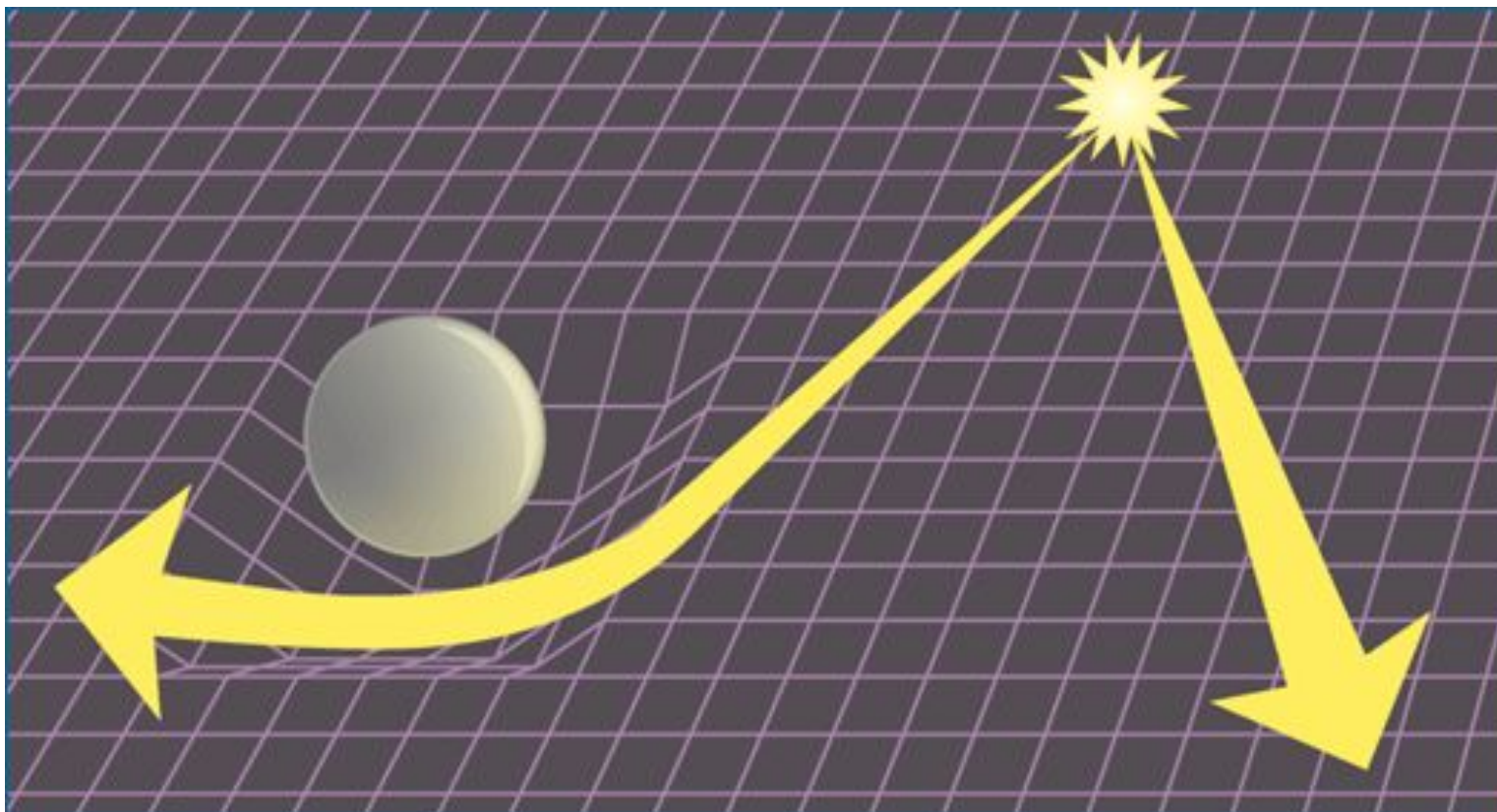
Масса фотона равна нулю, но в любом гравитационном поле он должен вести себя как частица с гравитационной массой

$$m_g = \frac{\hbar \omega}{c^2}.$$

Проверка общей теории относительности. Отклонение луча звезды Солнцем

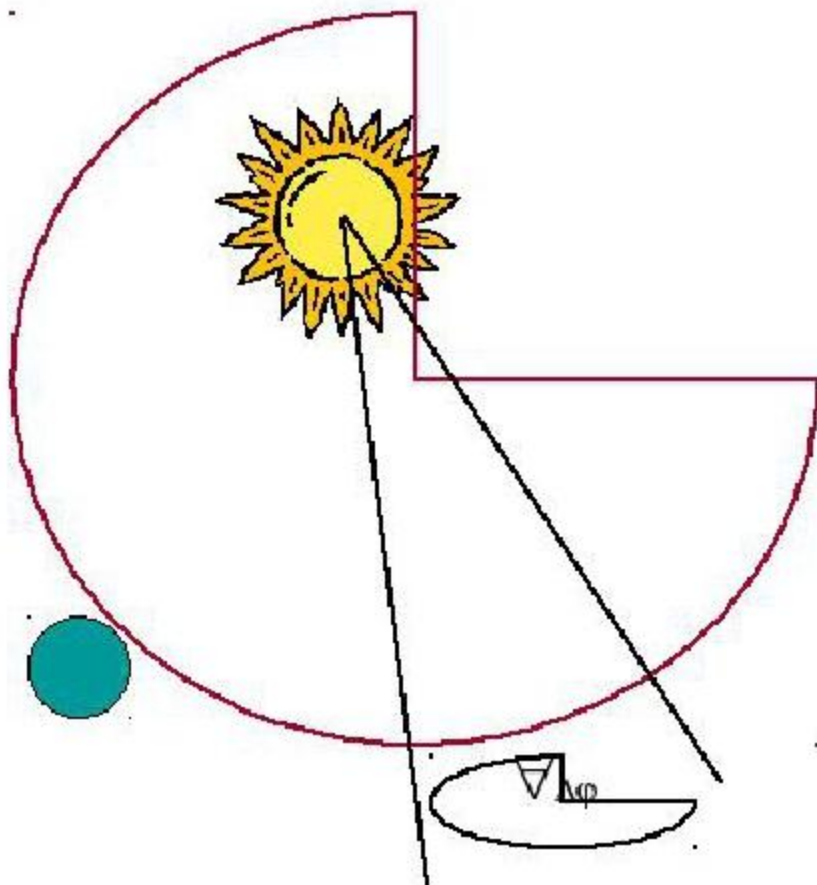




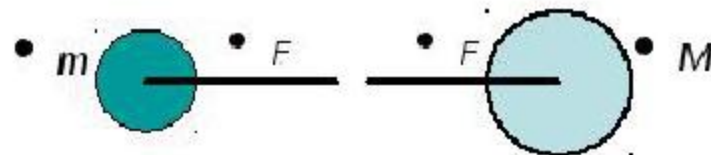


Проверка общей теории относительности.

- Круговое смещение орбиты Меркурия

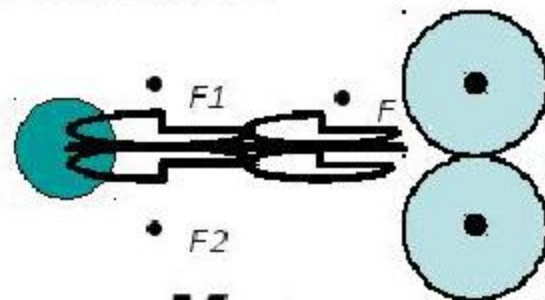


- 1. Материальные точки



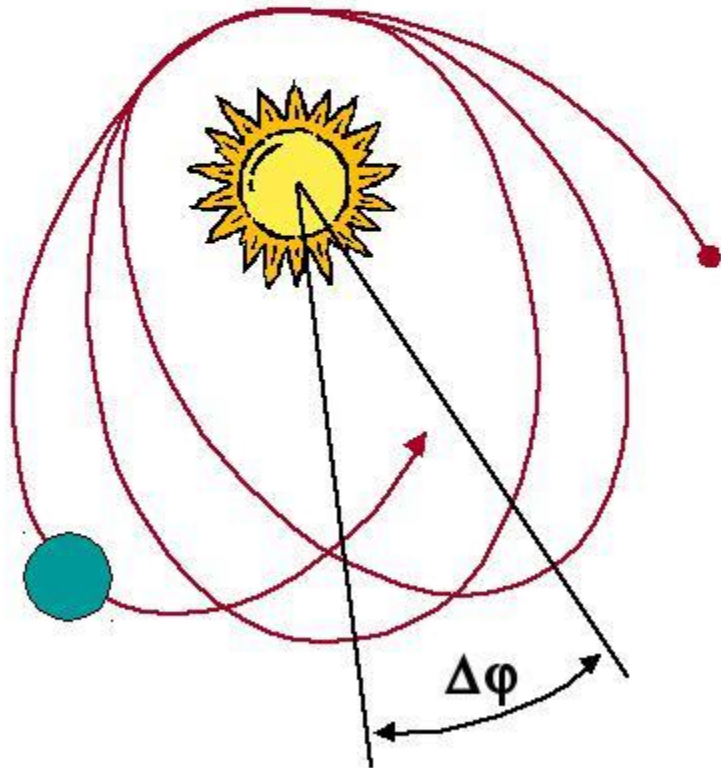
$$F = G \frac{Mm}{R^2}$$

- 2. Тела конечных размеров

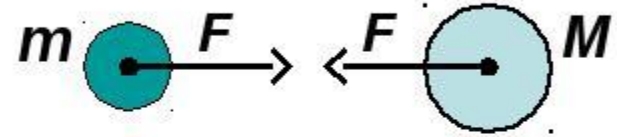


$$F \neq G \frac{Mm}{R^2}$$

Проверка общей теории относительности. Круговое смещение орбиты Меркурия

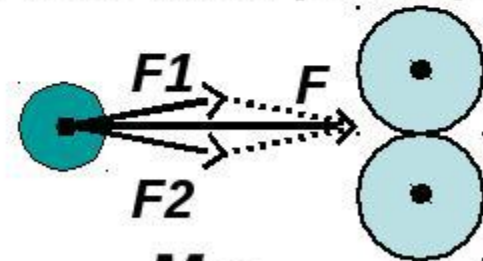


1. Материальные точки



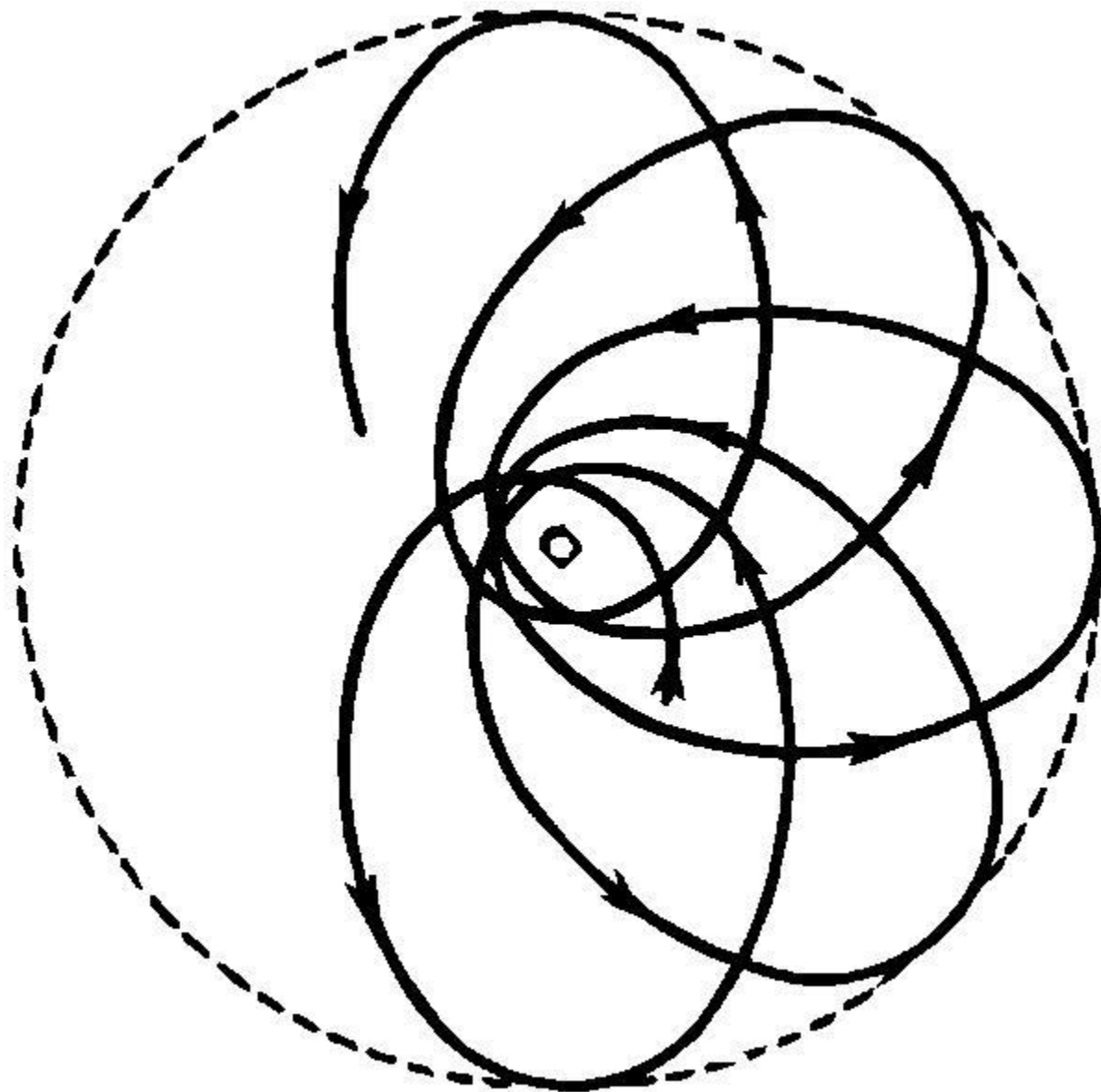
$$F = G \frac{Mm}{R^2}$$

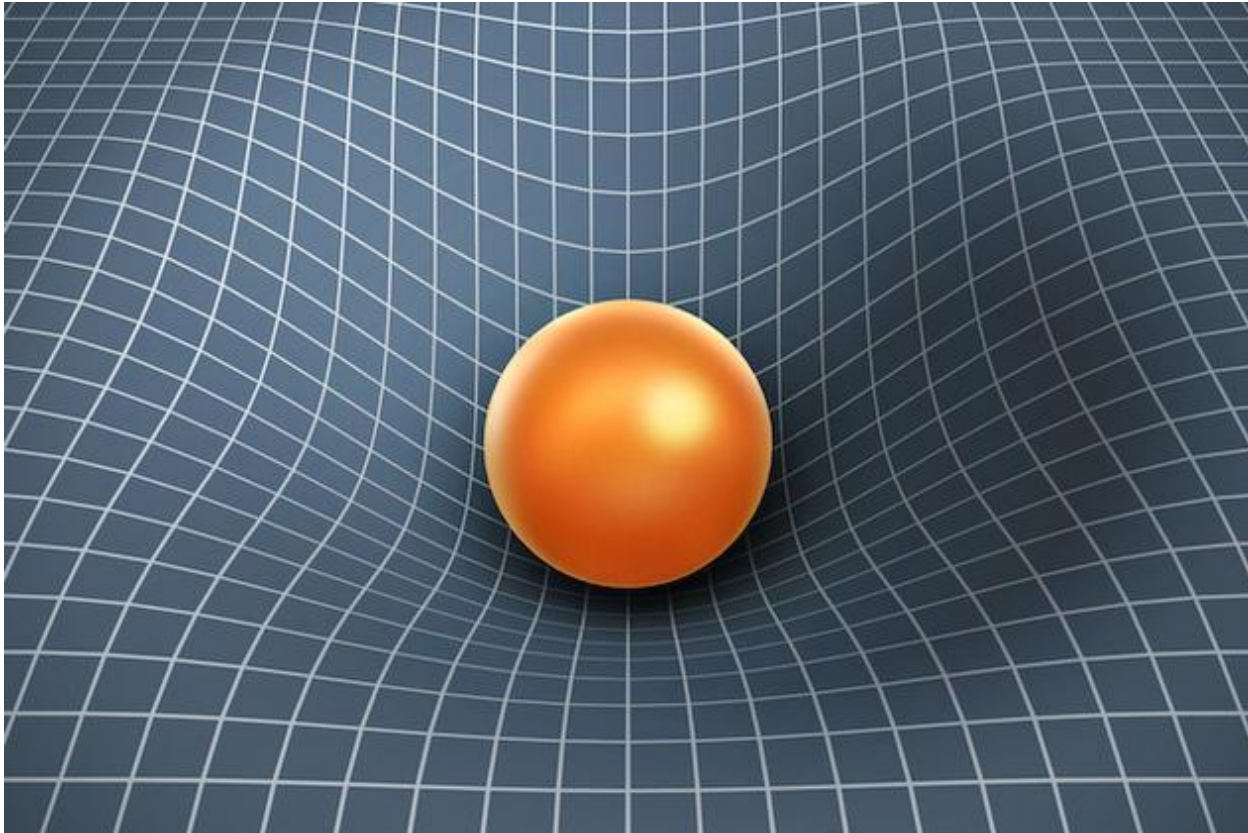
2. Тела конечных размеров

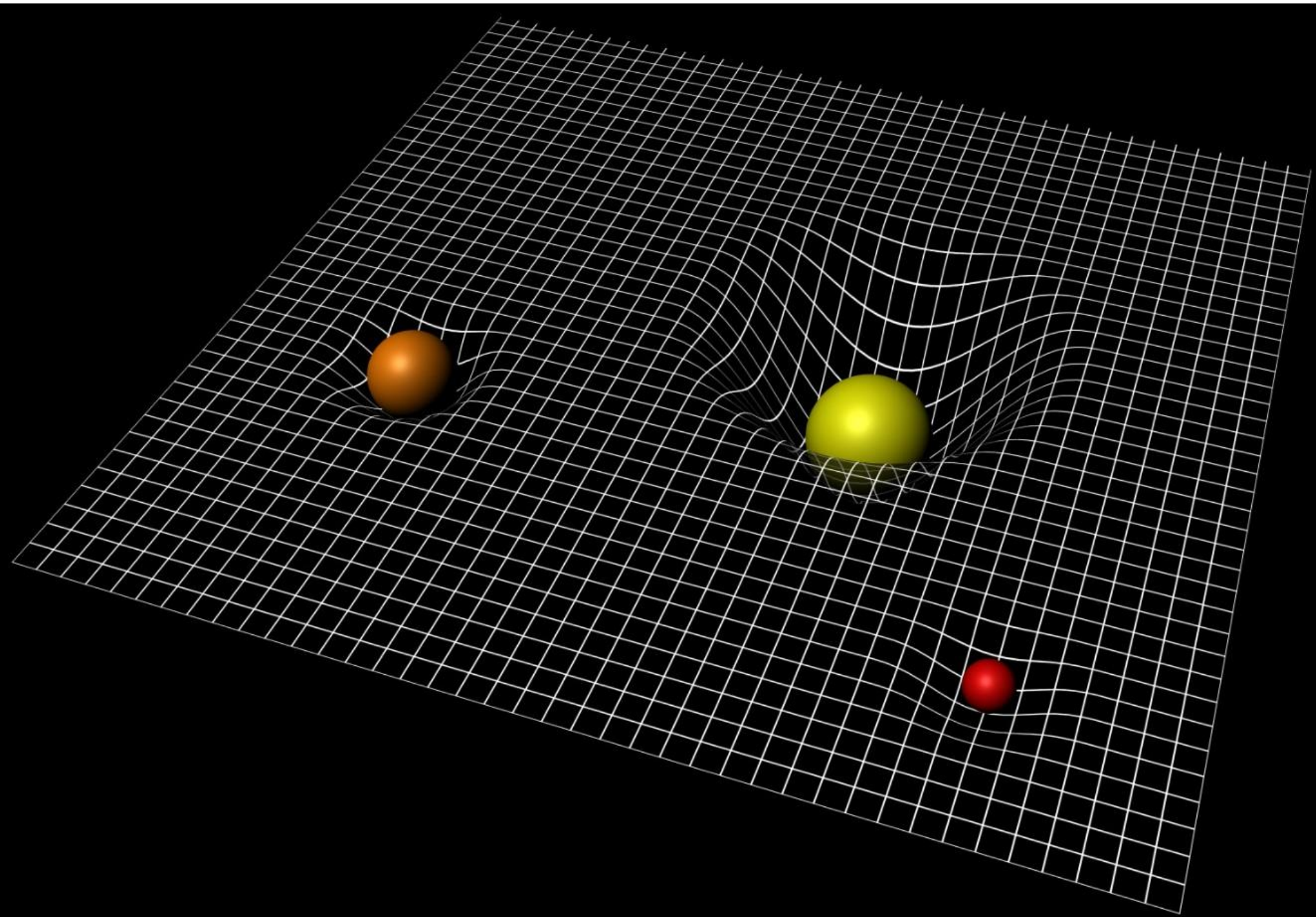


$$F \neq G \frac{Mm}{R^2}$$

25







$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Шварцшильдовский радиус

Космологическая «постоянная» теории относительности

- Согласно ОТО плотность энергии вакуума

$$\varepsilon = c^4 \Lambda / 8\pi G$$

- Согласно НВТ

$$\varepsilon = 3c^4 / 4\pi G r^2$$

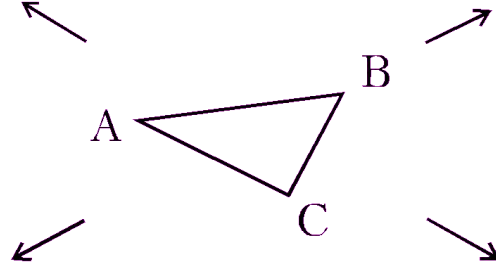
- Из этих соотношений следует значение космологической «постоянной»:

$$\Lambda = 6 \left(\frac{1}{r} \right)^2$$

- где радиус элементарной ячейки $0 > r > \infty$, т.е значение параметра Λ полностью определяется гауссовой кривизной пространства.

а)

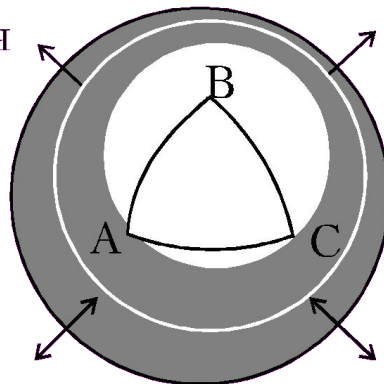
плоская
Вселенная



$$\angle A + \angle B + \angle C < 180^\circ$$

б)

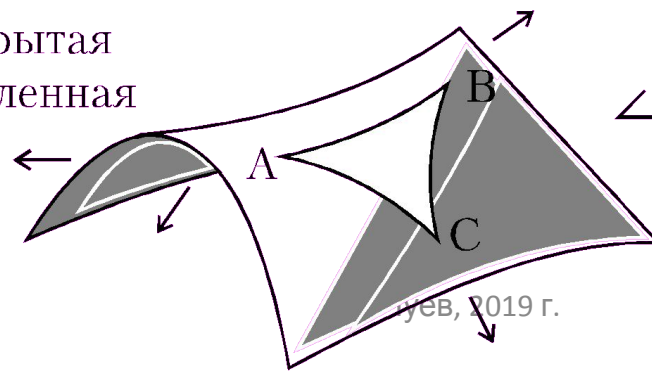
замкнутая
Вселенная



$$\angle A + \angle B + \angle C > 180^\circ$$

в)

открытая
Вселенная



$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

Эффект Доплера.

В 1842 году австрийский физик и астроном Христиан Доплер установил, что длина волны λ , принятая наблюдателем, связана с длиной волны источника излучения соотношением:

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 + \frac{V}{c} \right),$$

где V – проекция скорости источника на луч зрения. Открытый им закон получил название закона Доплера.

- При $\theta = 0$ наблюдают продольный эффект Доплера:

$$v = v_0 \frac{\sqrt{1-v/c}}{\sqrt{1+v/c}} = v_0 \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}}.$$

- При малых скоростях сближения или расхождения

$$v = v_0(1-v/c) = v_0(1-\beta).$$

- При удалении источника и приемника друг от друга (при их положительной относительной скорости) наблюдается сдвиг в более длинноволновую область ($v < v_0$, $\lambda > \lambda_0$) - так называемое **красное смещение**. При сближении же источника и приемника (при их отрицательной относительной скорости) наблюдается сдвиг в более коротковолновую область ($v > v_0$, $\lambda < \lambda_0$) - так называемое **фиолетовое смещение**.

- Если $\theta = \pi/2$ наблюдают поперечный эффект Доплера:

$$v = v_0 \sqrt{1-(v^2/c^2)} = v_0 \sqrt{1-\beta^2}.$$

Информация к эффекту Доплера

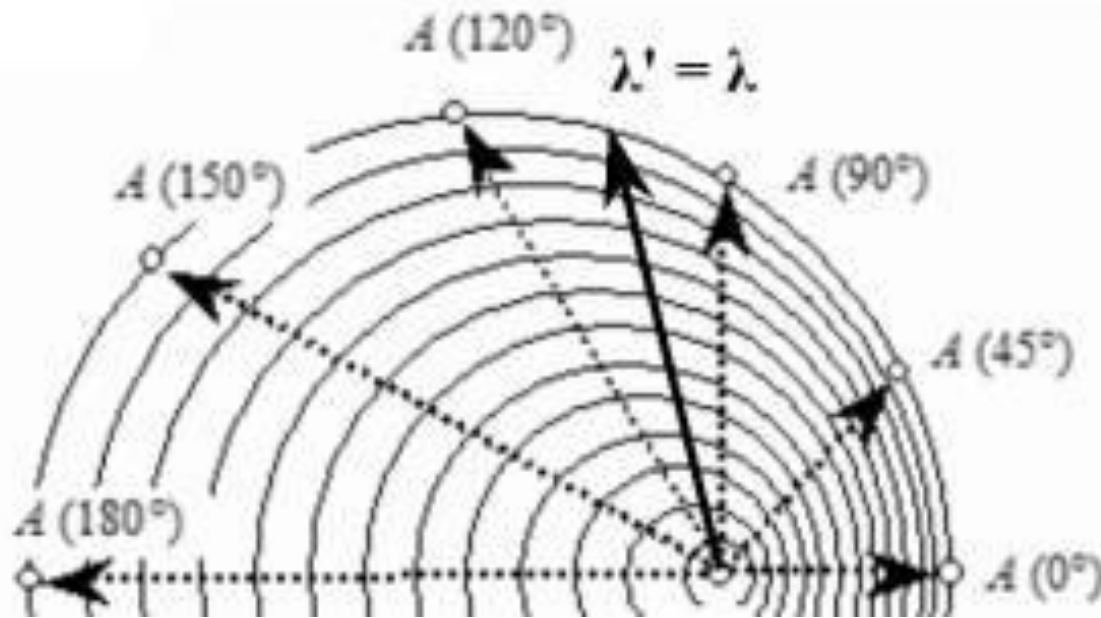
<https://www.youtube.com/watch?v=Z-1O5reajsk>

<http://new-idea.kulichki.net/pubfiles/090602075629.pdf>

http://ens.tpu.ru/posobie_fis_kusn/%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D0%B5%D0%B1%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%8F%20%D0%B8%20%D0%B2%D0%BE%D0%BB%D0%BD%D1%8B.%20%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F%20%D0%B8%20%D0%B2%D0%BE%D0%BB%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%8F%20%D0%BE%D0%BF%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0/05-7.htm

Таблица скоростей β и углов θ , сохраняющих условие равенства длин волн $\lambda' = \lambda$.

β	θ
0,0001	90°,003
0,001	90°,03
0,01	90°,3
0,1	92°,9
0,2	95°,7
0,4	101°,5
0,6	107°,5
0,8	113°,6
1,0	120°,0
1,2	126°,9
1,4	134°,4
1,6	143°,1
1,8	154°,1
2,0	180°,0
2,2	—



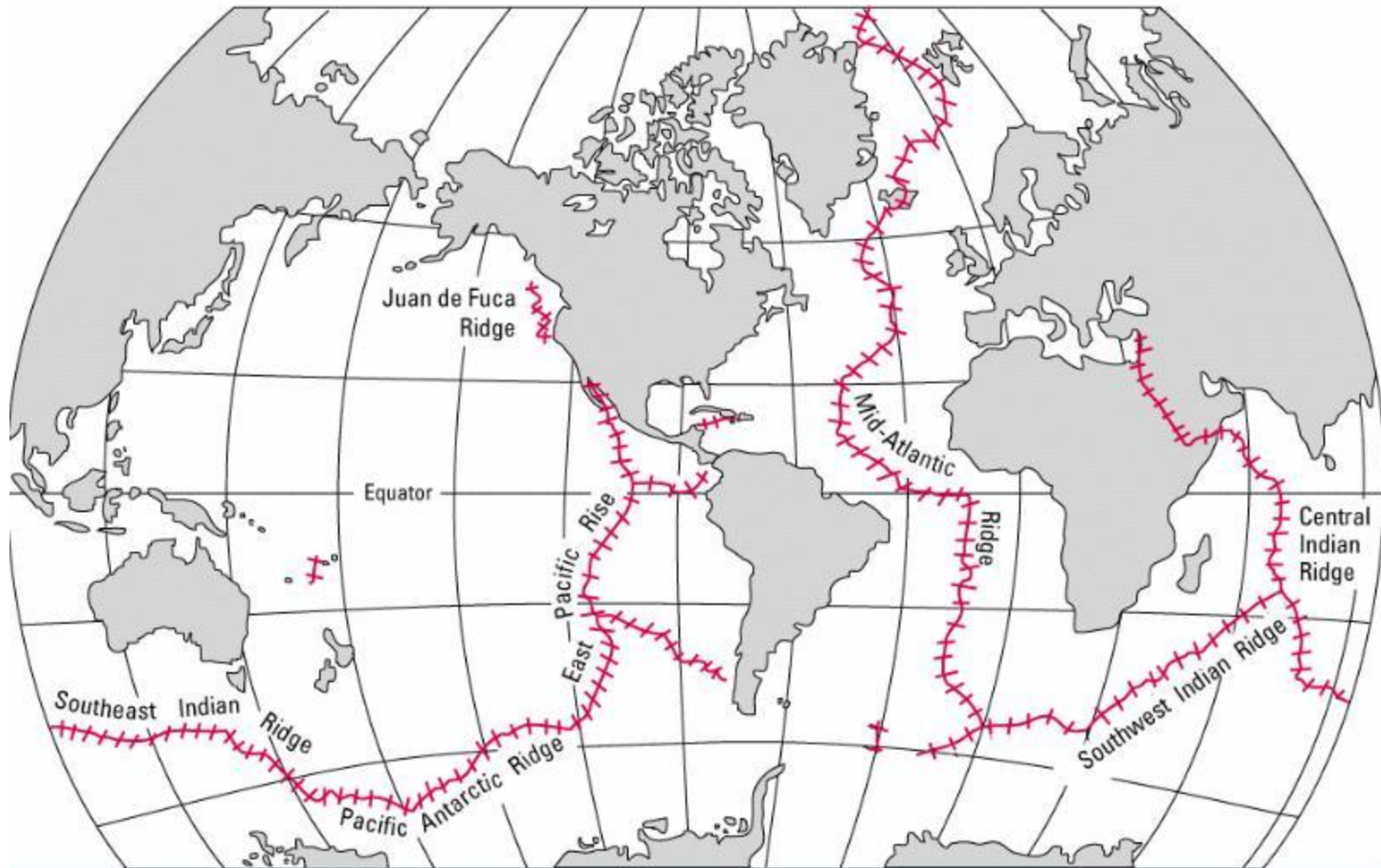
длина волны λ' должна явным образом зависеть от скорости источника (β).

В традиционную формулу (1) β не входит, значит, формула не отражает реального положения дел.

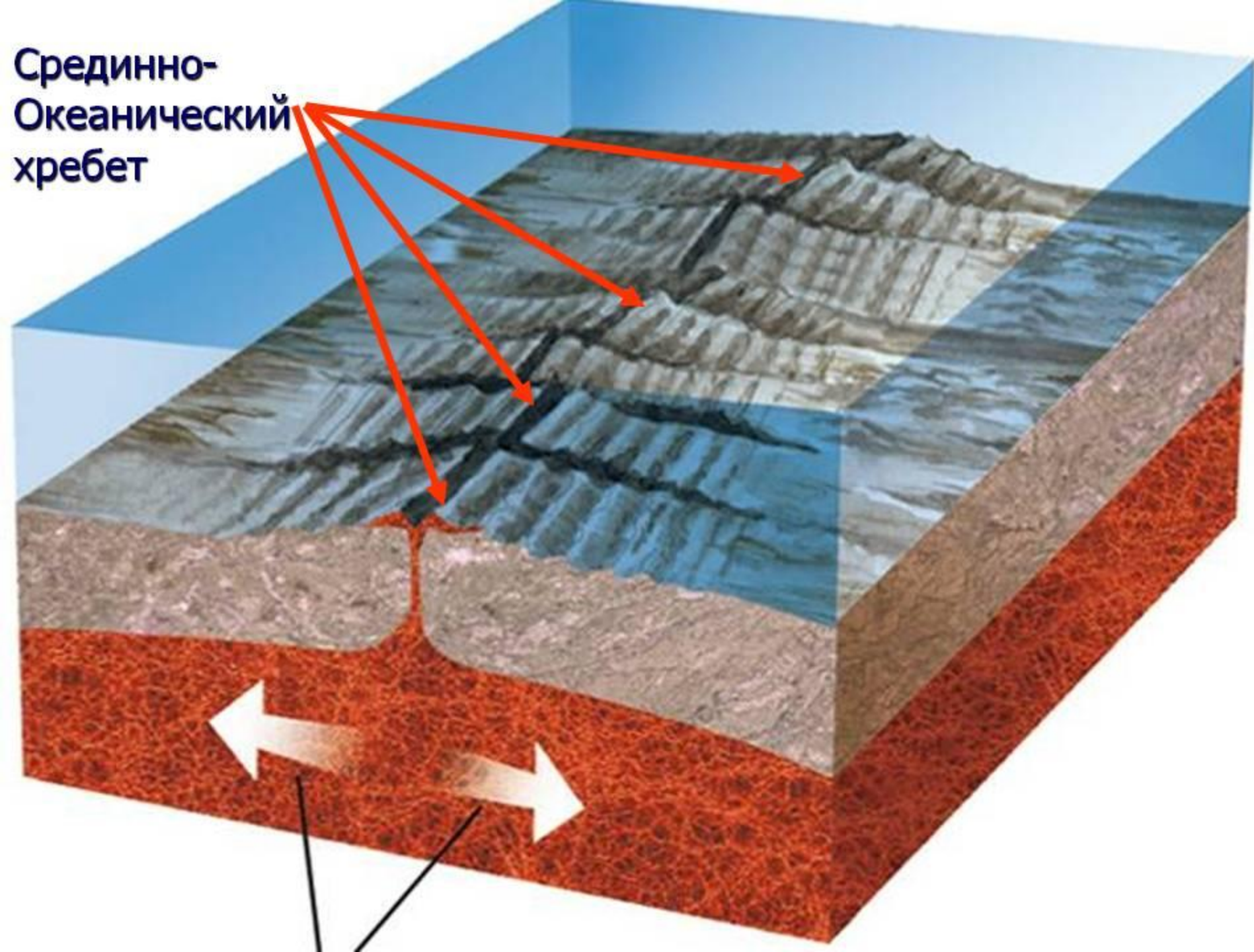
$$\lambda' = \lambda(1 - \beta \cos \varphi) \cdot \quad (1) \quad \text{не верна}$$

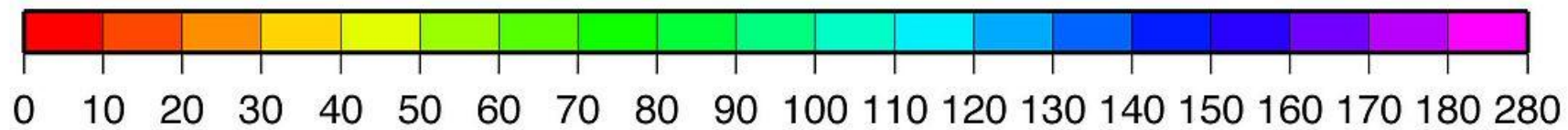
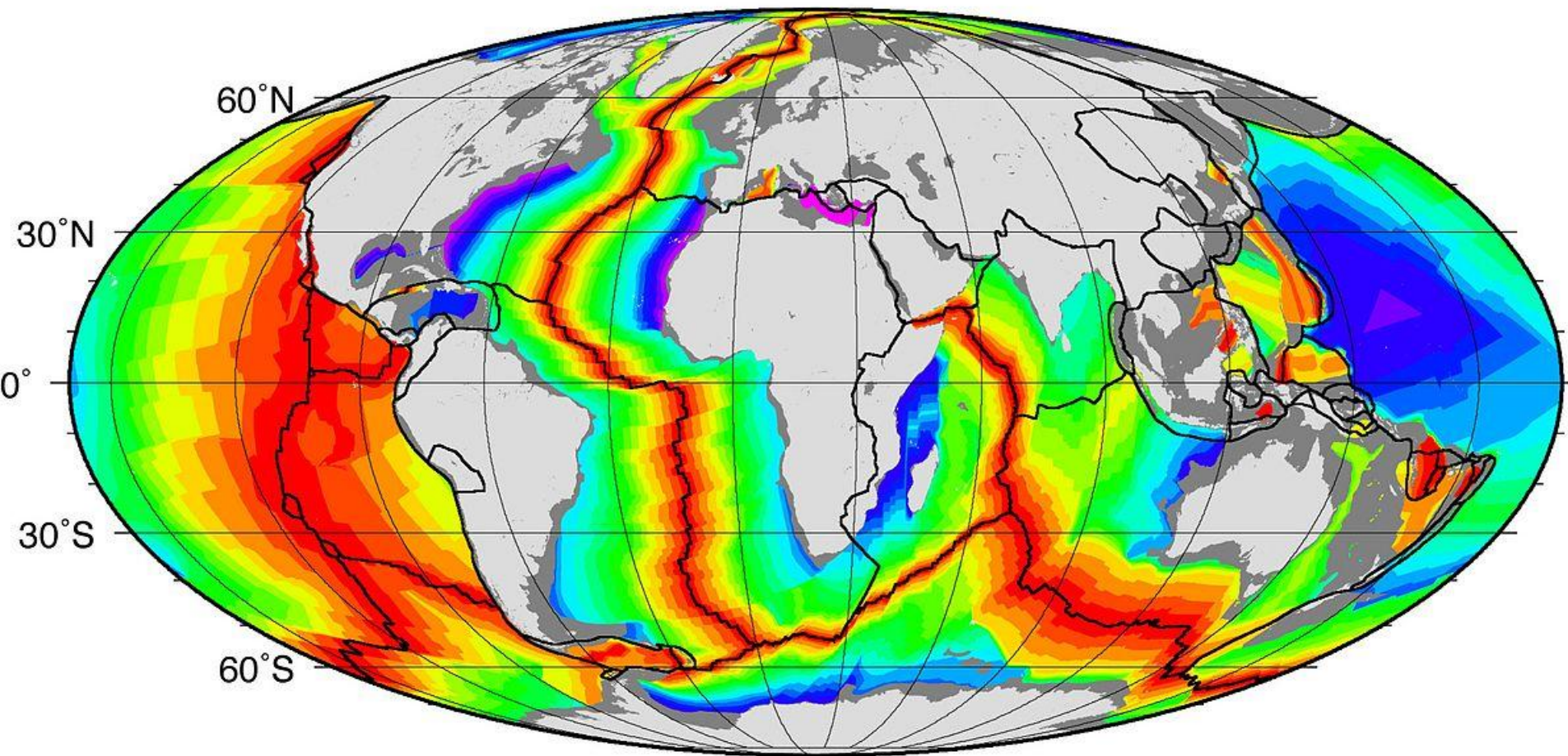
А.С.Чуев, 2019 г.

Конец 50-х годов – открытие мировой системы срединно-океанских хребтов.

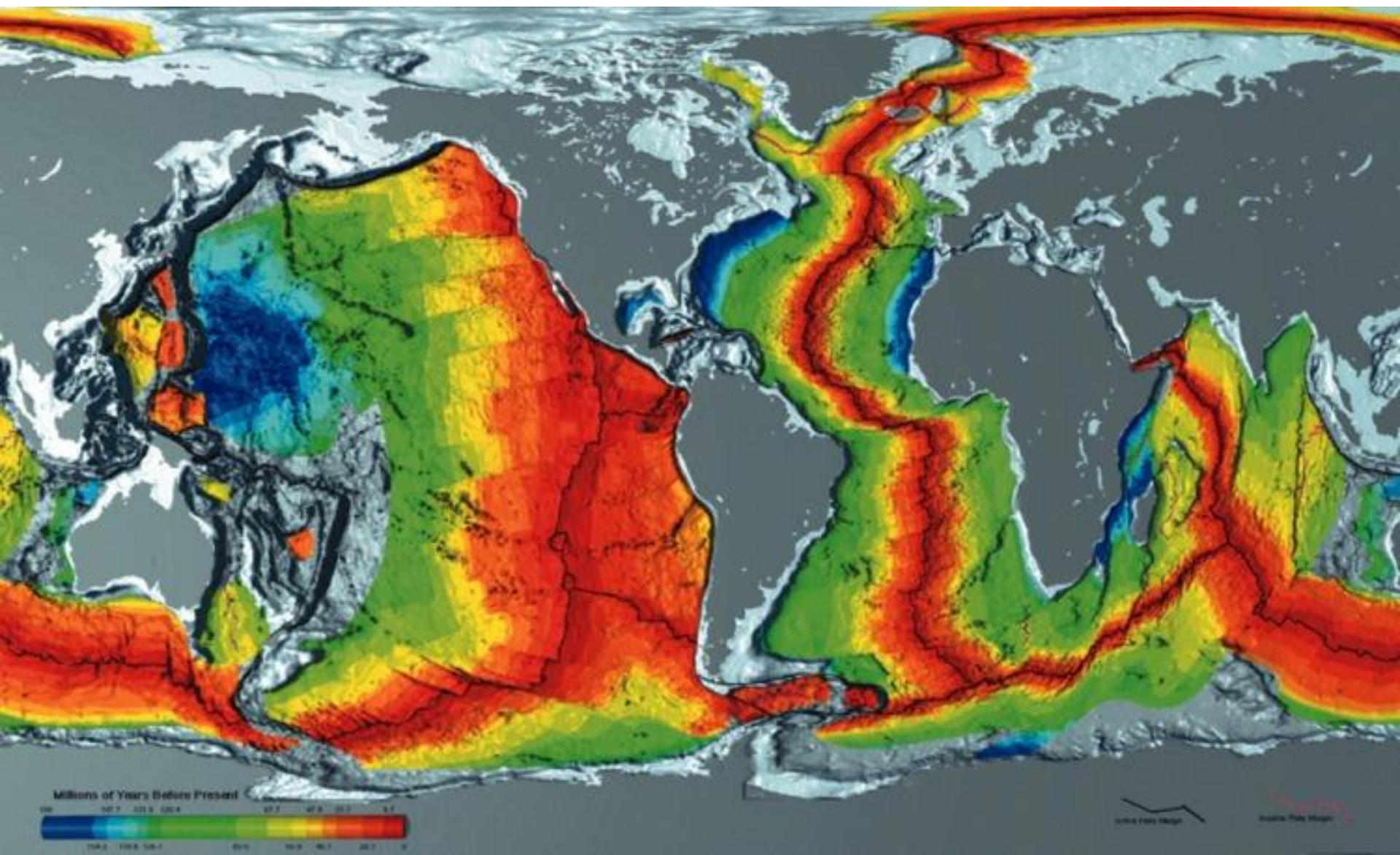


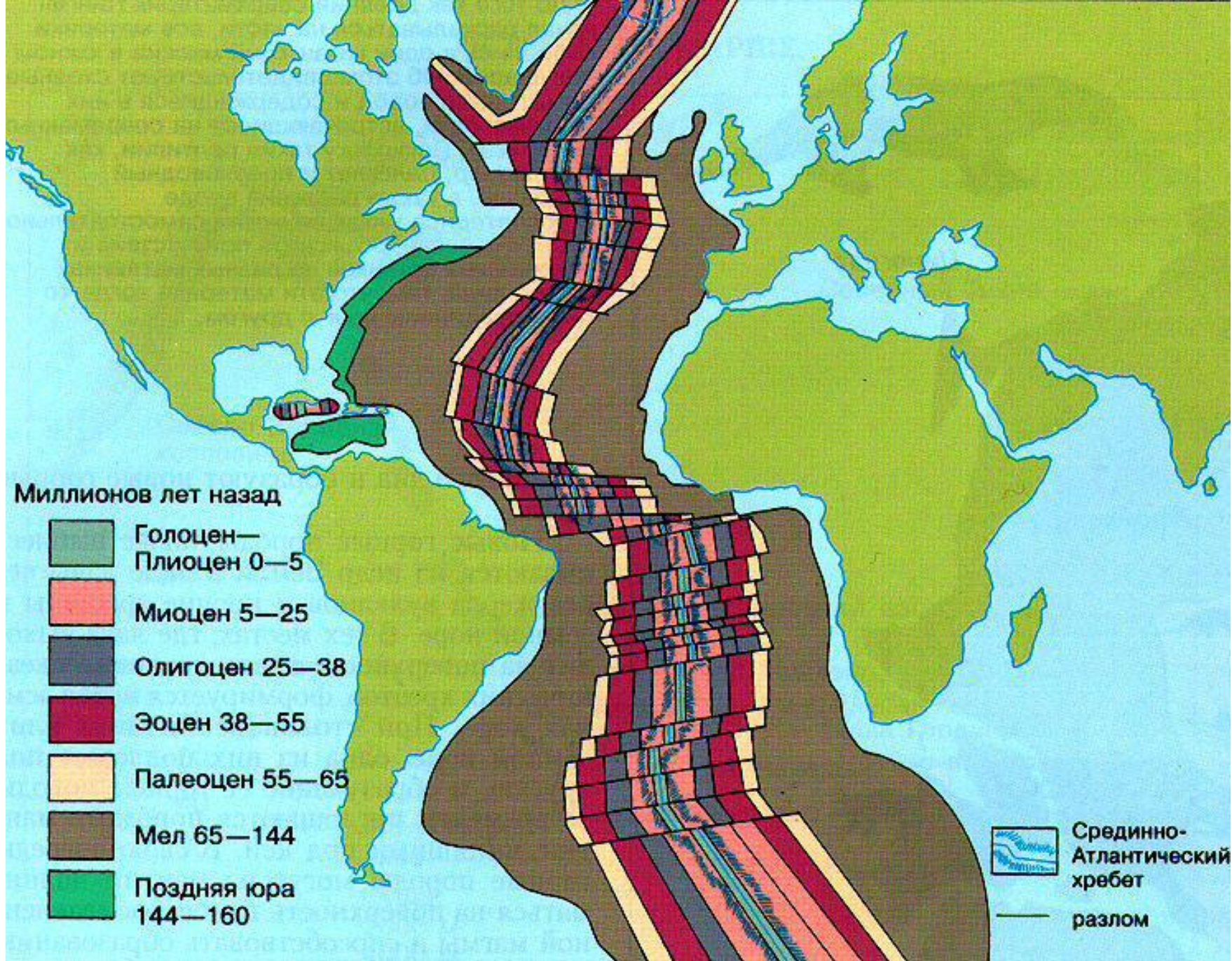
Срединно-
Океанический
хребет





Age of Oceanic Lithosphere [m.y.]





Земля растёт!!!

Четырехвекторы

Скорость

$$\hat{v} \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right) = \hat{v} \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

Четырехмерное ускорение

под a_0, a_1, a_2, a_3 следует понимать соответствующие компоненты, например

$$a_0 = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, a_1 = \frac{dx/dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Поскольку компонентам 4-перемещения $d\hat{r}(c dt, dx, dy, dz)$ соответствует инвариант

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2, \text{ где } dl^2 - \text{ квадрат расстояния),}$$

то, для 4-х скорости

$$\hat{v} \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

разность квадратов временной и пространственных компонент

$$\left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)^2 - \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)^2 = \frac{c^2 - v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c^2. \quad \text{const}$$

четырёхмерным импульсом называется величина $\hat{P} = m\hat{v}$.

$$\hat{P} = m_0\hat{v} = \left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Сокращенно пишем $\hat{P}(P_0, \vec{P})$, где пространственная и временная компоненты 4-импульса имеют вид

$$\vec{P} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad P_0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

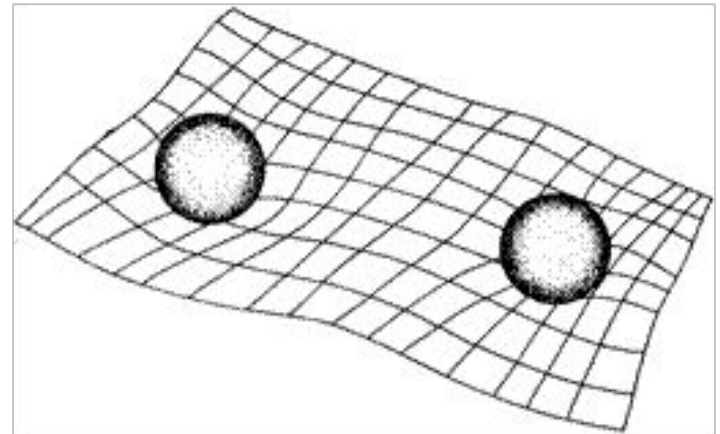
Здесь \vec{P} - так называемый *релятивистский 3-импульс*. Очевидно, 4-импульсу отвечает его инвариант

$$P_0^2 - \vec{P}^2 = m_0^2 c^2.$$

ОТО

Общая теория относительности (ОТО)

- Это обобщение СТО на случай гравитации
- Массивные тела создают гравитационное поле, которое «искривляет» пространство и время
- Материя «шепчет» пространству-времени, каким ему быть, а пространство-время «говорит» материи, как ей двигаться



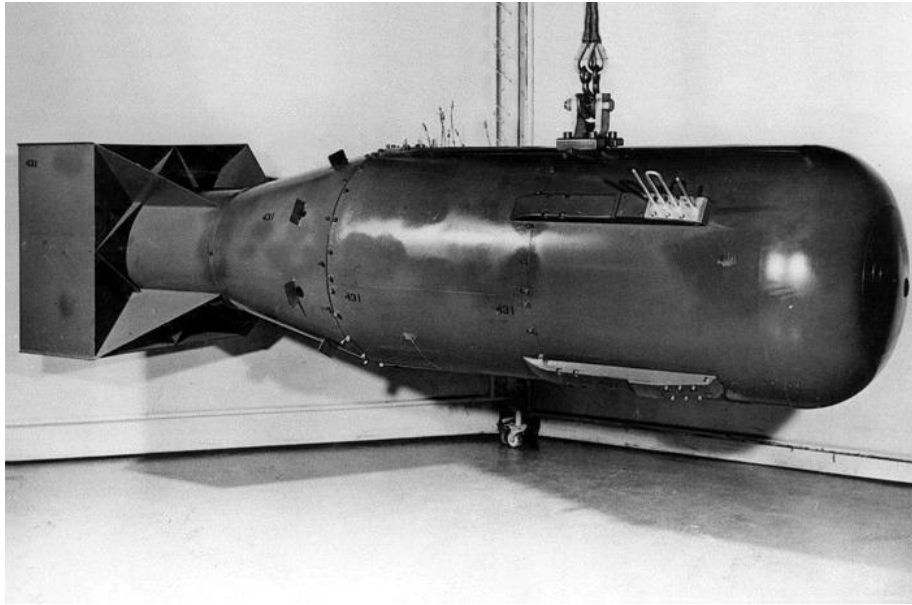


Недостающая масса превращается в эквивалентное количество энергии

Неуправляемая ядерная реакция – ядерный взрыв



Итоги. Хиросима и Нагасаки.



Макет бомбы «Little Boy», сброшенной на Хиросиму



Макет бомбы «Fat Man», сброшенной на Нагасаки

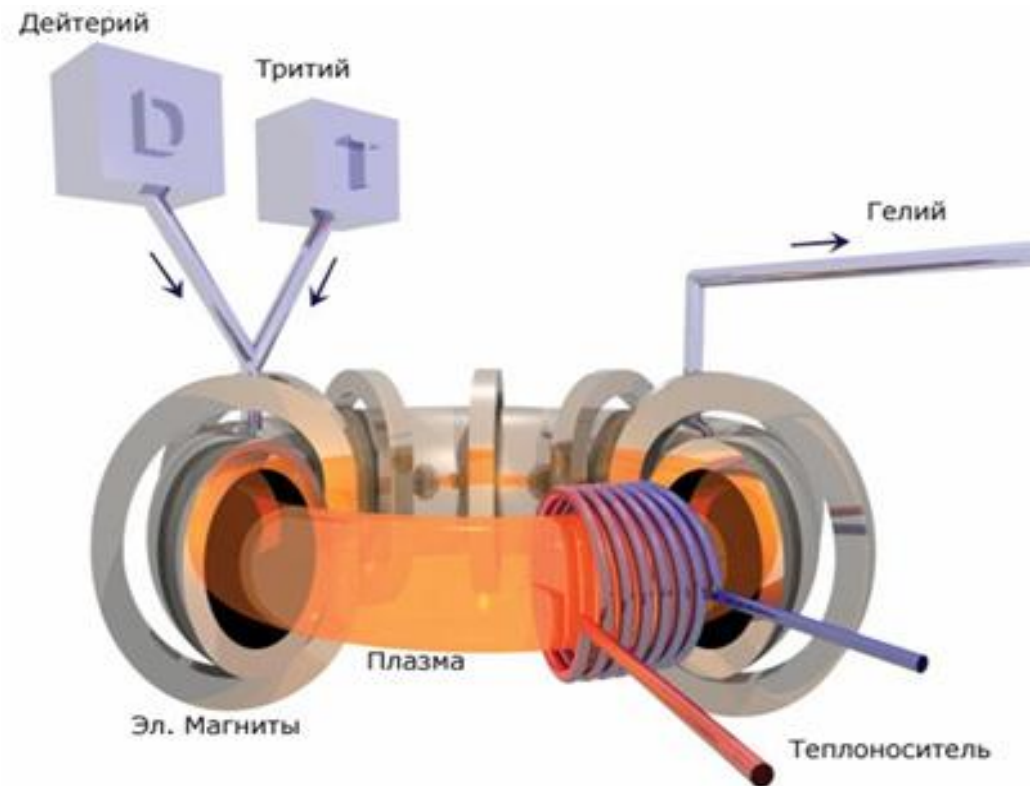
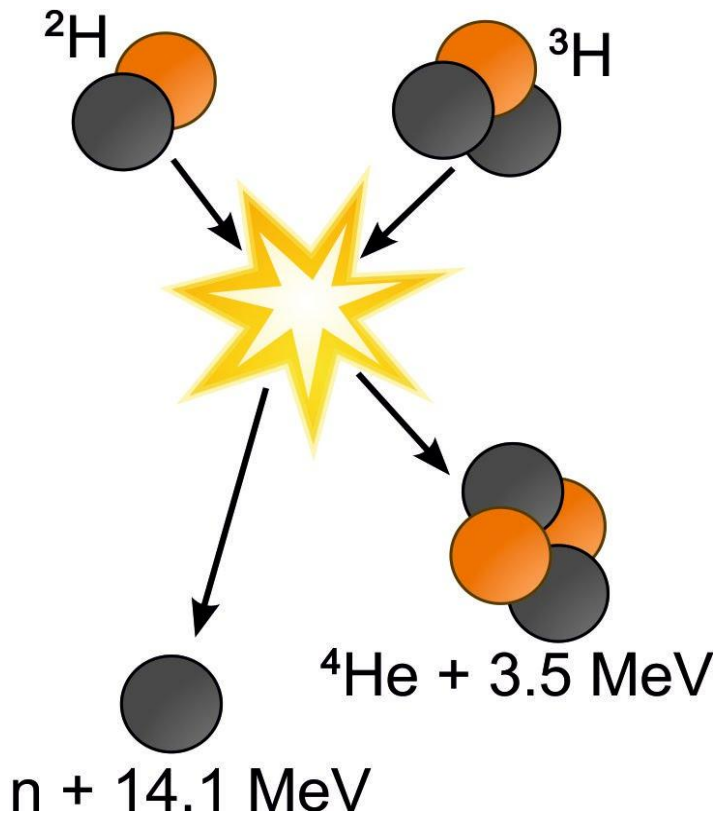




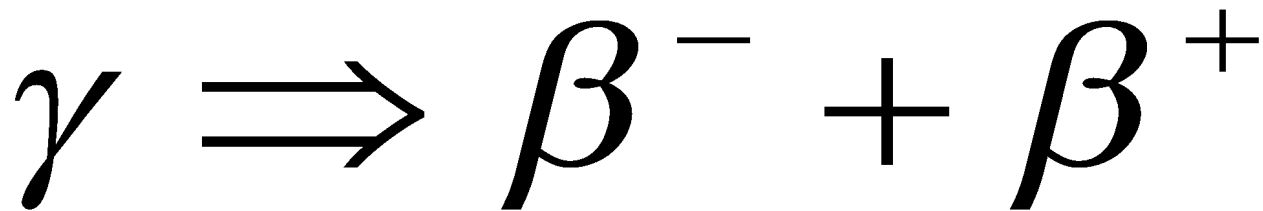
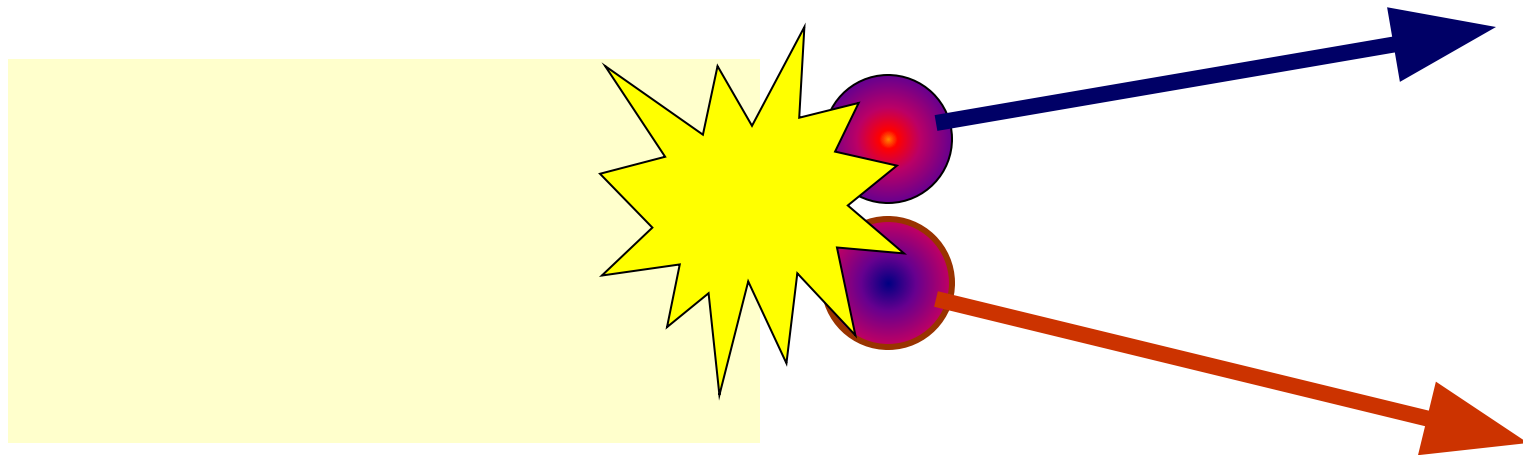
Термоядерные реакции

Термоядерные реакции – это реакции синтеза легких ядер, протекающие при очень высоких температурах. Высокие температуры необходимы для сообщения ядрам энергии, достаточной для того, чтобы сблизиться до расстояния, сравнимого с радиусом действия ядерных сил: (10^{-15} м).

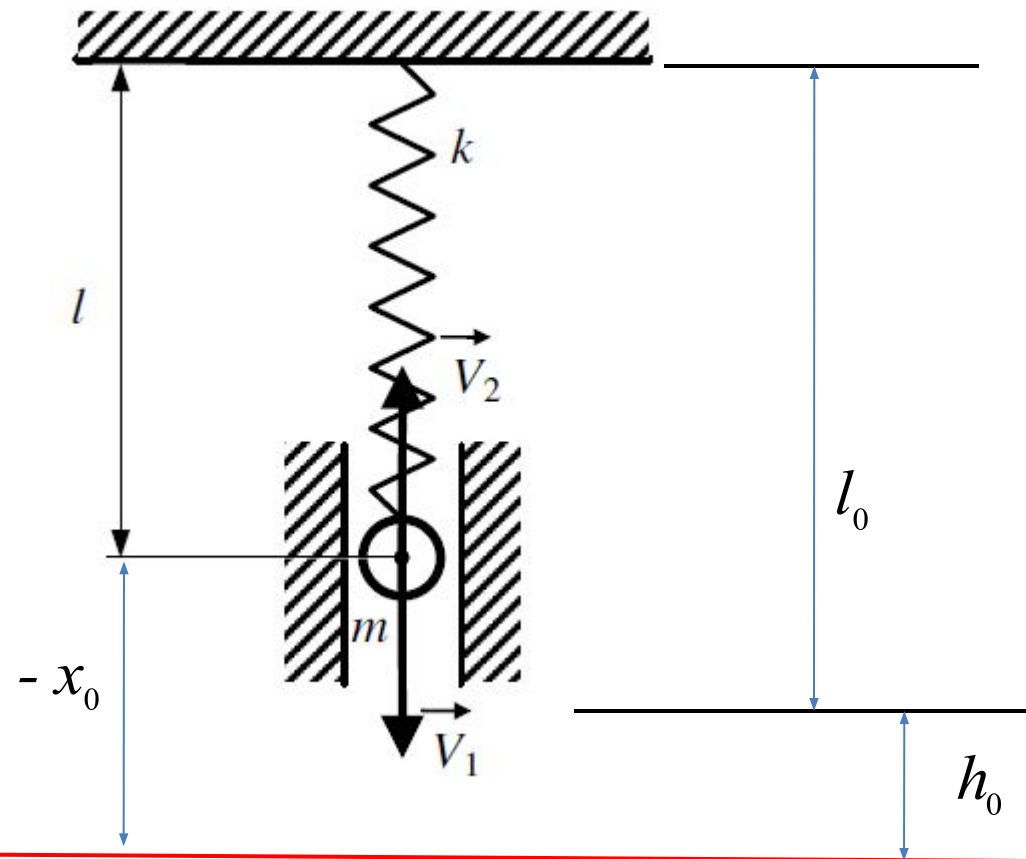
В настоящее время, в рамках осуществления мировой термоядерной программы, интенсивно разрабатываются новейшие системы типа **токамак**.



Рождение пары: "частица и античастица"



К выполнению ДЗ по колебаниям



$$h_0 = \frac{mg}{k}$$

Положение равновесия

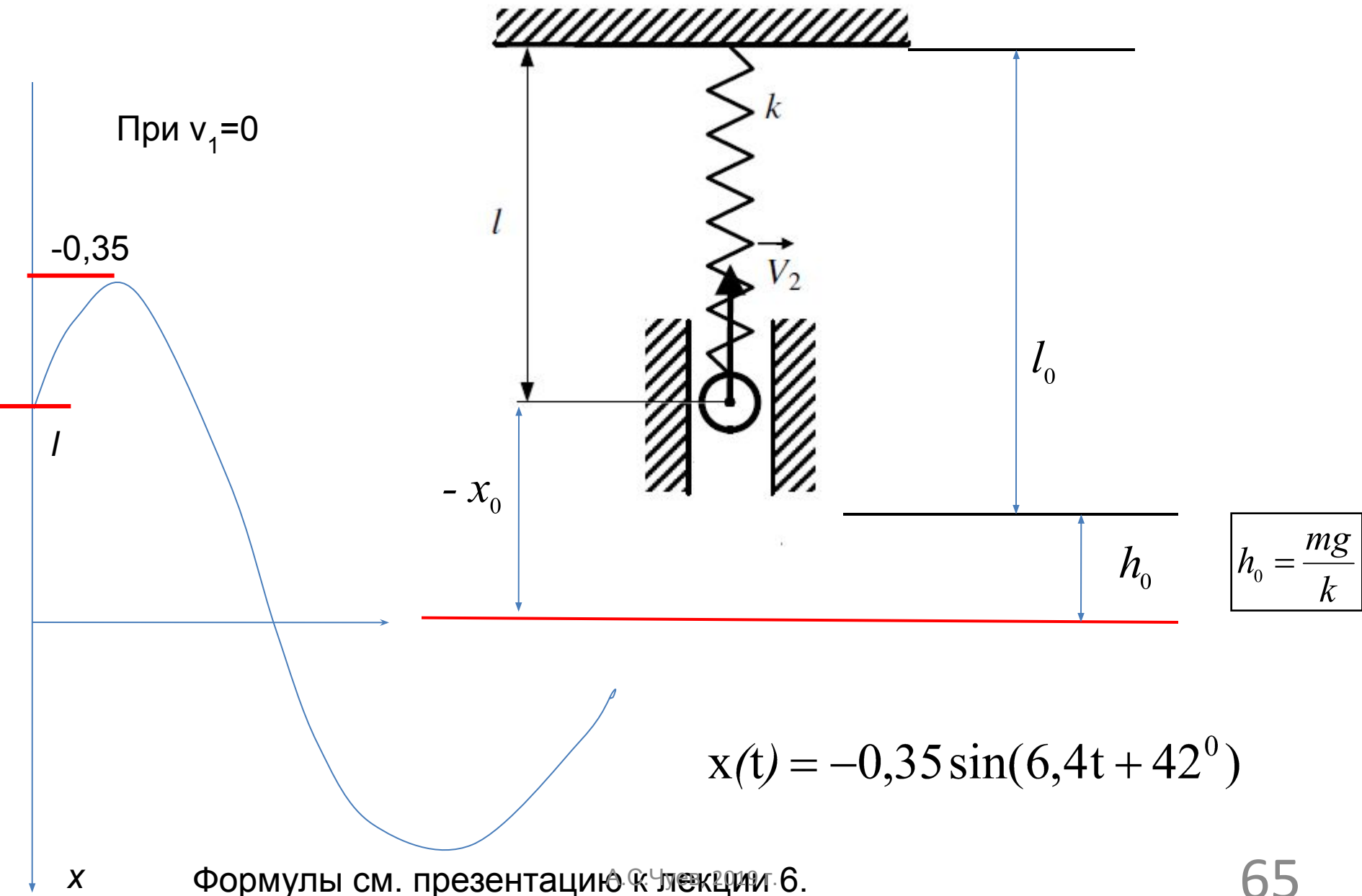
l_0 - длина пружины в свободном состоянии;

h_0 - дополнительное растяжение пружины в поле гравитации;

$-x_0$ - начальное смещение массы от положения равновесия.

1. Общие исходные данные не приводить.
2. На рисунке начальную скорость показывать только свою.
3. Привести качественный график изменения амплитуды колебаний в начальный период времени, указав начальное и амплитудное значения.
4. Привести уравнение колебаний с цифровыми значениями амплитуды и частоты, начальную фазу приводить в градусах *min* значениями для *sin* и *cos*.

К выполнению ДЗ-3 по колебаниям



К выполнению ДЗ-4 по волнам

1. В вариантах с 1 по 6 значение начальной фазы колебаний указывать в градусах, оно не должно превышать 90° .
2. Рис. 38 и рис. 39 нуждаются в уточнении. Обратиться к преподавателю.
3. Эпюры смещений и напряжений в стоячих волнах размещать строго под изображением стержня (струны) или напротив волновода.

Конец лекции 9